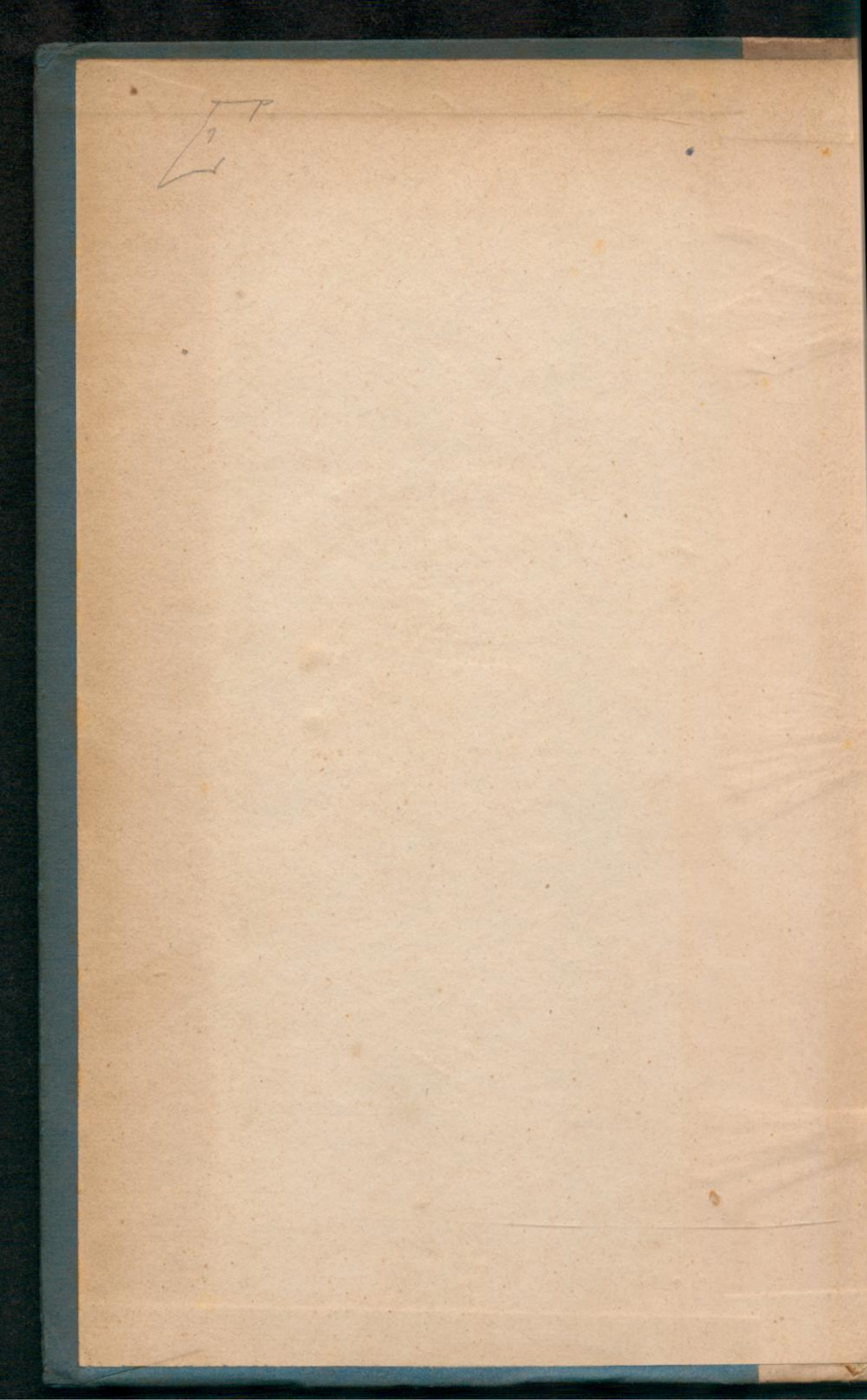
Lehrbuch der Algebra für Industrie- und Gewerbeschulen, sowie zum Selbstunterricht

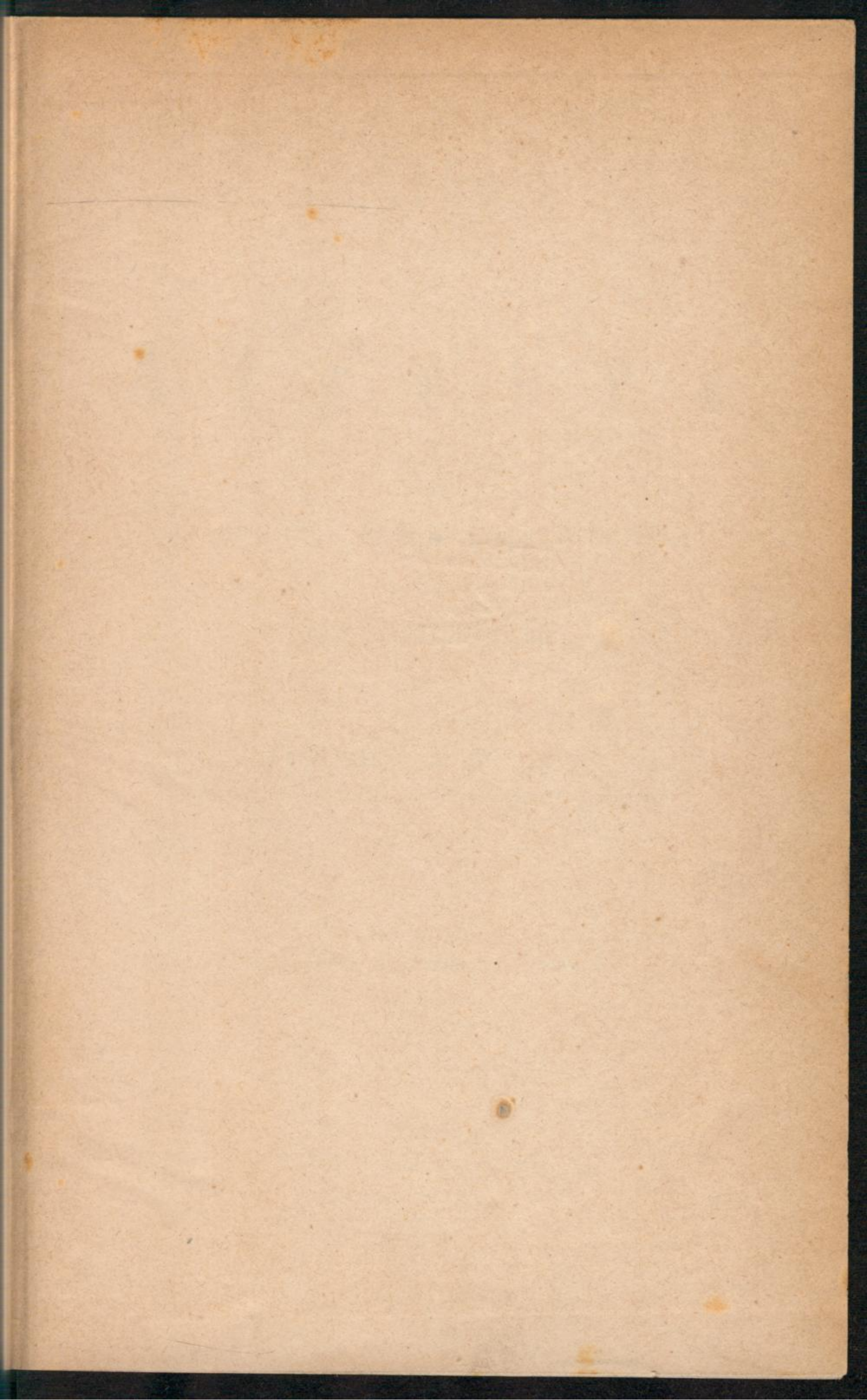
Orelli, Johannes

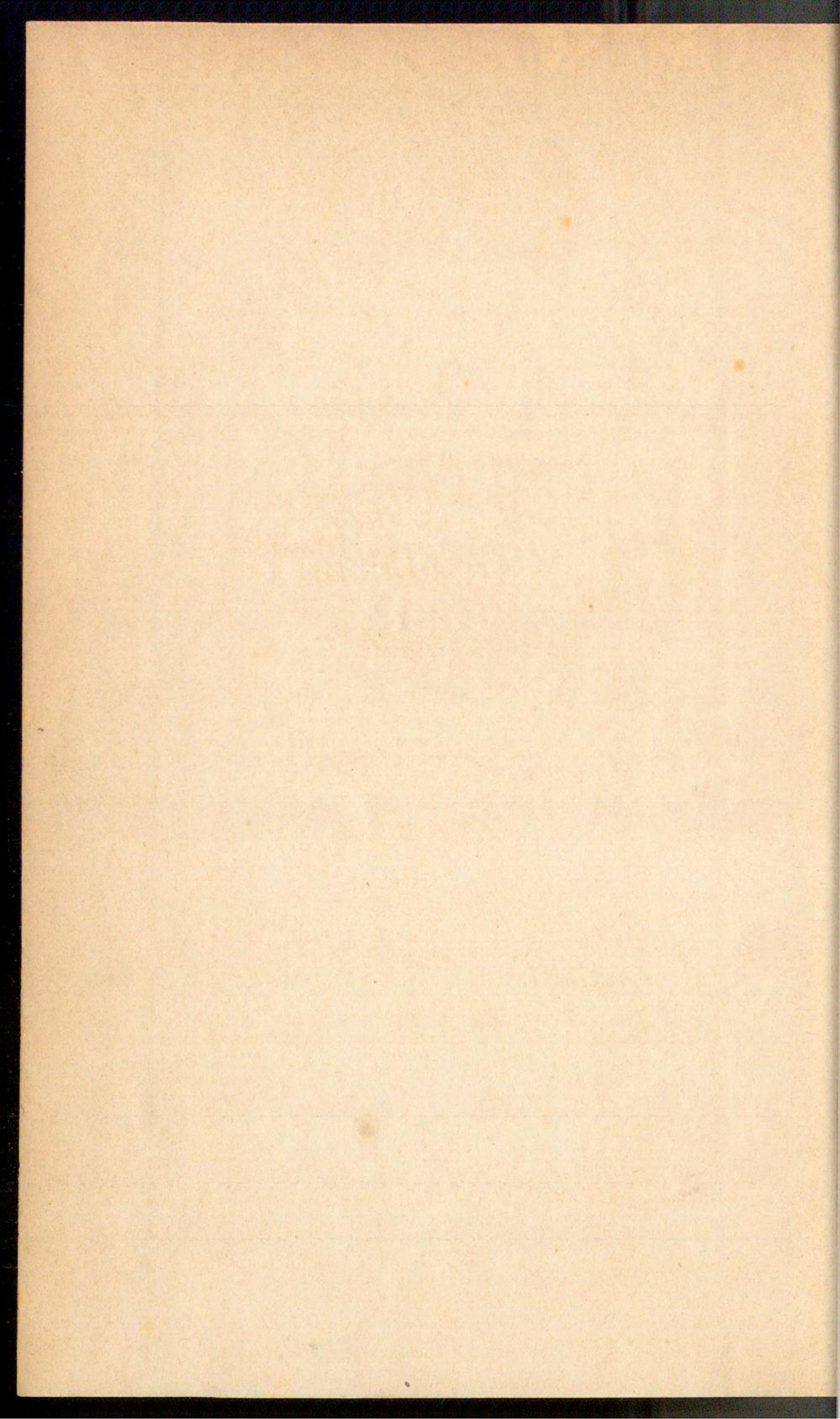
Zürich, 1872

Persistenter Link: http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-28996









Lehrbuch

der

Algebra

für

Industrie- und Gewerbeschulen,

sowie

zum Selbstunterricht.

Von

Johannes Orelli,

Professor am eidgenössischen Polytechnikum.

Zweite,
umgearbeitete und wesentlich vermehrte
Auflage.

Zürich,

Schabelitz'sche Buchhandlung

(Caesar Schmidt).

1872.

Vorwort.

Wenn ich meinem seit mehreren Jahren vergriffenen Lehrbuch der Algebra hiermit eine zweite Auflage nachfolgen lasse, so habe ich mich dabei hauptsächlich durch die Absicht leiten lassen, einerseits meinen Zuhörern ein bequemes Hülfsmittel zur Wiederholung meiner Vorlesungen über Algebra an die Hand zu geben und anderseits dem Theil der studirenden Jugend, der bei seiner Vorbereitung theilweise oder ganz auf Selbstunterricht angewiesen ist, den Weg für höhere mathematische Studien zu ebnen. Von diesem Gesichtspunkt aus ist Form und Inhalt, Anlage und Behandlungsweise des Stoffes zu beurtheilen und dürfte sich namentlich die Ausführlichkeit rechtfertigen, deren man in einem bloss an der Hand des Lehrers zu benutzenden Leitfaden füglich entbehren kann. Es hat dadurch die erste Auflage eine wesentliche Aenderung erlitten, indem dieselbe nicht nur grösstentheils umgearbeitet, sondern auch bedeutend vermehrt werden musste, so dass das Buch in seiner gegenwärtigen Gestalt den ganzen Umfang des algebraischen Lehrstoffs enthält, der für den Eintritt in polytechnische Schulen und als Grundlage höherer mathematischer Studien überhaupt gefordert werden muss. Es zerfällt in zwei Theile, von welchen der erste den Inhalt meiner Vorlesungen über Algebra im Wintersemester ausmacht und als eine Umarbeitung der ersten Auflage betrachtet werden kann, während der zweite Theil den Stoff für das Sommersemester bildet, allerdings in einer etwas grössern Ausdehnung, als ich bei der beschränkten Zeit am Vorkurs durchzunehmen pflege, doch keineswegs über dasjenige Mass hinaus, welches man an unsern

Industrie- und Gewerbeschulen zu erreichen im Stande ist; befinden sich diese doch in der günstigen Lage, den Stoff, der am Vorkurs auf ein Jahr zusammengedrängt werden muss, auf einen viel längern Zeitraum vertheilen zu können, wodurch sie der Nothwendigkeit überhoben sind, sich strikte auf die Anforderungen des eidgenössischen Polytechnikums zu beschränken. Dass einzelne bloss theoretische Partieen der frühern Auflage unterdrückt und durch eine Anzahl vollständig durchgeführter Rechnungsbeispiele als Anwendung vorausgegangener Theorien ersetzt wurden, wird sich durch die oben ausgesprochene Bestimmung des Buches hinlänglich rechtfertigen, sowie auch die über die Forderung unsers Aufnahmsregulativs hinausgehende Ausdehnung des letzten Abschnittes, welcher die für Bestimmung der reellen Wurzeln wichtigsten Eigenschaften der höheren Gleichungen behandelt und neben der Regula Falsi auch die Horner'sche Methode zur Aufsuchung der inkommensurabeln Wurzeln an speziellen Beispielen lehrt, sich aus der Rücksicht auf verwandte Lehranstalten erklärt.

Ich habe also in dem Buche ohngefähr das geboten, was nach meinen früheren Erfahrungen an unsern schweizerischen Industrie- und Gewerbeschulen ohne Schwierigkeit erreicht werden kann, und gebe mich daher auch der Hoffnung hin, dass, obwol das Buch zunächst für meine eigenen Zuhörer bestimmt ist, doch vielleicht dann und wann einer meiner Herren Collegen sich veranlasst finden dürfte, dasselbe auch seinen Schülern als brauchbares Hülfsmittel zur Befestigung und Erweiterung ihrer mathematischen Kenntnisse zu empfehlen.

Zürich im April 1872.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

I. Theil.

Einleitung.

Erster Abschnitt.

Von den negativen Grössen.

Zweiter Abschnitt.

Die vier ersten Operationen mit Monomen und Polynomen.

Dritter Abschnitt.

Algebraische Brüche.

Vierter Abschnitt.

Potenzen und Wurzelgrössen; Ausziehung der 2ten und 3ten Wurzel.

Fünfter Abschnitt.

Gleichungen des ersten Grades.

Sechster Abschnitt.

Gleichungen des 2ten Grades.

Siebenter Abschnitt.

Sätze über Zahlen und Wurzelgrössen.

Achter Abschnitt.

Theorie der Logarithmen.

Neunter Abschnitt.

Progressionen.

A. Arithmetische Progressionen.

B. Geometrische Progressionen.

Zehnter Abschnitt.

Kettenbrüche.

II. Theil.

Erster Abschnitt.

Unbestimmte Analytik.

Zweiter Abschnitt.

Combinationslehre.

Dritter Abschnitt.

Binomischer und polynomischer Satz mit einigen Consequenzen.

Vierter Abschnitt.

Imaginäre und complexe Zahlen.

Fünfter Abschnitt.

Allgemeine Auflösung der Gleichungen des 3ten Grades.

Sechster Abschnitt.

Unendliche Reihen.

Siebenter Abschnitt.

Höhere Gleichungen.

Algebra

I. Theil.

Einleitung.

1. Denkt man sich vorläufig unter den Buchstaben positive ganze Zahlen, so versteht man unter Summe zweier oder mehrerer Zahlen a, b, c etc. eine neue Zahl, welche so viele Einheiten enthält, als die gegebenen Zahlen zusammen genommen. Die einzelnen Zahlen a, b, c etc. werden Summanden, die resultirende Zahl wird Summe genannt und gefunden, wenn man zu der Zahl a die in b enthaltenen Einheiten successive hinzuzählt, zum Resultat die in c enthaltenen Einheiten u. s. f. Angedeutet wird diese Operation dadurch, dass man die Summanden durch stehende Kreuze verbindet. Hieraus ist die Bedeutung der Gleichung

$$a + b = c \quad (1)$$

unmittelbar klar.

Mit Hülfe der Relation (1) ist man im Stande, aus irgend zwei der 3 Grössen a, b und c die dritte zu bestimmen. Man kann daher suchen

1. die Summe c, wenn gegeben sind die beiden Summanden a und b. Die Bestimmung der Summe aus den einzelnen Summanden heisst Addition.

2. den ersten Summanden a aus der Summe c und dem 2ten Summanden b. Man darf nur beachten, dass der gesuchte Summand nach der Stellung, die er einnimmt, eine Zahl bedeutet, zu welcher man noch b Einheiten hinzufügen muss, um die Summe c zu erhalten. Wenn wir nun von der Summe c so viele Einheiten wegnehmen, als b enthält, so ist der Rest offenbar eine Zahl, zu welcher man nur b wieder addiren dürfte, um c zu bekommen, d. h. dieser Rest wäre die gesuchte Zahl.

3. den zweiten Summanden b, wenn die Summe c und der erste Summand a gegeben sind. Vermöge seiner Stellung ist dieser zweite Summand eine Zahl, welche, zum ersten Summanden a addirt, gerade c als Summe giebt. Wenn man daher zum ersten

Summanden a successive so viele Einheiten addirt, dass man schliesslich c als Summe erhält, so wird die Summe aller zu a hinzugefügten Einheiten die gesuchte Zahl b sein.

Die Bestimmung irgend eines der beiden Summanden aus der Summe und dem andern Summanden heisst Subtraktion; die gegebene Summe wird Minuend, der gegebene Summand Subtrahend, der gesuchte Summand dagegen Rest oder Differenz genannt. In beiden Fällen wird die Subtraktion dadurch angedeutet, dass man erst den Minuenden, dann den Subtrahenden anschreibt und zwischen beide einen horizontalen Strich als Zeichen der Subtraktion setzt, der gelesen wird: minus oder weniger. Aus der Gleichung (1) ergeben sich demnach die zwei folgenden:

$$c - b = a$$
$$c - a = b.$$

Die Bestimmung des ersten Summanden a wird durch Wegnahme der in b enthaltenen Einheiten vom Minuenden, die des zweiten aber durch Hinzufügen so vieler Einheiten zum ersten Summanden vollzogen, als erforderlich sind, um den Minuenden c als Summe zu erhalten. Da aber, wie wir sogleich zeigen werden, $a + b = b + a$, so steht es vollkommen frei, die Differenz auf die eine oder andere Art zu bestimmen, unbekümmert darum, ob der erste oder der zweite Summand zu suchen sei.

2. Man kann die Reihe der natürlichen Zahlen bildlich darstellen. Nimmt man nämlich eine ganz beliebige Distanz AB als Bild für die Zahl 1, so wird eine zwei-, drei-, viermal so grosse Distanz auch eine 2, 3, 4 mal so grosse Zahl darstellen.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Wählt man daher auf einer unbegrenzten Geraden einen festen Punkt A als Anfangs- oder Nullpunkt und trägt auf derselben z. B. nach rechts die Vielfachen der als Einheit gewählten Distanz ab, so werden diese vom Nullpunkt aus abgetragenen Distanzen geometrische Bilder der Zahlen 1, 2, 3, 4 etc. sein. Die Endpunkte dieser einzelnen Distanzen werden Zahlörter der betreffenden Zahlen genannt. So wäre C der Zahlort von 2, E der Zahlort von 4, H der Zahlort von 7 etc.; aber nicht der Punkt C repräsentirt die Zahl 2, nicht der Punkt H die Zahl 7, sondern die Distanz AC ist das Bild der Zahl 2, die Distanz AH das Bild der Zahl 7.

Hieraus wird nun aber sofort klar, dass man die beiden

Summanden einer Summe vertauschen kann, ohne den Werth der Summe zu ändern, dass z. B. $4 + 3 = 3 + 4$.

Wenn ich nämlich von A aus erst um 4 Einheiten, also bis E, fortschreite und dann von hier aus noch um 3 Einheiten weiter gehe, so gelange ich an die Stelle H (Zahlort der Zahl 7); an die gleiche Stelle komme ich aber auch, wenn ich von A aus erst um 3 Einheiten vorwärts gehe, wodurch ich nach D komme, und dann von D aus noch um 4 Einheiten fortschreite. Es ist also in der That $4 + 3 = 3 + 4$.

3. Multiplikation. Wenn in einer Summe

$$a + b + c + d + e + \ldots$$

mehrerer Summanden die sämmtlichen Summanden einander gleich werden, wenn also $b = c = d = e$ etc. $= a$, so dass man hat: $a + a + a + a + a + \ldots$ (b mal), so nennt man eine solche Summe von lauter gleichen Summanden speciell ein Produkt. Der Summand, der mehrmal vorkommt, wird Multiplikand, die Zahl, welche angibt, wie oftmal jener als Summand vorkommt, Multiplikator und beide zusammen die Faktoren des Produktes genannt. Eine solche Summe von gleichen Summanden d. h. ein Produkt wird auf abgekürzte Weise geschrieben, indem man den Summanden, der mehrmal vorkommt, nur einmal schreibt, rechts daneben die Zahl, welche angibt, wie oftmal er vorkommt, und zwischen beide ein liegendes Kreuz oder einen Punkt oder auch gar Nichts. So wäre $a + a + a + a + a \ldots$ (b mal) $= a \times b = a \cdot b = ab$. Das blosse Hintereinandersetzen der Faktoren ohne Verbindungszeichen wäre nicht mehr gestattet, wenn die Faktoren bestimmte Zahlen wären, z. B. $8 \cdot 7$ dürfte nicht durch 8 7 angedeutet werden. Wir werden also in der Folge bei einem Produkt zweier Faktoren immer den ersten als Multiplikand, den zweiten als Multiplikator auffassen; daher

$$9 \cdot 5 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 45$$
$$5 \cdot 9 = 5 + 5 + 5 + 5 \ldots\ldots (9 \text{ mal}).$$

4. Die beiden Produkte ab und ba haben demnach eine ganz verschiedene Bedeutung; das erste ist eine Summe aus b Summanden, jeder $= a$, das 2te eine Summe aus a Summanden, jeder $= b$. Der Werth beider ist aber der nämliche. Denn es ist $ab = a + a + a + \ldots$, wo a gerade b mal als Summand vorkommt.

Allein $a = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ (a mal); somit
$ab = (1+1+1+1+\ldots) + (1+1+1+1+\ldots) + (1+1+1+1+\ldots) + \ldots$

Die Summe aller in diesen b Klammern enthaltenen Einheiten lässt sich auf doppelte Weise bilden: 1. dadurch, dass man die Einer einer jeden Klammer addirt und die erhaltenen Resultate zusammenzieht, wodurch wir eine Summe bekommen aus b Summanden, jeder $= a$ d. h. gerade das, was unser Produkt ursprünglich bedeutet; — 2. aber auch dadurch, dass man zuerst die Summe aller ersten Einer bildet, die $= b$; dann die Summe aller zweiten Einer, die wieder $= b$ u. s. f., zuletzt die Summe aller letzten oder a-ten Einer, die abermals $= b$. Wir erhalten so eine Summe aus a Summanden, von welchen jeder $= b$, also

$$b + b + b + b + \ldots \text{ (a mal), was } = ba.$$

5. Bezeichnet c die Anzahl der in dem Produkt ab enthaltenen Einheiten, so haben wir die Gleichung

$$ab = c \quad (2)$$

Auch diese Gleichung gibt wieder zu 3 Aufgaben Veranlassung. Man kann fragen

1. nach dem Produkt c, wenn gegeben sind der Multiplikand a und der Multiplikator b. Die Bestimmung des Produktes aus den beiden Faktoren heisst Multiplikation.

2. nach dem Multiplikanden a, wenn gegeben das Produkt c und der Multiplikator b. Man findet den Multiplikanden offenbar dadurch, dass man das Produkt c in so viele gleiche Theile theilt, als der Multiplikator Einheiten enthält. Jeder Theil ist dann $=$ dem Multiplikanden a. Diese Operation heisst Theilen.

3. nach dem Multiplikator b, wenn gegeben das Produkt c und der Multiplikand a. Hiebei hat man bloss zu untersuchen, wie oftmal der Multiplikand im gegebenen Produkt als Summand enthalten sei. Diese Untersuchung wird Messen genannt.

Die Bestimmung eines Faktors aus dem Produkt und dem andern Faktor heisst Division; das gegebene Produkt wird Dividend, der gegebene Faktor Divisor, der gesuchte Faktor endlich Quotient genannt. Die Division ist ein Theilen, wenn nach dem Multiplikanden, ein Messen, wenn nach dem Multiplikator gefragt wird. Da aber $ab = ba$, so steht es beim Rechnen mit unbenannten (abstrakten) Zahlen frei, den Quotienten durch Theilung oder Messung zu bestimmen. Diese Freiheit hört aber auf, sobald man mit benannten Zahlen rechnet. Da können dann nur 2 Fälle vorkommen: Entweder sind Dividend und Divisor benannte Zahlen; alsdann ist die Division als ein Messen aufzufassen und der Quotient ist stets eine unbenannte

Zahl, z. B. 45 frcs : 9 frcs = 5, — oder der Dividend ist benannt, der Divisor unbenannt: dann kann die Division nur als ein Theilen aufgefasst werden und der Quotient ist dann stets eine benannte Zahl, z. B.:

$$45 \text{ frcs} : 9 = 5 \text{ frcs}.$$

Der Fall endlich, dass Dividend unbenannt, der Divisor aber benannt wäre, z. B.: 45 : 9 frcs — ist völlig sinnlos und kann daher nie vorkommen, weil gar keine Zahl existirt, welche, mit 9 frcs durch Multiplikation verbunden, die unbenannte Zahl 45 zum Produkt gäbe.

6. Potenzirung. Werden die Faktoren eines Produktes alle einander gleich, wie in $a . a . a . a . a$, so kann man dasselbe auf abgekürzte Weise dadurch bezeichnen, dass man den mehrmals vorkommenden Faktor a nur einmal anschreibt, rechts oben aber die Zahl 5, welche angibt, wie oftmal der Faktor im Produkt vorkommt, also $a . a . a . a . a = a^5$, was gelesen wird: a hoch 5 oder a in der fünften (Potenz).

Ein solches Produkt mehrerer gleichen Faktoren heisst Potenz; der wiederholt vorkommende Faktor wird Basis oder Grundzahl, die rechts oben stehende Zahl, welche angibt, wie oftmal die Basis als Faktor vorkommt, Exponent der Potenz genannt.

In $5^3 = 125$ ist 5 Basis, 3 Exponent und 125 die Potenz. Kommt in dem Produkt $a . a . a . a \ldots$ der Faktor a gerade b mal vor und ist c die Zahl der in a^b enthaltenen Einheiten, so haben wir die Gleichung

$$a^b = c \quad (3)$$

und auch diese Gleichung giebt zu 3 verschiedenen Aufgaben Anlass. Man kann fragen

1. nach der Potenz c, wenn gegeben sind die Basis a und der Exponent b. Die Operation, durch welche die Potenz c bestimmt wird und die nichts anderes ist als eine wiederholte Multiplikation, heisst Potenzirung.

2. nach der Basis a, wenn bekannt sind die Potenz c und der Exponent b. Die Operation, durch welche aus der Potenz und dem Exponenten die Basis bestimmt wird, heisst Wurzelausziehung und wird in unserm Fall angedeutet durch $\sqrt[b]{c}$ (gelesen: $b$te Wurzel aus c), sodass also, wenn $a^b = c$, dann

$$a = \sqrt[b]{c}.$$

Der Exponent b wird hier Wurzelindex, die unter dem Wurzelzeichen stehende Grösse aber Radikand genannt.

3. nach dem Exponenten b, wenn gegeben sind die Potenz c und die Basis a. Die Bestimmung des Exponenten aus der Potenz und der Basis heisst Logarithmirung und der gesuchte Exponent selbst wird Logarithmus der Potenz c genannt.

In der Gleichung $a^b = c$ wird dieselbe Zahl b zugleich Exponent und Logarithmus genannt, aber dabei in verschiedener Beziehung gedacht. Sie heisst Exponent gegenüber der Basis, dagegen Logarithmus gegenüber der erzeugten Potenz. So ist in der Gleichung

$$2^5 = 32$$

das 5 der Exponent von 2 und zugleich der Logarithmus von 32 in Bezug auf die Basis 2.

Während bei der Summe $a + b$ die beiden Summanden und beim Produkt ab die beiden Faktoren mit einander vertauscht werden durften, ohne eine Aenderung im Resultate hervorzubringen, ist dagegen bei der Potenz a^b eine solche Vertauschung zwischen Exponent und Basis nicht mehr gestattet. Es ist also a^b durchaus nicht gleich b^a. So ist z. B. $5^3 = 125$; dagegen $3^5 = 243$. Daher sind auch Wurzelausziehung und Logarithmirung zwei ganz verschiedene Operationen. Aus jeder der 3 Gleichungen

1. $a + b = c$
2. $ab = c$
3. $a^b = c$

resultirten 3 Aufgaben, bei welchen der Reihe nach c, a und b aus den beiden übrigen bestimmt wurden. Weil aber $a + b = b + a$ und $ab = ba$, so bildete die Bestimmung der Grössen a und b im 1sten und 2ten Fall nicht zwei wesentlich verschiedene, sondern je nur eine Operation. Es ergaben sich also aus der 1sten und 2ten Gleichung je nur 2 Operationen, während aus der 3ten Gleichung 3 verschiedene Operationen entspringen. Wir haben also im Ganzen folgende 7 Operationen:

1. Addition
2. Subtraktion } aus $a + b = c$
3. Multiplikation
4. Division } aus $ab = c$
5. Potenzirung
6. Wurzelausziehung
7. Logarithmirung } aus $a^b = c$.

Von diesen werden Addition, Multiplikation und Potenzirung direkte, die übrigen aber indirekte oder inverse Operationen genannt.

7. Ist der Multiplikator eines Produktes eine bestimmte Zahl, der Multiplikand aber ein Buchstabenausdruck, so wird jener in der Regel dem letzten als Faktor vorangeschrieben und heisst in diesem Fall Coeffizient des Ausdruckes. In $5\,a^2 b$, $\frac{3}{7}\,x^3 y$ sind also 5 und $\frac{3}{7}$ die Coeffizienten.

8. Ein Ausdruck, der entweder nur einen Buchstaben enthält, oder dann aus mehreren durch Multiplikation oder Division, nicht aber durch Addition oder Subtraktion verbundenen Buchstaben besteht, heisst Monom. Die Anzahl der darin vorkommenden Buchstabenfaktoren, die gleich ist der Summe ihrer Exponenten, heisst Grad des Monoms. Der Grad von $5\,a^4\,b^3\,c^2$ ist $= 4 + 3 + 2 = 9$. Ist das Monom gebrochen, so versteht man unter seinem Grad die Differenz zwischen dem Grad des Zählers und dem Grade des Nenners. Der Grad eines gebrochenen Monoms wird daher positiv, null oder negativ ausfallen, je nachdem der Grad des Zählers grösser, gleich oder kleiner als der Grad des Nenners ist.

Die Monome $\frac{5\,a^7\,x^4}{3\,b^2\,y^3}$, $\frac{7\,a^4\,x^5}{9\,y\,z^8}$, $\frac{3\,ab^4}{11\,x^8\,y^3}$ sind der Reihe nach vom Grade 6, 0 und — 6.

9. Wenn zwei Monome erstens aus denselben Buchstaben bestehen, wenn zweitens die gleichen Buchstaben in beiden noch überdies die nämlichen Exponenten enthalten, so heissen sie gleichartig; ungleichartig dagegen, sobald diese Bedingungen nicht erfüllt sind. So sind $\frac{7}{9}\,x^4\,y^3\,z$ und $-5\,x^4\,y^3\,z$ zwei gleichartige Monome, weil sie nicht nur dieselben Buchstaben enthalten, sondern diese Buchstabenfaktoren auch überdiess in beiden dieselben Exponenten haben. Dagegen wären $7\,a^3\,b^5\,c^2$ und $8\,a^2\,b^5\,c^3$ schon ungleichartig; es kommen zwar in beiden noch dieselben Buchstabenfaktoren und sogar die gleichen Exponenten vor, aber die gleichen Buchstaben haben nicht in beiden die nämlichen Exponenten; ebenso wären ungleichartig $11\,x^5\,y^4$ und $-\,13\,x^2\,z^5$.

10. Jeder Ausdruck, der aus zwei oder mehreren durch + oder — verbundenen Theilen besteht, heisst ein Polynom; die einzelnen Theile werden die Glieder des Polynoms genannt und sind nichts anderes als Monome. Es heisst speciell Binom, wenn es aus zwei, Trinom, wenn es aus 3 Gliedern besteht.

Sind alle Glieder eines Polynoms vom gleichen Grade, so heisst das Polynom homogen; so ist $a^4 - 7a^3b + 5a^2b^2 - 3ab^3 + b^4$ ein homogenes Polynom vom vierten Grade.

Erster Abschnitt.

Von den negativen Grössen.

---

11. Bei der aus $a + b = c$ abgeleiteten Gleichung $a = c - b$ bleibt die Differenz a so lange eine pos. ganze Zahl, als die 2te Gleichung wirklich aus der 1sten abgeleitet gedacht wird. Hebt man aber diese Beschränkung auf, die nichts andres sagt, als dass c stets durch Addition der beiden Zahlen a und b entstanden, folglich b kleiner sei als c, so kann uns die Subtraktion auf eine neue Zahlform, die negative Zahl, führen. Haben wir nämlich von einer kleinern Zahl eine grössere zu subtrahiren, so denken wir uns den Subtrahenden in 2 Theile zerlegt, deren einer gleich ist dem Minuenden, der andere aber gleich dem Ueberschuss des Subtrahenden über den Minuenden. Wir können alsdann nur den ersten Theil vom Minuenden wegnehmen und es bleibt der 2te Theil als eine noch zu subtrahirende Grösse übrig. So wenn wir z. B. von 12 zu subtrahiren haben 19, so sagen wir: $19 = 12 + 7$. Wir können also von 12 successive erst 12 und dann noch 7 wegnehmen. Allein $12 - 12 = 0$ und es bleiben uns somit noch 7 zu subtrahirende Einheiten übrig. Um nun anzudeuten, dass die Differenz 7 eine subtraktive Grösse sei, setzen wir vor dieselbe das Minuszeichen und schreiben demnach

$$12 - 19 = -7.$$

Wir nennen nun solche mit dem Minuszeichen versehene und desshalb als subtraktiv zu betrachtende Zahlen negative Grössen, und im Gegensatz zu diesen heissen die übrigen positive Grössen und werden etwa auch mit dem Vorzeichen + versehen. Unter dem absoluten Werth einer positiven oder negativen Zahl versteht man ihren Zahlwerth, abgesehen vom Vorzeichen. So ist der absolute Werth von -35 gleich 35, der von $+40$ gleich 40. Von den beiden Zahlen -57 und $+49$ wird daher -57 dem absoluten Werth nach die grössere sein.

Grössen mit gleichen Vorzeichen, wie positive und positive oder negative und negative, heissen gleichnamige, solche mit ungleichen Vorzeicheu aber entgegengesetzte Grössen.

Es folgt unmittelbar aus der Entstehung negativer Zahlen, dass entgegengesetzte Grössen, die dem absoluten Werthe nach einander gleich sind, bei ihrer Addition sich gegenseitig aufheben. So ist $(+13)+(-13)=13-13=0$. Wir können daher die Definition entgegengesetzter Grössen auch so fassen: Entgegengesetzte Grössen sind solche, die, wenn sie dem absoluten Werthe nach gleich sind und durch Addition verbunden werden, sich gegenseitig zu Null aufheben.

Um die Vorzeichen positiver und negativer Zahlen nicht mit den Operationszeichen zu verwechseln, setzen wir positive und negative Zahlen mit ihren Vorzeichen vorläufig in Klammern.

Wir gehen nun zur Rechnung mit positiven und negativen Zahlen über.

12. Addition. Hier behandeln wir nacheinander:

a. Addition zweier gleichnamigen,
b. Addition zweier entgegengesetzten Grössen,
c. Addition mehrerer theils positiver, theils negativer Zahlen.

a. Addition gleichnamiger Grössen.

1. $(+25)+(+16)=+41$.
2. $(-25)+(-16)=-41$.

Ad 1. Im ersten Summanden' $+25$ kommt die positive Einheit 25 mal, im 2ten Summanden $+16$ aber 16 mal, folglich in beiden Summanden zusammen $25+16=41$ mal vor; die Summe ist also $=+41$.

Ad 2. Ganz analog.

In beiden Fällen ist der absolute Werth des Resultates gleich der Summe der absoluten Werthe der beiden Summanden und das Vorzeichen desselben ist das den beiden Summanden gemeinschaftliche Zeichen. Daher der Satz: Gleichnamige Grössen werden addirt, indem man ihre absoluten Werthe addirt und der Summe das allen gemeinschaftliche Vorzeichen gibt.

b. Addition entgengesetzter Grössen.

1. $(+35)+(-23)=?$

Es ist $+35 = (+23) + (+12)$

$\underline{-23 = -23}$

Daher $(+35) + (-23) = (+23) + (-23) + (+12) = +12$,

weil $(+23) + (-23) = 0$ nach Definition.

2. $(-35) + (-23) = ?$

Es ist $-35 = (-23) + (-12)$

$\underline{+23 = +23}$

somit $(-35) + (+23) = (-23) + (+23) + (-12) = -12$.

Vergleichen wir in beiden Fällen das Resultat mit den beiden Summanden, so erkennen wir, dass der absolute Werth desselben gleich der Differenz der absoluten Werthe der beiden Summanden ist und stets das Vorzeichen des grössern Summanden trägt.

Daher der Satz:

Entgegengesetzte Grössen werden addirt, wenn man den absoluten Werth des kleinern Summanden vom absoluten Werth des grössern subtrahirt und dem Rest das Vorzeichen des grössern Summanden gibt.

c. Addition mehrerer theils positiver, theils negativer Zahlen.

Hat man mehrere positive und negative Grössen zu addiren, so kann man hiebei auf doppelte Weise verfahren:

Man kann entweder die positiven Grössen besonders addiren, ebenso die negativen, und dann die beiden Summen noch zusammenziehen. Man erhält hiebei zwei Additionen gleichnamiger und eine Addition entgegengesetzter Grössen.

Oder man addirt zum ersten Summanden den 2ten, zur Summe den 3ten, zur neuen Summe den 4ten u. s. f., bis man den letzten Summanden addirt hat. Man erhält hiebei so viele Additionen als Summanden vorkommen, weniger eine; also bei n Summanden $n - 1$ Additionen.

Beispiel:

$$(+20) + (-35) + (-40) + (+81) + (-56) + (+92) = ?$$

Erste Art:

$+20$	-35
$+81$	-40
$+92$	-56
$+193$	-131

Also Summe $= (+193) + (-131) = +62$.

Zweite Art. $(+20) + (-35) = -15$

$(-15) + (-40) = -55$

$(-55) + (+81) = +26$

$$(+26) + (-56) = -30$$
$$(-30) + (+92) = +62, \text{ wie oben.}$$

Zur Uebung:

1. $(+27) + (-39) + (+218) + (-48) + (+59) + (-186) + (-42) + (+512) = ?$
2. $(-618) + (+209) + (+34) + (-304) + (+729) + (-469) + (-469) + (+57) + (-278) = ?$

13. Subtraktion. Wir stützen uns hiebei auf den in No. 2 entwickelten Begriff der Subtraktion und erinnern uns, dass wir die Differenz auf doppelte Weise bilden können: entweder dadurch, dass wir vom Minuenden successive so viele Einheiten wegnehmen, als der Subtrahend enthält, oder dann dadurch, dass wir zum Subtrahenden so viele Einheiten addiren, dass wir schliesslich als Summe den Minuenden bekommen.

Hinsichtlich des Vorzeichens sind 4 Fälle zu unterscheiden:

1. Minuend und Subtrahend positiv.
2. Minuend positiv und Subtrahend negativ.
3. Minuend negativ und Subtrahend positiv.
4. Minuend und Subtrahend negativ.

In jedem dieser Fälle kann dann α. der Minuend, β. der Subtrahend dem absoluten Werthe nach grösser sein.

1. Fall. α. $(+15) - (+7) = +8$.
β. $(+7) - (+15) = -8$.

Erklärung von α, wie in der Arithmetik.

Erklärung von β entweder wie in No. 11 bei Entstehung der negativen Zahlen, oder dann in folgender Weise: Wir sollen eine Zahl suchen, welche, zu $+15$ addirt, $+7$ zur Summe gibt. Die Differenz kann zunächst einmal jedenfalls nicht positiv sein, weil, wenn wir zum Subtrahenden $+15$ noch mehr positive Einheiten addiren, wir eine immer grössere positive Zahl, nie aber den Minuenden $+7$ als Summe erhalten. Die Differenz muss daher jedenfalls negativ sein. Addiren wir nun zu $+15$ successive negative Einheiten, so wird durch jede negative Einheit, die wir addiren, eine positive Einheit vom Subtrahenden $+15$ aufgehoben, und wenn wir im Ganzen 8 negative Einheiten zum Subtrahenden $+15$ addirt haben, so bleiben noch $+7$ als Summe übrig; die Differenz ist also $= -8$. Und in der That ist $(-8) + (+15) = +7$.

2. Fall. α. $(+15) - (-7) = +22$.
β. $(+7) - (-15) = +22$.

Ad α. Wir finden zunächst wieder, dass die Differenz jedenfalls positiv sein muss. Addiren wir nun zum Subtrahenden -7 sein Entgegengesetztes $+7$, so erhalten wir Null. Zu Null müssen wir noch 15 positive Einheiten addiren, um $+15$ zu bekommen. Im Ganzen haben wir also zum Subtrahenden -7 zunächst 7 und dann noch 15 positive Einheiten addiren müssen, um den Minuenden zu bekommen. Die Differenz ist somit $= (+7)+(+15) = +22$. Und in der That ist $(+22)+(-7) = +15$. Ebenso β.

3. Fall. α. $(-15)-(+7) = -22$.
β. $(-7)-(+15) = -22$.

Die Erklärung von α und β der vorigen ganz analog.

4. Fall. α. $(-15)-(-7) = -8$.
β. $(-7)-(-15) = +8$.

Der Fall α ist ohne Weiteres klar.

Ad β. Wir haben eine Grösse zu suchen, die, zu -15 addirt, -7 als Summe gibt. Diese Differenz kann jedenfalls zunächst nicht negativ sein; denn wenn wir zu -15 noch mehr negative Einheiten addiren, so erhalten wir eine immer grössere negative Zahl und nie -7.

Wir addiren also zu -15 positive Einheiten, so wird durch jede hinzukommende positive Einheit eine negative aufgehoben und wenn wir 8 positive Einheiten addirt haben, so bekommen wir als Resultat -7; also ist die Differenz $= +8$.

In allen diesen Fällen könnten wir die Differenz stets dadurch finden, dass wir zum Subtrahenden zuerst sein Entgegengesetztes addiren, wodurch wir Null bekommen, und dann hiezu noch den Minuenden. Die Differenz kann daher immer angesehen werden als bestehend aus zwei Theilen:

1. dem Entgegengesetzten des Subtrahenden,
2. aus dem Minuenden,

woraus folgt:

Eine beliebige positive oder negative Grösse wird von einer andern subtrahirt, indem man sie mit entgegengesetztem Vorzeichen zu dieser addirt.

14. Multiplikation. Erweiterung dieses Begriffes. Nach dem in der Einleitung entwickelten Begriff des Produktes als einer Summe von mehreren gleichen Summanden wird das Produkt aus dem Multiplikanden stets dadurch gebildet, dass man diesen so oftmal als Summand setzt, als der Multiplikator

Einheiten enthält. Diese Definition — wörtlich genommen — reicht aber nicht mehr aus, sobald der Multiplikator aus der Reihe der positiven ganzen Zahlen heraustritt. Es ist jedoch sehr leicht, ihr eine Fassung zu geben, die auch für die übrigen Fälle passt. Schon wenn der Multiplikator eine ganze Zahl, z. B. 7, ist, entsteht das Produkt aus dem Multiplikanden so, wie der Multiplikator 7 aus der positiven Einheit. Dieser entsteht durch 7 maliges Setzen der positiven Einheit; das Produkt durch 7 maliges Setzen des Multiplikanden. Wenn wir nun von dem wiederholten Setzen abstrahiren und bloss an dem allgemeinern Merkmal festhalten, dass das Produkt aus dem Multiplikanden in der gleichen Weise abgeleitet wird, wie der Multiplikator aus der positiven Einheit, so haben wir eine Definition, die nicht mehr bloss für den Fall eines positiven ganzzahligen Multiplikators, sondern für einen beliebigen positiven oder negativen, ganzen oder gebrochenen Multiplikator gilt. Der Multiplikand kann dabei, wie schon früher, sein, was er will.

Wir haben auch bei der Multiplikation positiver und negativer Zahlen 4 Fälle zu unterscheiden, welche, wenn 9 und 5 die absoluten Werthe von Multiplikand und Multiplikator bedeuten, folgende sind:

1. $(+ 9) \times (+ 5) = + 45$
2. $(- 9) \times (+ 5) = - 45$
3. $(+ 9) \times (- 5) = - 45$
4. $(- 9) \times (- 5) = + 45$.

Im 1sten Fall haben wir eine Summe zu bilden aus 5 Summanden, jeder $= + 9$, diese ist $=$

$$(+ 9) + (+ 9) + (+ 9) + (+ 9) + (+ 9) = + 45.$$

Im 2ten Fall muss wieder eine Summe gebildet werden aus 5 Summanden, jeder $= - 9$; eine solche Summe ist $=$
$(- 9) + (- 9) + (- 9) + (- 9) + (- 9) = - 45$ nach No. 12.

Im 3ten Falle müssen wir das Produkt aus dem Multiplikanden $+ 9$ so bilden, wie der Multiplikator $- 5$ aus der positiven Einheit abgeleitet wird. Dieser kann aber aus der positiven Einheit dadurch abgeleitet werden, dass man diese erst fünfmal zu sich selbst addirt und dann von dem Resultat $+ 5$ noch das Entgegengesetzte nimmt — oder dann, indem man zuerst von der positiven Einheit das Entgegengesetzte nimmt und das Resultat noch 5 mal zu sich selbst addirt. Wenn wir auf die erste Art das Produkt bilden wollen, so müssen wir den Multiplikanden erst 5 mal

zu sich selbst addiren, wodurch wir $+45$ erhalten, und dann von diesem Resultat noch das Entgegengesetzte nehmen, was $= -45$. Wollen wir aber analog der zweiten Art das Produkt bilden, so müssen wir zuerst von dem Multiplikanden $+9$ das Entgegengesetzte nehmen, was $= -9$, und dann dieses Resultat noch 5 mal zu sich selbst addiren, wodurch wir wieder -45 bekommen, wie vorhin.

Im 4ten Fall endlich haben wir aus dem Multiplikanden -9 das Produkt so entstehen zu lassen, wie der Multiplikator -5 aus der positiven Einheit abgeleitet werden kann. Wir können daher entweder den Multiplikanden -9 zuerst 5 mal zu sich selbst addiren, wodurch wir -45 bekommen und hievon noch das Entgegengesetzte nehmen, was $= +45$; — oder wir nehmen zuerst vom Multiplikanden -9 das Entgegengesetzte, was $= +9$, und addiren das Resultat noch 5 mal zu sich selbst, was wieder $+45$ gibt.

Vergleichen wir in allen diesen Fällen das Produkt mit den beiden Faktoren, so stellt sich heraus, dass da, wo beide Faktoren das nämliche Vorzeichen haben, das Produkt *positiv* ausfällt (1. und 4. Fall); *negativ* dagegen da, wo die beiden Faktoren entgegengesetzte Vorzeichen haben, wie im 2ten und 3ten Fall.

Daher die Regel:

Faktoren mit gleichen Vorzeichen geben ein positives, Faktoren mit ungleichen Vorzeichen aber ein negatives Produkt.

Diese Zeichenregel gilt jedoch nur für ein Produkt aus bloss *zwei* Faktoren. Sind der Faktoren mehrere, so hängt das Vorzeichen des Produktes von der Anzahl der negativen Faktoren ab und zwar in der Art, dass das Produkt stets *positiv* ausfällt, wenn die Anzahl der negativen Faktoren *gerade* ist, *negativ* dagegen, sobald die Anzahl der negativen Faktoren *ungerade* ist.

Es folgt das unmittelbar aus dem obigen Satze. Es ist z. B.

1. $(+12).(-5) = -12.5$
2. $(+12).(-5).(-7) = (-12.5).(-7) = +12.5.7$
3. $(+12).(-5).(-7).(-13) = (+12.5.7).(-13) = -12.5.7.13$
4. $(+12).(-5).(-7).(-13).(-9) =$
   $(-12.5.7.13).(-9) = +12.5.7.13.9$
5. $(+12).(-5).(-7).(-13).(-9).(-8) =$
   $(+12.5.7.13.9).(-8) = -12.5.7.13.9.8$

u. s. f., woraus man sofort erkennt, dass wenn die Anzahl der negativen Faktoren 1, 3, 5, überhaupt eine *ungerade* ist, das

Produkt negativ wird, positiv dagegen, wenn die Anzahl der negativen Faktoren 2, 4, 6 etc. d. h. allgemein eine gerade ist.

15. Division. Hiebei wird stets eine Grösse (Quotient) gesucht, welche mit dem Divisor durch Multiplikation verbunden, zum Produkt den Dividenden gibt. Sind 45 und 9 die absoluten Werthe von Dividend und Divisor, so sind wieder folgende 4 Fälle möglich:

1. $(+45):(+9) = +5$
2. $(+45):(-9) = -5$
3. $(-45):(+9) = -5$
4. $(-45):(-9) = +5.$

Erklärung. Abgesehen vom Vorzeichen ist der Quotient offenbar $= 5$; es frägt sich nur: wann $+5$ und wann -5? Im ersten und zweiten Fall ist der Dividend positiv; also muss auch das Produkt aus dem Divisor in den Quotienten positiv ausfallen, was nur möglich ist, wenn der Quotient das nämliche Vorzeichen hat, wie der Divisor; der Quotient muss daher im ersten Fall positiv, $= +5$, im zweiten aber negativ, $= -5$ sein. Im dritten und vierten Fall aber ist der Dividend negativ; daher muss auch das Produkt aus dem Divisor in den Quotienten negativ werden, und das ist nur möglich, wenn der Quotient das entgegengetetzte Vorzeichen des Divisors erhält; er wird daher im dritten Fall, wo der Divisor positiv ist, negativ, im vierten aber, wo der Divisor negativ ist, positiv ausfallen. Daher die Regel: Ist der Dividend positiv, so bekommt der Quotient das Vorzeichen des Divisors; ist der Dividend aber negativ, so bekommt der Quotient ein dem Zeichen des Divisors entgegengesetztes Vorzeichen; — oder dann:

Haben Dividend und Divisor gleiche Vorzeichen, so wird der Quotient positiv; haben sie dagegen entgegngesetzte Vorzeichen, so wird der Quotient negativ.

16. Satz: Die negativen Zahlen können angesehen werden als kleiner als Null und zwar als um so kleiner, je grösser sie ihrem absoluten Werthe nach sind.

$5 - 1 = 4$	Wenn wir von einer beliebigen Zahl, z. B.
$5 - 2 = 3$	von 5, successive 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc. sub-
$5 - 3 = 2$	trahiren, so ist klar, dass jeder folgende Rest
$5 - 4 = 1$	um 1 kleiner als der vorhergehende sein

$5 - 5 = 0$ muss. In dieser Reihe immer kleiner wer-
$5 - 6 = -1$ dender Reste kommen die negativen Zahlen
$5 - 7 = -2$ nach der Null; sie sind daher anzusehen
$5 - 8 = -3$ als kleiner denn Null; es nehmen ferner
$5 - 9 = -4$ unter den successive kleiner werdenden negativen Resten die absoluten Werthe stets zu; es ist daher von zwei negativen Zahlen diejenige als die kleinere anzusehen, welche den grösseren absoluten Werth hat.

Zweiter Abschnitt.

Die vier ersten Operationen mit Monomen und Polynomen.

---

17. Lehrsatz. *Man kann bei einem Polynom die Reihenfolge der Glieder beliebig abändern, ohne den Werth des Polynoms zu stören.*

Der Werth eines Polynoms wird gefunden, wenn man die positiven Glieder besonders addirt, ebenso die negativen und dann diese beiden entgegengesetzten Summen noch mit einander verbindet. Er ist also gleich dem Ueberschuss der Summe der positiven Glieder über die Summe der negativen oder umgekehrt. Gesetzt z. B. die Summe der positiven Glieder sei um m grösser als die der negativen, so wäre der Werth des Polynoms $= + m$. Aendern wir nun die Reihenfolge der Glieder beliebig ab, so bleiben die früher positiven Glieder positiv, die negativen bleiben negativ. Es wird daher auch jetzt noch der Ueberschuss der Summe der positiven Glieder über die Summe der negativen $+ m$ und somit der Werth des Polynoms noch $+ m$ sein.

18. Lehrsatz. *Aendert man bei einem Polynom die Vorzeichen sämmtlicher Glieder, so ändert der Werth des Polynoms nur sein Vorzeichen, nicht aber seine absolute Grösse.*

Beweis. Sei wieder $+ m$ der Ueberschuss der Summe der positiven Glieder über die Summe der negativen, d. h. der Werth unsers Polynoms. Wenn man nun die Vorzeichen aller Glieder ändert, so werden die früher positiven Glieder negativ und die früher negativen Glieder werden positiv. Wenn also vorher die Summe der positiven Glieder um m grösser war als die Summe

der negativen, so wird jetzt die Summe der negativen Glieder die der positiven um m Einheiten überragen, somit der Werth des Polynoms $= -m$ sein.

Beispiel. Sei $5a - 2b + 3c + 4d - 2e$ unser Polynom, so ist nachzuweisen, dass das durch Aenderung der Vorzeichen aller Glieder daraus abgeleitete Polynom $-5a + 2b - 3c - 4d + 2e$ einen Werth habe, der dem vorigen entgegengesetzt sei.

In der That findet man z. B. für $a = 10$, $b = 4$, $c = 8$, $d = 12$ und $e = 15$:

$$5a - 2b + 3c + 4d - 2e = 50 - 8 + 24 + 48 - 30 = 122 - 38 = +84.$$

$$-5a + 2b - 3c - 4d + 2e = -50 + 8 - 24 - 48 + 30 = -122 + 38 = -84.$$

19. Addition. Wir unterscheiden hier

a. Addition gleichartiger Monome,
b. Addition ungleichartiger Monome,
c. Addition eines Polynoms zu einer beliebigen Grösse.

a. Addition gleichartiger Monome.

Wenn $5a^2b$ und $3a^2b$ die absoluten Werthe der beiden Monome, so sind folgende 4 Fälle möglich:

1. $(+5a^2b) + (+3a^2b) = +8a^2b$
2. $(+5a^2b) + (-3a^2b) = +2a^2b$
3. $(-5a^2b) + (+3a^2b) = -2a^2b$
4. $(-5a^2b) + (-3a^2b) = -8a^2b$

Der 1ste und 4te Fall sind ohne weiter klar; denn der 1ste Summand $-5a^2b$ bedeutet eine Summe aus 5 Summanden, jeder $= -a^2b$; der 2te Summand $-3a^2b$ bedeutet eine Summe aus 3 Summanden, jeder $= -a^2b$; in beiden Summanden zusammen kommt somit die Grösse $-a^2b$ 5 mehr 3 mal = 8 mal vor; die Summe ist daher $= -8a^2b$.

Betrachten wir den 2ten Fall, so ist

$$+5a^2b = (+a^2b) + (+a^2b) + (+a^2b) + (+a^2b) + (+a^2b)$$
$$-3a^2b = (-a^2b) + (-a^2b) + (-a^2b)$$

Wenn wir nun addiren, so werden 3 Summanden, jeder $= +a^2b$, aufgehoben von den 3 Summanden, jeder $= -a^2b$, und es bleiben nur noch 2 Summanden, jeder $= +a^2b$; die Summe ist daher $= +2a^2b$.

Im 3ten Fall haben wir analog:

$$-5a^2b = (-a^2b) + (-a^2b) + (-a^2b) + (-a^2b) + (-a^2b)$$
$$+3a^2b = (+a^2b) + (+a^2b) + (+a^2b)$$

Nun werden 3 Summanden, jeder $= - a^2 b$, aufgehoben von den 3 Summanden, jeder $= + a^2 b$ und es bleiben daher noch 2 Summanden, jeder $= - a^2 b$; somit ist hier die Summe $= - 2a^2 b$.

Wenn wir in allen diesen Fällen das Resultat mit den beiden Summanden vergleichen, so stellt sich heraus, dass wir als Summe der beiden gleichartigen Monome immer wieder ein Monom von der nämlichen Art erhalten, dessen Coeffizient gleich ist der Summe der Coeffizienten der beiden Summanden. Wir haben daher den Satz:

Gleichartige Monome werden addirt, indem man ihre Coeffizienten addirt und die Summe als Coeffizient des nämlichen Ausdruckes beibehält.

b. Addition ungleichartiger Monome.

Wenn a und b die absoluten Werthe der beiden Monome darstellen, so sind folgende 4 Fälle möglich:

1. $(+ a) + (+ b)$
2. $(+ a) + (- b)$
3. $(- a) + (+ b)$
4. $(- a) + (- b)$

So lange hier an die Stelle der Buchstaben nicht spezielle Zahlwerthe gesetzt werden, lassen sich die beiden Monome nicht, wie im vorigen Fall, in ein einziges zusammenziehen. Die Summe beider wird daher jedes Monom einzeln enthalten müssen. Dagegen lässt sich die Darstellung noch etwas vereinfachen. Vorerst können wir die Klammern weglassen, welche bloss dazu dienen, die Vorzeichen von den Operationszeichen zu unterscheiden; ferner können wir das Vorzeichen $+$ überall weglassen, weil eine ohne Vorzeichen stehende Grösse immer als positiv angesehen wird.

Wir bekommen so zunächst:

1. $(+ a) + (+ b) = a + b$
2. $(+ a) + (- b) = a + - b$
3. $(- a) + (+ b) = - a + b$
4. $(- a) + (- b) = - a + - b$.

Die rechten Seiten von (1) und (3) lassen sich nicht mehr einfacher schreiben; dagegen kommt in (2) und (4) noch ein doppeltes Vorzeichen vor. Nun wissen wir, dass b negative Einheiten zu einer Grösse addiren ganz dasselbe ist, wie b positive Einheiten von derselben subtrahiren. Daher wird $a + - b = a - b$ und ebenso $- a + - b = - a - b$ sein, so dass wir also nach aller möglichen Vereinfachung haben:

$$1.\ (+a) + (+b) = a + b$$
$$2.\ (+a) + (-b) = a - b$$
$$3.\ (-a) + (+b) = -a + b$$
$$4.\ (-a) + (-b) = -a - b.$$

Die Vergleichung dieser Resultate mit den beiden Summanden zeigt, dass die Summe zweier Monome stets ein Binom ist, bestehend aus dem 1sten und dann aus dem mit unverändertem Zeichen hinter das erste gesetzten zweiten Monom. Daher der Satz:

Ein Monom wird zu einem andern addirt, indem man es mit unverändertem Zeichen hinter das erste Monom setzt.

c. Addition eines Polynoms zu einer beliebigen Grösse (Monom oder Polynom).

$$A + (b + c - d) = ?$$

Das Polynom $b + c - d$ entsteht, wenn man die Einheit b mal nimmt, zum Resultat das c fache derselben addirt und endlich von der Summe noch d Einheiten abzieht. Wir werden daher auch das Polynom $b + c - d$ zu einer beliebigen Grösse A addiren, wenn wir zu A erst b Einheiten hinzufügen, das Resultat um c vermehren und von dem Ergebniss noch d Einheiten subtrahiren. Wir bekommen so successive

$$A + b$$
$$A + b + c$$
$$A + b + c - d.$$

Somit ist $A + (b + c - d) = A + b + c - d.$

Die Summe der beiden Grössen A und $b + c - d$ besteht demnach 1. aus der Grösse A, 2. aus den mit unverändertem Zeichen genommenen Gliedern des Polynoms $b + c - d$.

Daher der Satz:

Ein Polynom wird zu einer beliebigen Grösse addirt, indem man die Glieder desselben mit unveränderten Zeichen hinter die erste Grösse setzt.

Ist A selber ein Polynom, so enthält die Summe der beiden Polynome zunächst so viele Glieder, als die beiden Polynome zusammen Glieder enthalten. So wäre

$$(5a - 2b + 3c) + (3a + 5b - 4c) = 5a - 2b + 3c + 3a + 5b - 4c.$$

Wenn nun, wie hier, die beiden Polynome gleichartige Glieder enthalten, so lässt sich die Summe derselben auf eine kleinere Anzahl von Gliedern reduziren, indem man die gleichartigen Glieder zusammenzieht. Es ist nämlich zunächst

$5a - 2b + 3c + 3a + 5b - 4c = 5a + 3a - 2b + 5b + 3c - 4c.$

Allein $5a + 3a = 8a$

$-2b + 5b = 3b$

$3c - 4c = -c$

Somit $(5a - 2b + 3c) + (2a + 5b - 4c) = 8a + 3b - c.$

Gewöhnlich nimmt man die Reduktion der gleichnamigen Glieder gleich von Anfang vor, ohne vorerst die Glieder der Polynome mit unverändertem Zeichen hintereinander zu setzen. Zu dem Ende schreibt man die zu addirenden Polynome so untereinander, dass die gleichartigen Glieder untereinander zu stehen kommen und addirt dann nach der oben abgeleiteten Regel.

Beispiel: $(3a - 5b + 2c + d) + (4a + 8b - 5c) = ?$

Ausführung:

$$\begin{array}{r} 3a - 5b + 2c + d \\ 4a + 8b - 5c \\ \hline \text{Summe: } 7a + 3b - 3c + d \end{array}$$

Verifikation für $a = 10$, $b = 4$, $c = 12$ und $d = 20$.

Wir können die Richtigkeit der Lösung dadurch prüfen, dass wir für diese speziellen Zahlenwerthe jeden einzelnen Summanden ausrechnen, dann deren Summe bestimmen und nachsehen, ob das so erhaltene Resultat übereinstimmt mit dem Werth, welchen die Summe $7a + 3b - 3c + d$ für diese speziellen Zahlwerthe annimmt. Man findet:

1. $3a - 5b + 2c + d = 30 - 20 + 24 + 20 = 74 - 20 = 54$
2. $4a + 8b - 5c \quad = 40 + 32 - 60 \quad = 72 - 60 = 12$

Summe beider $= 66$

Allein es ist auch

$$7a + 3b - 3c + d = 70 + 12 - 36 + 20 = 102 - 36 = 66.$$

20. Subtraktion. Wir unterscheiden hier wieder

a. Subtraktion gleichartiger Monome,

b. Subtraktion ungleichartiger Monome,

c. Subtraktion eines Polynoms von einer beliebigen Grösse.

a. Subtraktion gleichartiger Monome.

Es sind dabei hinsichtlich der Vorzeichen wieder folgende 4 Fälle möglich:

1. $(+ 5a^2b) - (+ 3a^2b) = + 2a^2b$
2. $(+ 5a^2b) - (- 3a^2b) = + 8a^2b$
3. $(- 5a^2b) - (+ 3a^2b) = - 8a^2b$
4. $(- 5a^2b) - (- 3a^2b) = - 2a^2b$

Fall 1. und 4. sind ohne Weiteres klar; denn offenbar muss man zu $+3a^2b$ noch $+2a^2b$ addiren, um $+5a^2b$ zu erhalten, zu $-3a^2b$ dagegen noch $-2a^2b$, um $-5a^2b$ zu bekommen. Bei (2) und (3) addiren wir zum Subtrahenden erst sein Entgegengesetztes, dann bekommen wir Null; hiezu noch den Minuenden. So erhalten wir als Differenz im 2ten Fall $+8a^2b$ und im 3ten $-8a^2b$.

In allen 4 Fällen ist die Differenz der gleichartigen Monome wieder ein Monom derselben Art, dessen Coeffizient gerade die Differenz ist zwischen dem Coeffizienten des Minuenden und dem des Subtrahenden. (Es ist $+2$ die Differenz zwischen den Coeffizienten $+5$ und $+3$, $+8$ die Differenz zwischen den Coeffizienten $+5$ und -3 u. s. f.) Daraus ergiebt sich der Satz:

Gleichartige Monome werden subtrahirt, indem man den Coeffizienten des Subtrahenden von dem des Minuenden subtrahirt und die Differenz als Coeffizient des nämlichen Buchstabenausdruckes beibehält.

b. Subtraktion ungleichartiger Monome.

Wenn wieder a und b die absoluten Werthe der beiden Monome vorstellen, so haben wir folgende 4 Fälle:

1. $(+a)-(+b)$
2. $(+a)-(-b)$
3. $(-a)-(+b)$
4. $(-a)-(-b)$

Wir haben hier stets eine Grösse zu suchen, welche, zu dem Subtrahenden addirt, den Minuenden gibt. Daher addiren wir zum Subtrahenden zunächst sein Entgegengesetztes und hiezu noch den Minuenden. So bekommen wir:

$$(+a)-(+b)=\quad a-b$$
$$(+a)-(-b)=\quad a+b$$
$$(-a)-(+b)=-a-b$$
$$(-a)-(-b)=-a-b$$

woraus sich ergibt, dass ein Monom von einem andern subtrahirt wird, indem man es mit verändertem Zeichen hinter das erste setzt.

c. Subtraktion eines Polynoms von einer beliebigen Grösse.

$$A-(b-c+d)=?$$

Wir haben eine Grösse zu suchen, welche, zu $b-c+d$ addirt, den Minuenden A gibt. Addiren wir zu $b-c+d$ zunächst

$b + c - d$, so bekommen wir Null; dazu noch A, dann haben wir den Minuenden. Somit ist $A - b + c - d$ die Differenz. Sie besteht 1. aus dem Minuenden und 2. aus den mit entgegengesetzten Vorzeichen genommenen Gliedern des Subtrahenden. Daher der Satz:

Ein Polynom wird von einer beliebigen Grösse subtrahirt, indem man die Glieder desselben mit veränderten Vorzeichen hinter die erste Grösse setzt.

Ist hiebei A selbst ein Polynom, so erhalten wir als Differenz der beiden Polynome zunächst ein Polynom von so vielen Gliedern, als die beiden Polynome zusammen Glieder enthalten. Wenn dann im Resultat noch gleichartige Glieder vorkommen, so lässt sich dasselbe auf eine kleinere Anzahl von Gliedern reduziren, z. B.:

$$(5a - 7b + 12c - d) - (3a + 5b - 8c + 4d) =$$
$$5a - 7b + 12c - d - 3a - 5b + 8c - 4d$$
$$= 5a - 3a - 7b - 5b + 12c + 8c - d - 4d$$
$$= 2a - 12b + 20c - 5d.$$

Behufs Reduktion der gleichartigen Glieder würde man auch bei der Subtraktion die Glieder der Subtrahenden unter die ihnen gleichartigen Glieder des Minuenden setzen; also

$$\begin{array}{rrrr} 5a & -\ 7b & +\ 12c & -\ d \\ 3a & +\ 5b & -\ 8c & +\ 4d \\ - & - & + & - \\ \hline 2a & -12b & +\ 20c & -\ 5d \end{array}$$

Hat man endlich mehrere Polynome theils durch Addition, theils durch Subtraktion mit einander zu verbinden, so schreibt man wieder die Polynome mit ihren gleichartigen Gliedern unter einander und zwar die zu addirenden mit unveränderten, die zu subtrahirenden mit veränderten Zeichen aller ihrer Glieder und bildet die Summe der so erhaltenen Ausdrücke.

Beispiel: $(5a^2 - 3ab + 2c^2 + 4cd) - (3a^2 - 5c^2 - 2ab + 5cd) + (6a^2 - 7ab + 3c^2 + 4cd) - (a^2 + 3ab - 4c^2 + cd) = ?$

$$\begin{array}{rrrrr} & 5a^2 & -\ 3ab & +\ 2c^2 & +\ 4cd \\ - & 3a^2 & +\ 2ab & +\ 5c^2 & -\ 5cd \\ + & 6a^2 & -\ 7ab & +\ 3c^2 & +\ 4cd \\ - & a^2 & -\ 3ab & +\ 4c^2 & -\ cd \\ \hline \text{Summe:} & 7a^2 & -11ab & +14c^2 & +\ 2cd \end{array}$$

Verifikation für $a = 10$

$b = 1$

$c = 2$

$d = 3.$

$$\begin{array}{rcl}
5a^2 - 3ab + 2c^2 + 4cd &=& 500 - 30 + 8 + 24 = +502 \\
-3a^2 + 2ab + 5c^2 - 5cd &=& -300 + 20 + 20 - 30 = -290 \\
6a^2 - 7ab + 3c^2 + 4cd &=& 600 - 70 + 12 + 24 = +566 \\
-a^2 - 3ab + 4c^2 - cd &=& -100 - 30 + 16 - 6 = -120 \\
\hline
\text{Summe} = 502 + 566 - 290 - 120 &=& 1068 - 410 = +658
\end{array}$$

Es ist aber auch

$$7a^2 - 11ab + 14c^2 + 2cd = 700 - 110 + 56 + 12 = 768 - 110 = +658,$$

wie oben.

21. Diese für die Addition und Subtraktion unter der Voraussetzung, dass die Buchstaben an sich positive Zahlen bedeuten, aufgestellten Sätze gelten unverändert, auch wenn die Buchstaben an sich negative Zahlen vorstellen; denn auch da reduzirt sich jedes Monom auf eine positive oder negative Zahl, so dass durch die Substitution an sich negativer Zahlen an die Stelle der einzelnen Buchstaben durchaus keine neuen Fälle entstehen. Uebrigens ist es sehr leicht, in jedem besondern Fall nachzuweisen, dass wenn man in dem Endresultat an die Stelle der einzelnen Buchstaben negative Zahlwerthe einsetzt, man ganz dasselbe Resultat erhält, wie wenn man gleich Anfangs diese negativen Werthe einsetzt und dann die angedeuteten Operationen ausführt. So fanden wir z. B.: $(-a) - (+b) = -a - b$.

Wenn nun a und b an sich negativ sind, z. B. $a = -a'$ und $b = -b'$, so ist $-a - b = -(-a') - (-b') = a' + b'$.

Dasselbe bekommen wir aber auch, wenn wir gleich in $(-a) - (+b)$ für a und b diese Werthe einführen.

Wir haben dann:

$(-a) - (+b) = (+a') - (-b') = a' + b'$, wie oben.

Multiplikation.

22. Lehrsatz. *Man kann bei einem Produkt mehrerer Faktoren die Reihenfolge derselben beliebig abändern, ohne den Werth des Produktes zu stören.*

Wir beweisen den Satz:

1. für positive ganzzahlige,
2. für positive gebrochene,
3. für negative, ganze und gebrochene Faktoren.

Für ein Produkt von 2 ganzzahligen positiven Faktoren ist der Satz schon in No. 5 bewiesen. Haben wir aber ein Produkt mehrerer Faktoren, so sei P das Produkt aller den 2 letzten vorausgehenden Faktoren, dann behaupten wir zunächst, dass in dem Produkt Pmn die beiden letzten Faktoren vertauscht werden können, ohne dass der Werth des Produktes sich ändert, das also $Pmn = Pn.m$. In der That ist $Pm = P + P + P + P + \ldots$ (m mal). $Pm.n$ aber bedeutet eine Summe von n Summanden, jeder $= Pm$ oder $= P + P + P + P + \ldots$ (m mal); somit ist

$$\begin{aligned} Pmn = \; & P + P + P + P + \ldots \quad (m \text{ mal}) \\ & P + P + P + P + \ldots \\ & P + P + P + P + \ldots \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \ldots \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \ldots \end{aligned}$$

wo wir n horizontale Reihen und in jeder m Summanden haben $= P$. Die Summe aller dieser Grössen können wir auch auffassen als bestehend aus m Vertikalreihen; in jeder Vertikalreihe kommt P n mal als Summand vor; folglich ist der Werth einer Vertikalreihe $= P.n$ und da wir m solche Vertikalreihen haben, so ist die Gesammtsumme auch $= Pn.m$; also

$$Pmn = Pnm.$$

Betrachten wir nun das Produkt $abcde$, so ist es unter Anwendung dieses Satzes $= abced$. Betrachten wir hier für sich das Produkt $abce$, so können wir für dasselbe setzen das ihm gleiche Produkt $abec$, wodurch $abced = abecd$. Hier können wir wieder das Produkt der 3 ersten Faktoren abe ersetzen durch aeb und endlich ae durch ea. Wir bekommen somit nach einander: $abcde = abced = abecd = aebcd = eabcd$, woraus wir erkennen, dass man den Faktor e successive an jede Stelle des Produktes setzen kann, ohne den Werth des Produktes zu ändern. Dasselbe gilt von jedem andern Faktor; man kann folglich einmal in einem Produkt positiver und ganzzahliger Faktoren jeden Faktor successive an jede Stelle des Produktes setzen, ohne den Werth desselben zu ändern.

Haben wir ein Produkt gebrochener Faktoren, so lässt sich auch da wieder zeigen, dass man die 2 letzten mit einander vertauschen kann, ohne den Werth des Produktes zu ändern. Denn wenn wieder P das Produkt der den 2 letzten Faktoren $\frac{n}{m}$ und $\frac{r}{s}$ vorausgehenden Faktoren bezeichnet, so ist zunächst

$$P \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{r}{s} = P \cdot \frac{nr}{ms} = P \cdot \frac{rn}{sm} = P \cdot \frac{r}{s} \cdot \frac{n}{m}$$

Man kann also wirklich die 2 letzten Faktoren mit einander vertauschen. Nun folgt wieder in ganz ähnlicher Weise, wie früher, dass $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h} \cdot \frac{n}{m} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{g}{h}$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h} =$$

$\frac{n}{m} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h}$ d. h., dass man in einem Produkt mehrerer gebrochenen Faktoren den letzten Faktor successive an jede Stelle des Produktes setzen kann, ohne den Werth des Produktes zu ändern; der Satz gilt also auch für gebrochene positive Faktoren.

Wenn endlich die Faktoren unsers Produktes negativ sind, gleichviel ob ganz oder gebrochen, so ist dieses Produkt jedenfalls einmal dem absoluten Werthe nach gleich dem Produkt der nämlichen, aber positiv genommenen Faktoren. In einem Produkt positiver Faktoren darf man aber die Reihenfolge beliebig abändern, ohne den Werth des Produktes zu stören. Es wird somit auch in unserm Produkt der absolute Werth nicht geändert, wenn man schon die Faktoren mit einander vertauscht. Sollte also eine Aenderung in der Reihenfolge der Faktoren einen Einfluss auf den Werth des Produktes haben, so wäre das jedenfalls nur in Bezug auf das Zeichen möglich. Allein wir wissen, dass das Vorzeichen eines Produktes negativer Faktoren nur von der Anzahl, nie aber von der Reihenfolge der Faktoren abhängt. Wenn wir daher bei einem Produkt negativer Faktoren die Reihenfolge beliebig ändern, so wird dadurch weder der absolute Werth, noch das Vorzeichen des Produktes geändert; folglich bleibt das Produkt sich gleich.

23. Lehrsatz. *Hat man eine Grösse mit einem Produkt mehrerer Faktoren zu multipliziren, so kann man, statt die Grösse mit dem ausgerechneten Produkt zu multipliziren, sie auch successive mit jedem einzelnen Faktor multipliziren.*

Um a mit bcd zu multipliziren, hat man das Produkt aus dem Multiplikanden so entstehen zu lassen, wie der Multiplikator bcd aus der positiven Einheit abgeleitet wird. Allein bcd kann aus der Einheit dadurch abgeleitet werden, dass man entweder die positive Einheit auf einmal bcd mal als Summand setzt, oder dann auch dadurch, dass man dieselbe erst b mal nimmt, was herauskommt mit c und

dieses Resultat endlich noch mit d multiplizirt. Wir können daher auch das Produkt aus dem Multiplikanden a entweder entstehen lassen, indem wir diesen gleich bcd mal als Summand setzen, welche Summe durch $abcd$ angedeutet wird — oder dann dadurch, dass wir ihn erst mit b multipliziren, was herauskommt, mit c und das neue Resultat noch mit d. Wir erhalten auf die letzte Art:

$$a \times b = ab$$
$$ab \times c = abc$$
$$abc \times d = abcd$$

Beispiel: $9 \times 5 \,.\, 10 \,.\, 4 = 9 \,.\, 200 = 1800.$

Es ist aber auch

$$9 \times 5 = 45$$
$$45 \times 10 = 450$$
$$450 \times 4 = 1800$$

2. Beispiel: $\frac{7}{45} \times 9 \,.\, 5 \,.\, 8 = ?$

1. Art: $\frac{7}{45} \times 9 \,.\, 5 \,.\, 8 = \frac{7}{45} \times 360 = \frac{7 \,.\, 360}{45} = 7 \,.\, 8 = 56$

2. Art.

$$\tfrac{7}{45} \times 9 = \tfrac{7}{5}$$
$$\tfrac{7}{5} \times 5 = 7$$
$$7 \times 8 = 56!$$

somit $\frac{7}{45} \times 9 \,.\, 5 \,.\, 8 = 56.$

24. Lehrsatz. *Umgekehrt kann ein Produkt mehrerer Faktoren mit einer Grösse auch dadurch multiplizirt werden, dass man nur irgend einen der Faktoren mit dieser Grösse multiplizirt und die übrigen als solche unverändert beisetzt.*

Hat man also z. B. abc mit d zu multipliziren, so kann man, statt das ausgerechnete Produkt abc mit d zu multipliziren, auch entweder den 1sten Faktor a mit d multipliziren und den 2ten und 3ten unverändert beisetzen oder den 2ten Faktor b mit d multipliziren und den 1sten und 3ten unverändert beibehalten, oder endlich den 3ten c mit d multipliziren und a und b unverändert beisetzen.

Beweis. Es ist $abc \times d = abcd$. Allein in einem Produkt kann man die Reihenfolge der Faktoren beliebig abändern, ohne den Werth des Produktes zu stören. Es ist also $abcd$ auch $=$ $\underbrace{ad}bc$, welches Produkt man sich aus abc entstanden denken muss, indem man a mit d multiplizirt und die beiden andern Faktoren unverändert beisetzt. Ferner ist $abcd = a\,\underbrace{bd}\,c$, ein Produkt, das man sich aus abc dadurch entstanden denken kann, dass man den

2ten Faktor b mit d multiplizirt, den 1sten und 3ten aber unverändert beisetzt.

Endlich ist $abcd = ab\,\overset{\smile}{cd}$, ein Produkt, welches aus abc hervorgeht, wenn man den 3ten Faktor c mit d multiplizirt, den 1sten und 2ten aber unverändert beisetzt.

Beispiel. $7 \,.\, 12 \,.\, 10 \times 6 = 840 \,.\, 6 = 5040$

Es ist aber auch

1. $7 \,.\, 12 \,.\, 10 \times 6 = 42 \,.\, 12 \,.\, 10 = 5040$
2. $7 \,.\, 12 \,.\, 10 \times 6 = \ \ 7 \,.\, 72 \,. \quad = 5040$
3. $7 \,.\, 12 \,.\, 10 \times 6 = \ \ 7 \,.\, 12 \,.\, 60 = 5040.$

25. Lehrsatz. *Potenzen mit gleichen Grundfaktoren werden mit einander multiplizirt, indem man ihre Exponenten addirt und die Summe als Exponent des nämlichen Grundfaktors beibehält.*

Es ist also z. B. $a^7 \,.\, a^5 = a^{7+5} = a^{12}$.

Die Multiplikation von a^7 mit a^5 oder mit $a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a$ wird nach Satz 24 ausgeführt; indem man a^7 successive mit jedem der in a^5 enthaltenen Faktoren multiplizirt. Bei jeder dieser Multiplikationen tritt ein Faktor a neu hinzu; im Ganzen kommt also zu a^7 noch 5 mal der Faktor a hinzu, d. h. das Produkt ist aufzufassen als bestehend aus $7 + 5 = 12$ Faktoren, jeder $= a$, oder als a^{12}.

Ebenso wäre allgemein $a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$.

26. Multiplikation von Monomen.

$$12a^5b^3c^2d^4 \times 7a^2b^6c^3 = ?$$

Wir fassen den Multiplikator $7a^2b^6c^3$ als ein Produkt aus mehreren Faktoren auf. Nach Satz 24 wird die Multiplikation ausgeführt, indem wir den Multiplikanden successive mit jedem Faktor des Multiplikators multipliziren, wodurch wir so viele Multiplikationen bekommen, als der Multiplikator Faktoren enthält. Da aber der Multiplikand selber ebenfalls ein Produkt aus mehreren Faktoren ist, so wird jede dieser einzelnen Multiplikationen dadurch ausgeführt, dass wir nur einen Faktor des Produktes mit der Grösse multipliziren. Wir bekommen also

$$12a^5b^3c^2d^4 \times 7 \ = 84a^5b^3c^2d^4$$
$$84a^5b^3c^2d^4 \times a^2 = 84a^7b^3c^2d^4$$
$$84a^7b^3c^2d^4 \times b^6 = 84a^7b^9c^2d^4$$
$$84a^7b^9c^2d^4 \times c^3 = 84a^7b^9c^5d^4$$

somit $\quad 12a^5b^3c^2d^4 \times 7a^2b^6c^3 = 84a^7b^9c^5d^4.$

Es stellt sich hiebei heraus, dass das Produkt zweier Monome immer wieder ein Monom ist, welches enthält

1. das Produkt der beiden Coeffizienten als Coeffizient,
2. die den beiden Monomen gemeinschaftlichen Buchstabenfaktoren, jeden auf einer Potenz, deren Exponent gleich ist der Summe der Exponenten dieses Buchstabens in den beiden Faktoren,
3. die nicht gemeinschaftlichen Buchstabenfaktoren mit unveränderten Exponenten.

Wir können kurz auch sagen: Ein Monom wird mit einem andern multiplizirt, indem man das erste successive mit jedem Faktor des zweiten multiplizirt.

27. Multiplikation eines Polynoms mit einem Monom.

$$(a + b - c) \times d = ?$$

Ueber die im Multiplikanden vorkommenden Buchstabengrössen machen wir gar keine Voraussetzung; sie können ganz beliebige Bedeutung haben. Dagegen müssen wir beim Multiplikator d folgende Fälle unterscheiden:

1. d ganz und positiv,
2. d positiv, aber gebrochen,
3. d negativ, ganz oder gebrochen.

Ist d eine positive ganze Zahl, so hat man eine Summe zu bilden aus d Summanden, jeder gleich dem Multiplikanden $a + b - c$. Wir haben demnach das Produkt:

$$\begin{array}{c} a + b - c \\ a + b - c \\ a + b - c \\ a + b - c \\ . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \\ \hline \end{array}$$

Hiebei kommt aber jedes Glied des Multiplikanden d mal als Summand vor. Wir haben demnach als Produkt: $ad + bd - cd$ oder es ist $(a + b - c) \times d = ad + bd = cd$, woraus wir erkennen, dass ein Polynom mit einer positiven ganzen Zahl dadurch multiplizirt wird, dass man jedes Glied des Polynoms mit dieser ganzen Zahl multiplizirt und die Resultate addirt.

Ist 2. der Multiplikator eine gebrochene Zahl $\frac{p}{q}$, so geht

er aus der positiven Einheit hervor, indem man den $q$ten Theil derselben p mal nimmt. Wir müssen daher auch 1. von dem Multiplikanden $a+b-c$ den $q$ten Theil nehmen, 2. das Resultat noch mit p multipliziren. Wir hätten also zunächst das Polynom $a+b-c$ durch die positive ganze Zahl q zu dividiren. Da behaupten wir, das könne dadurch ausgeführt werden, dass wir jedes Glied des Polynoms durch q dividiren und die Resultate addiren, behaupten also, es sei

$$(a+b-c):q = \frac{a}{q}+\frac{b}{q}-\frac{c}{q}$$

In der That hat $\frac{a}{q}+\frac{b}{q}-\frac{c}{q}$ die Eigenschaft, mit dem Divisor q multiplizirt, zum Produkt den Dividenden $a+b-c$ zu geben. Denn da q eine positive ganze Zahl, so wird nach dem bereits Bewiesenen

$$\left(\frac{a}{q}+\frac{b}{q}-\frac{c}{q}\right)q = \frac{a}{q}\cdot q+\frac{b}{q}\cdot q-\frac{c}{q}\cdot q = a+b-c$$

sein. Es ist somit der $q$te Theil von $a+b-c$ gleich $\frac{a}{q}+\frac{b}{q}-\frac{c}{q}$. Dieses Resultat müssen wir noch mit p multipliziren. Da aber p eine positive ganze Zahl, so wird nach dem Obigen

$$\left(\frac{a}{q}+\frac{b}{q}-\frac{c}{q}\right)p = \frac{ap}{q}+\frac{bp}{q}-\frac{cp}{q}$$ sein. und somit

$$(a+b-c)\cdot\frac{p}{q} = \frac{ap}{q}+\frac{bp}{q}-\frac{cp}{q}$$

ein Resultat, das man einfach erhält, wenn man *jedes Glied des Multiplikanden mit dem Multiplikator* $\frac{p}{q}$ *multiplizirt und die Resultate addirt.*

Ist endlich der Multiplikator d eine *negative* ganze oder gebrochene Zahl, also $d=-d'$, wo d' auch gebrochen sein kann, so entsteht $-d'$ aus der positiven Einheit, wenn man von dieser zuerst das Entgegengesetzte nimmt, also -1, und das Resultat noch mit d' multiplizirt. Also werden wir auch das Produkt aus dem Multiplikanden $a+b-c$ ableiten, wenn wir zuerst von diesem das Entgegengesetzte nehmen, wodurch wir $-a-b+c$ erhalten, und dann dieses Ergebniss noch mit der positiven Zahl d' multipliziren. Allein $(-a-b+c)\cdot d' = -ad'-bd'+cd'$.

Wir haben demnach:

$$(a+b-c)\cdot(-d') = -ad'-bd'+cd'.$$

Hier ist aber wieder jedes Glied des Produktes gerade das Produkt aus dem entsprechenden Gliede des Multiplikanden in den Multiplikator $-d'$, und wir haben daher für alle betrachteten Fälle das Resultat, dass ein Polynom mit einem Monom multiplizirt wird, wenn man jedes Glied des Polynoms mit dem Monom multiplizirt und die Resultate addirt.

28. Multiplikation eines Monoms mit einem Polynom.

Hat man a zu multipliziren mit $b+c-d$, so muss das Produkt aus dem Multiplikanden a so gebildet werden, wie der Multiplikator $b+c-d$ aus der positiven Einheit herleitbar ist. Dieser wird aber erhalten, wenn man die positive Einheit zuerst mit b, dann mit c multiplizirt und die Resultate addirt, endlich noch von der Summe das $d$fache der positiven Einheit subtrahirt. Wir müssen daher auch den Multiplikanden a mit b, dann mit c multipliziren, die Resultate addiren und endlich von der Summe $ab+ac$ das $d$fache von a subtrahiren. Wir bekommen so

$$a \times (b+c-d) = ab+ac-ad,$$

woraus hervorgeht, dass ein Monom mit einem Polynom multiplizirt wird, indem man das Monom mit jedem Gliede des Polynoms multiplizirt und die Resultate addirt.

29. Multiplikation zweier Polynome.

$$(5a+2b-3c+d).(e-f+g) = ?$$

Wir denken uns für einen Augenblick im Multiplikator an die Stelle der einzelnen Buchstaben spezielle Zahlwerthe eingesetzt und die angedeuteten Operationen ausgeführt, so erhalten wir den Werth des Multiplikators, den wir mit V bezeichnen wollen. Indem wir nun den Multiplikanden mit dem Werth V des Multiplikators multipliziren, werden wir den Werth des Produktes bekommen; wir haben daher nach Satz 27:

$$(5a+2b-3c+d) \,.\, V = 5aV+2bV-3cV+dV.$$

Wenn wir für den Werth V des Multiplikators wieder den Multiplikator $e-f+g$ selber setzen, ändern wir jedenfalls den Werth des Produktes nicht. Unter Anwendung von Satz 28 bekommen wir nun

$$5aV = 5a(e-f+g) = 5ae-5af+5ag$$
$$2bV = 2b(e-f+g) = 2be-2bf+2bg$$

$$-3cV = -3c(e-f+g) = -3ce+3cf-3cg$$
$$\underline{dV = d(e-f+g) = de-df+dg}$$

Somit

$$(5a+2b-3c+d)\,(e-f+g)$$
$$5ae-5af+5ag$$
$$+2be-2bf+2bg$$
$$-3ce+3cf-3cg$$
$$+de-df+dg$$

Wir haben hier in der 1sten Zeile die Produkte aus dem 1sten Glied des Multiplikanden in jedes Glied des Multiplikators, in der 2ten Zeile die Produkte aus dem 2ten Glied des Multiplikanden in jedes Glied des Multiplikators u. s. f. Das Totalprodukt ist somit nichts anderes als die Summe der Produkte aus jedem Glied des Multiplikanden in jedes Glied des Multiplikators. Daher der Satz:

Ein Polynom wird mit einem andern multiplizirt, indem man jedes Glied des Multiplikanden mit jedem Gliede des Multiplikators multiplizirt und die Resultate addirt.

Wesentlich ist hiebei nur, dass jedes Glied des Multiplikanden mit jedem Glied des Multiplikators multiplizirt werde; die Reihenfolge ist dabei gleichgültig. Behufs Vermeidung von Fehlern ist jedoch eine bestimmte Ordnung rathsam. Man kann nun hiebei eine doppelte Anordnung befolgen:

1. Entweder die Anordnung beibehalten, auf welche wir bei der Ableitung des Verfahrens gestossen sind und die darin besteht, dass man der Reihe nach das 1ste, dann das 2te, 3te und 4te Glied des Multiplikanden u. s. f. mit jedem Gliede des Multiplikators multiplizirt. Wir erhalten dabei so viele Reihen, als der Multiplikand Glieder hat, in jeder Reihe selber aber so viele Glieder, als der Multiplikator Glieder enthält. Wenn wir eine solche Reihe ein Partialprodukt nennen und der Multiplikand, wie oben, 4, der Multiplikator aber 3 Glieder enthält, so bekommt man bei dieser Anordnung 4 Partialprodukte, jedes mit 3 Gliedern, woraus folgt, dass das Totalprodukt $4 \,.\, 3 = 12$ einzelne Glieder kekommen muss.

2. Oder man kann zuerst alle Glieder des Multiplikanden mit dem 1sten, dann alle Glieder desselben mit dem 2ten Glied des Multiplikators multipliziren, u. s. f. Man erhält alsdann so viele Partialprodukte, als der Multiplikator Glieder zählt, und in jedem Partialprodukt so viele Glieder, als der Multiplikand Glieder enthält. Das Totalprodukt wird also vor der Reduktion so viele

Glieder enthalten, als das Produkt aus der Gliederzahl des Multiplikanden in die Gliederzahl des Multiplikators anzeigt. Bei m Gliedern im Multiplikanden und n Gliedern im Multiplikator wäre $m.n$ die Gliederzahl des Produktes.

30. Um die Reduktion der gleichartigen Glieder des Produktes sich zu erleichtern, ordnet man Multiplikand und Multiplikator nach fallenden oder steigenden Potenzen eines Buchstabens, der dann Haupt- oder Ordnungsbuchstabe genannt wird. Ein Polynom nach fallenden Potenzen ordnen heisst die Glieder desselben so aufeinander folgen lassen, dass der Exponent des Ordnungsbuchstabens von Glied zu Glied abnimmt. Wir wollen in der Folge stets die zweite der vorhin erwähnten Anordnungen befolgen d. h. den ganzen Multiplikanden mit dem ersten, dann mit dem zweiten Glied des Multiplikators multipliziren u. s. f., und dann die Partialprodukte so unter einander setzen, dass die Glieder eines jeden folgenden unter die ihnen gleichartigen der vorhergehenden zu stehen kommen.

Erstes Beispiel.

$$\begin{array}{l}
(x^5+6x^4y+7x^3y^2-4x^2y^3-2xy^4+y^5).(x^3+4x^2y+2xy^2-y^3) \\
\hline
x^8+6x^7y+7x^6y^2-4x^5y^3-2x^4y^4+x^3y^5 \\
\quad+4x^7y+24x^6y^2+28x^5y^3-16x^4y^4-8x^3y^5+4x^2y^6 \\
\qquad+2x^6y^2+12x^5y^3+14x^4y^4-8x^3y^5-4x^2y^6+2xy^7 \\
\qquad\qquad-x^5y^3-6x^4y^4-7x^3y^5+4x^2y^6+2xy^7-y^8 \\
\hline
x^8+10x^7y+33x^6y^2+35x^5y^3-10x^4y^4-22x^3y^5+4x^2y^6+4xy^7-y^8
\end{array}$$

Zweites Beispiel.

$$\begin{array}{l}
(x^4-\tfrac{2}{3}ax^3+\tfrac{5}{2}a^2x^2-\tfrac{3}{4}a^3x+\tfrac{4}{5}a^4).(x^2+\tfrac{3}{2}ax+\tfrac{2}{3}a^2) \\
\hline
x^6-\tfrac{2}{3}ax^5+\tfrac{5}{2}a^2x^4-\tfrac{3}{4}a^3x^3+\tfrac{4}{5}a^4x^2 \\
\quad+\tfrac{3}{2}ax^5-a^2x^4+\tfrac{15}{4}a^3x^3-\tfrac{9}{8}a^4x^2+\tfrac{6}{5}a^5x \\
\qquad+\tfrac{2}{3}a^2x^4-\tfrac{4}{9}a^3x^3+\tfrac{5}{3}a^4x^2-\tfrac{1}{2}a^5x+\tfrac{8}{15}a^6 \\
\hline
x^6+\tfrac{5}{6}ax^5+\tfrac{13}{6}a^2x^4+\tfrac{23}{9}a^3x^3+\tfrac{161}{120}a^4x^2+\tfrac{7}{10}a^5x+\tfrac{8}{15}a^6
\end{array}$$

31. Wenn wir $a+b$ und $a-b$ mit sich selbst, ferner $a+b$ mit $a-b$ multipliziren, so erhalten wir:

1. $(a+b)\ (a+b)$	2. $(a-b)\ (a-b)$	3. $(a+b)\ (a-b)$
a^2+ab	a^2-ab	a^2+ab
$+ab+b^2$	$-ab+b^2$	$-ab-b^2$
$a^2+2ab+b^2$	$a^2-2ab+b^2$	a^2-b^2

Wir haben also

1. $(a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ oder $= a^2 + b^2 - 2ab$

d. h. in Worten das Quadrat der Summe zweier Grössen ist gleich dem Quadrat der ersten mehr dem doppelten

Produkt aus der ersten in die zweite mehr dem Quadrate der zweiten oder gleich der Summe der Quadrate der beiden Grössen mehr dem doppelten Produkt derselben.

2. $(a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

d. h. das Quadrat der Differenz zweier Grössen ist gleich der Summe der Quadrate beider Grössen weniger ihrem doppelten Podukt.

3. $(a+b)\ (a-b) = a^2 - b^2$ d. h. die Summe zweier Grössen, mit ihrer Differenz multiplizirt, ist gleich der Differenz ihrer Quadrate. Wenn wir diese Gleichung rückwärts lesen, also

$a^2 - b^2 = (a+b)\ (a-b)$, so heisst sie:

Die Differenz zweier Quadrate ist zerlegbar in ein Produkt aus der Summe der Wurzeln (a und b) in die Differenz derselben.

32. Lehrsatz. *In dem geordneten Produkt zweier geordneten Polynome ist stets das erste Glied das genaue Produkt der beiden ersten, das letzte das genaue Produkt der beiden letzten Glieder.*

Wir wollen, um uns bestimmter aussprechen zu können, etwa annehmen, der nach fallenden Potenzen von x geordnete Multiplikator sei ein vollständiges Polynom vom dritten Grade, enthalte also, wie in dem ersten Beispiel von Nro. 30, Glieder mit x^3, mit x^2, x und ohne x. Dann wird offenbar einmal jedes Glied des ersten Partialproduktes den Ordnungsbuchstaben in einer um drei Einheiten höhern Potenz enthalten, als das entsprechende Glied des Multiplikanden, folglich dieses erste Partialprodukt wie der Multiplikand geordnet sein. Aus gleichem Grunde wird das durch Multiplikation mit dem zweiten Gliede des Multiplikators (dem Gliede mit x^2) entstehende zweite Partialprodukt geordnet sein, wie der Multiplikand und zudem jedes seiner Glieder den Ordnungsbuchstaben in einer um 1 niedrigern Potenz enthalten, als das gleichvielte Glied des ersten Partialproduktes, woraus folgt, dass das erste Glied des ersten Partialproduktes sich mit keinem Gliede des zweiten Partialproduktes zusammenziehen lässt. Noch weniger ist aber eine Zusammenziehung des ersten Gliedes vom ersten Partialprodukt mit Gliedern der zwei folgenden Partialprodukte möglich; denn jedes von diesen ist geordnet wie der Multiplikand und enthält in jedem Gliede den Ordnungsbuchstaben in einer um 1 niedrigern Potenz als das entsprechende Glied des unmittelbar vorangehenden Partialproduktes.

Es lässt sich folglich das erste Glied des ersten Partialproduktes mit keinem Gliede der folgenden Partialprodukte zusammenziehen und kommt somit unverändert als erstes Glied des Totalproduktes vor. Ebenso wird das letzte Glied des letzten Partialproduktes mit keinem Gliede der vorhergehenden Partialprodukte zusammenziehbar sein, also unverändert als letztes Glied des Totalproduktes erscheinen. Das erste Glied des ersten Partialproduktes ist aber das Produkt der ersten, das letzte Glied des letzten das Produkt der letzten Glieder beider Polynome, woraus der Satz folgt:

33. Sind Multiplikand und Multiplikator homogen, so ist auch das Produkt homogen und sein Grad gleich der Summe der Grade der einzelnen Polynome. Denn da alle Glieder des Multiplikanden von gleichem Grade, sämmtliche Glieder des Multiplikators wieder unter sich von gleichem Grade sind, so müssen nothwendig sämmtliche Glieder des Produktes wieder von gleichem Grade sein, und zwar, wenn m der Grad der Glieder des einen, n der Grad der Glieder des andern Polynoms ist, so werden sämmtliche Glieder des Produktes vom $(m+n)$ten Grade und somit das Produkt selber vom $(m+n)$ten Grade sein.

Division.

34. Division von Potenzen mit gleichen Grundfaktoren.

Sei a^m zu dividiren durch a^n, so haben wir hiebei 3 Fälle zu unterscheiden. Es kann nämlich

α. der Exponent des Dividenden grösser sein als der des Divisors,
β. „ „ „ „ gleich dem des Divisors
γ. „ „ „ „ kleiner als der des Divisors.

Sei α, $m > n$, wie z. B. bei $a^{15} : a^8$, so haben wir eine Grösse zu suchen, welche, mit dem Divisor a^8 multiplizirt, zum Produkt den Dividenden a^{15} gibt. Offenbar muss der Quotient zunächst eine Potenz von a sein; denn nur eine Potenz von a kann, mit a^8 multiplizirt, zum Produkt wieder eine Potenz von a geben. Sei x der noch unbekannte Exponent unsers Quotienten, so müsste also $a^8 . a^x = a^{15}$ sein; allein es ist auch $a^8 . a^x = a^{8+x}$; somit $8 + x = 15$ oder $x = 15 - 8 = 7$. Der Quotient aus a^{15} durch a^8 ist demnach $= a^7$ d. h. gleich der sovielten Potenz desselben Grundfaktors, als der Ueberschuss vom Exponenten des Dividenden über den des Divisors beträgt. Wenn also der Exponent des Dividenden grösser ist als der des Divisors, so werden Potenzen mit gleichen Grundfaktoren durch einander dividirt, indem man den

Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividenden subtrahirt und die Differenz als Exponent des nämlichen Grundfaktors beibehält.

Sei β. $m = n$, z. B.

a^{15} zu dividiren durch a^{15}, so müssen wir eine Grösse suchen, welche mit a^{15} multiplizirt, zum Produkt a^{15} gibt; diese ist aber offenbar $= 1$; somit $a^{15} : a^{15} = 1$.

Sei γ. $m < n$, z. B.

a^8 zu dividiren durch a^{15}, so können wir den Quotienten zuerst in Bruchform darstellen als $\frac{a^8}{a^{15}}$ was $= \frac{1}{a^7}$. Wir erhalten demnach in diesem 3ten Fall als Quotient die Einheit, dividirt durch die sovielte Potenz des nämlichen Grundfaktors, als der Ueberschuss vom Exponenten des Divisors über den des Dividenden beträgt.

Wir bekommen also bei der Division von Potenzen mit gleichen Grundfaktoren als Quotient entweder

α. die sovielte Potenz des nämlichen Grundfaktors, als der Ueberschuss vom Exponenten des Dividenden über den des Divisors beträgt, oder

β. die Einheit, oder

γ. die Einheit, dividirt durch die sovielte Potenz des nämlichen Grundfaktors, als der Ueberschuss vom Exponenten des Divisors über den des Dividenden beträgt,

je nachdem nämlich der Exponent des Dividenden grösser als der des Divisors, gleich demselben oder kleiner ist, als der Exponent des Divisors. Im ersten Fall kann also die Division einfach ausgeführt werden, wenn man nur den Exponenten des Divisors von dem des Dividenden subtrahirt und die Differenz als Exponent des nämlichen Grundfaktors beibehält.

Wollte man nun dieses für den ersten Fall bewiesene Verfahren auch auf den 2ten und 3ten Fall übertragen, so bekäme man

im 2ten Fall: $a^{15} : a^{15} = a^{15-15} = a^0$

im 3ten Fall: $a^8 : a^{15} = a^{8-15} = a^{-7}$

also im 2ten Fall eine Potenz mit dem Exponenten Null und im 3ten gar eine Potenz mit negativen Exponenten.

Allein einerseits haben wir durchaus kein Recht, die bloss für den 1sten Fall erwiesene Regel auf Fälle auszudehnen, in welchen die frühere Voraussetzung gar nicht mehr zutrifft; anderseits haben die hiebei zum Vorschein gekommenen Resultate einer Potenz mit dem Exponenten Null und einer Potenz mit negativem Exponenten, als Potenzen in unserer bisherigen Bedeutung aufgefasst,

gar keinen Sinn mehr. Wenn wir aber die Uebereinkunft treffen, dass wir unter a^0 nichts anders verstehen wollen als das, was wirklich der Quotient zweier Potenzen mit gleichen Grundfaktoren und gleichen Exponenten ist, nämlich die Einheit, ferner unter einer Potenz mit negativem Exponenten nichts anders als die Einheit, dividirt durch dieselbe Potenz mit positivem Exponenten, dann können wir allerdings die für den 1sten Fall bewiesene Regel auch auf den 2ten und 3ten Fall ausdehnen und bekommen so den Satz:

Potenzen mit gleichen Grundfaktoren werden durch einander dividirt, indem man den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividenden subtrahirt und die Differenz als Exponent des nämlichen Grundfaktors beibehält, wobei aber die zwei neuen Begriffe einer Potenz mit dem Exponenten Null und einer Potenz mit negativen Exponenten eingeführt wurden.

35. Lehrsatz. *Eine Grösse wird durch ein Produkt mehrerer Faktoren dividirt, indem man sie successive durch jeden einzelnen Faktor dividirt, d. h. indem sie durch den 1sten Faktor dividirt, was herauskommt, durch den 2ten u. s. f.*

Ist a diese Grösse und bcd das Produkt, so erhält man, wenn man a gleich auf einmal durch das Produkt bcd dividirt, als Quotient $\frac{a}{bcd}$. Das nämliche Resultat erhält man aber auch, wenn man a successive durch die Faktoren b, c und d dividirt; denn

$$a : b = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$$

$$\frac{a}{bc} : d = \frac{a}{bcd}$$

nach dem aus der Arithmetik über die Division von Brüchen durch ganze Zahlen bekannten Satze. Es ist also hiebei vorläufig noch vorausgesetzt, dass b, c und d positive ganze Zahlen seien. Erst aus der Theorie der algebraischen Brüche ergibt sich dann die Gültigkeit dieses Satzes für beliebige Faktoren b, c und d.

Beispiel: $100 : 5 . 4 . 2 = 100 : 40 = 2\frac{1}{2}$

Das gleiche Resultat bekommen wir auch, wenn wir 100 successive durch 5, 4 und 2 dividiren; denn

$$100 : 5 = 20$$
$$20 : 4 = 5$$
$$5 : 2 = 2\tfrac{1}{2}$$

36. Lehrsatz. *Ein Produkt mehrerer Faktoren kann durch eine Grösse auch dadurch dividirt werden, dass man nur irgend einen Faktor des Produktes durch diese Grösse dividirt, die andern aber unverändert beisetzt.*

Es ist also $abc : d = \frac{abc}{d}$, aber auch

$$abc : d = \frac{a}{d} \,.\, bc = a \,.\, \frac{b}{d} \,.\, c = ab \,.\, \frac{c}{d}.$$

Denn $\frac{abc}{d}$ ist eine Grösse, welche, mit d multiplizirt, abc gibt.

Es ist also nur zu zeigen, dass auch jede der Grössen $\frac{a}{d} \,.\, bc$, $a \,.\, \frac{b}{d} \,.\, c$ und $ab \,.\, \frac{c}{d}$, mit d multiplizirt, zum Produkt abc gebe.

Nun bedeuten aber $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}$ der Reihe nach Grössen, welche, mit d multiplizirt, a, b, und c geben. Ueberdies wissen wir nach Nro. 23, dass ein Produkt mit d multiplizirt wird, indem man nur irgend einen seiner Faktoren mit d multiplizirt. Wenn wir also in den 3 Produkten $\frac{a}{d} \,.\, bc$, $a \,.\, \frac{b}{d} \,.\, c$ und $ab \,.\, \frac{c}{d}$ der Reihe nach den 1sten, 2ten und 3ten Faktor mit d multipliziren, so bekommen wir:

$$\frac{a}{d} \,.\, bc \times d = abc$$
$$a \,.\, \frac{b}{d} \,.\, c \times d = abc \text{ und}$$
$$ab \,.\, \frac{c}{d} \times d = abc;$$

folglich ist jedes derselben $= abc : d = \frac{abc}{d}$; daher hat man in der That: $abc : d = \frac{a}{d} \,.\, bc = a \,.\, \frac{b}{d} \,.\, c = ab \,.\, \frac{c}{d}$, was zu zeigen war.

Beispiel: $20 \,.\, 8 \,.\, 5 : 4 = \frac{20 \,.\, 8 \,.\, 5}{4} = \frac{800}{4} = 200$; es ist aber auch

$$20 . 8 . 5 : 4 = \frac{20}{4} . 8 . 5 = 5 . 8 . 5 = 200;\text{ ferner}$$

$$20 . 8 . 5 : 4 = 20 . \frac{8}{4} . 5 = 20 . 2 . 5 = 200;\text{ endlich}$$

$$20 . 8 . 5 : 4 = 20 . 8 . \frac{5}{4} = 160 . \frac{5}{4} = 200.$$

37. Division der Monome. Auf die beiden vorhergehenden Sätze gestützt können wir unmittelbar die Division zweier beliebigen Monome ausführen, indem wir das erste Monom successive durch jeden Faktor des zweiten dividiren. Wir bekommen dabei so viele einzelne Divisionen als der Divisor Faktoren enthält. Bei jeder derselben hat man allemal ein Produkt mehrerer Faktoren durch eine Grösse zu dividiren, was nach Satz 36 ausgeführt wird.

Haben wir z. B. $63a^9b^8c^5d^2$ durch $9a^4b^5c$ zu dividiren, so bekommen wir da successive:

$$
\begin{array}{lll}
1. & 63a^9b^8c^5d^2 : 9 & = 7a^9b^8c^5d^2 \\
2. & 7a^9b^8c^5d^2 : a^4 & = 7\frac{a^9}{a^4}b^8c^5d^2 = 7a^5b^8c^5d^2 \\
3. & 7a^5b^8c^5d^2 : b^5 & = 7a^5\frac{b^8}{b^5}c^5d^2 = 7a^5b^3c^5d^2 \\
4. & 7a^5b^3c^5d^2 : c & = 7a^5b^3\frac{c^5}{c}d^2 = 7a^5b^3c^4d^2 \\
\hline
\text{somit} & 63a^9b^8c^5d^2 : 9a^4b^5c & = 7a^5b^3c^4d^2
\end{array}
$$

Durch Vergleichung des Resultates mit Dividend und Divisor ergibt sich, dass der Quotient enthält:

1. den Quotienten aus dem Coeffizienten des Dividenden durch den des Divisors,
2. die dem Dividenden und Divisor gemeinschaftlichen Buchstaben, jeden auf einer Potenz, deren Exponent gleich der Differenz seiner Exponenten in Dividend und Divisor,
3. die nur im Dividenden vorkommenden Buchstabenfaktoren mit unveränderten Exponenten.

So oft der Quotient zweier Monome, wie in diesem Beispiel, ganz ausfällt, so sagt man, das erste sei theilbar durch das zweite. Zur Theilbarkeit eines Monoms durch ein anderes ist aber offenbar erforderlich:

1. dass der Coeffizient des Dividenden theilbar sei durch den des Divisors,

2. dass der Divisor keinen Buchstabenfaktor enthalte, der nicht auch im Dividend vorkomme,
3. dass die Exponenten der gemeinschaftlichen Buchstabenfaktoren im Dividenden grösser oder zum mindesten so gross seien, wie die der gleichen Buchstaben im Divisor.

Wenn auch nur eine dieser Bedingungen nicht erfüllt ist, so wird der Quotient gebrochen, z. B.

$$27a^5b^2c : 3a^4b^5c^2d^2 = \frac{27a^5b^2c}{3a^4b^5c^2d^2} = \frac{9a}{b^3cd^2} = 9ab^{-3}c^{-1}d^{-2}.$$

38. Division eines Polynoms durch ein Monom.

Hat man ein Polynom durch ein Monom zu dividiren, so muss man eine Grösse suchen, welche, mit jenem Monom multiplizirt, zum Produkt den Dividenden gibt. Diese Grösse kann jedenfalls kein Monom sein, weil das Produkt zweier Monome immer wieder ein Monom ist. Der gesuchte Quotient wird also einmal ein Polynom sein müssen, das genau so viele Glieder enthält, wie der Dividend, dessen Glieder überdiess so beschaffen sein müssen, dass sie, mit dem Divisor multiplizirt, zum Produkt die entsprechenden Glieder des Dividenden geben, woraus dann folgt, dass man nur jedes Glied des Polynoms durch den Divisor zu dividiren und die Resultate zu addiren hat. Daher der Satz: Ein Polynom wird durch ein Monom dividirt, indem man jedes Glied des Polynoms durch das Monom dividirt und die Resultate addirt.

Beispiel: $(8a^4b^2 - 3a^3b^3 + 12a^2b^4) : 4a^2b^2 =$

$$\frac{8a^4b^2}{4a^2b^2} - \frac{3a^3b^3}{4a^2b^2} + \frac{12a^2b^4}{4a^2b^2} = 2a^2 - \tfrac{3}{4}ab + 3b^2$$

39. Division zweier Polynome.

(A)

$$(x^7 + 2x^6y - 5x^5y^2 + 22x^4y^3 - 23x^3y^4 + 15x^2y^5 - 5xy^6 + y^7) : \quad \text{(B)}$$

$$(x^4 - 2x^3y + 5x^2y^2 - 3xy^3 + y^4)$$

$$x^3 + 4x^2y - 2\;\;{}^2 + y^3$$

$$\underline{x^7 - 2x^6y + 5x_5y^2 - 3x^4y^3 + x^3y^4}$$

$$4x^6y - 10x^5y^2 + 25x^4y^3 - 24x^3y^4 + 15x^2y^5 - 5xy^6 + y^7$$

$$\underline{4x^6y - 8x^5y^2 + 20x^4y^3 - 12x^3y^4 + 4x^2y^5}$$

$$-2x_5y^2 + 5x^4y^3 - 12x^3y^4 + 11x^2y^5 - 5xy^6 + y^7$$

$$\underline{-2x^5y^2 + 4x^4y^3 - 10x^3y^4 + 6x^2y^5 - 2xy^6}$$

$$x\,y^3 - 2x^3y^4 + 5x^2y^5 - 3xy^6 + y^7$$

$$\underline{x^4y^3 - 2x^3y^4 + 5x^2y^5 - 3xy^6 + y^7}$$

$$0$$

Um die Gesetze für die Division zweier Polynome abzuleiten, wollen wir zunächst voraussetzen, das als Dividend gegebene Polynom sei wirklich durch Multiplikation zweier Polynome entstanden, deren eines als Divisor gegeben sei. Wenn wir dann beide ordnen nach fallenden Potenzen von x, so muss nach Lehrsatz 32 das erste Glied unsers Dividenden (A), nämlich x^7, das genaue Produkt aus dem ersten Gliede des Divisors, x^4, in das erste Glied des Quotienten sein. Wir werden daher das erste Glied des Quotienten finden, wenn wir das erste Glied des Dividenden durch das erste des Divisors dividiren. $x^7 : x^4$ gibt x^3 als erstes Glied des Quotienten. Wir haben nun zu untersuchen, ob vielleicht x^3 schon der vollständige Quotient sei, indem wir das Produkt aus dem Divisor in dieses erste Glied des Quotienten bilden und vom Dividenden subtrahiren. Wir bekommen hier einen Rest $4x^6y - 10x^5y^2 +$ etc., von dem wir behaupten, er sei das genaue Produkt aus dem Divisor in die sämmtlichen noch fehlenden Glieder des Quotienten. In der That: der ganze Dividend ist nach Voraussetzung das genaue Produkt aus dem Divisor in den ganzen Quotienten; er ist demnach zusammengesetzt aus dem Produkt des Divisors in das erste Glied des Quotienten mehr dem Produkt des Divisors in das zweite Glied des Quotienten + etc. Nun haben wir aber das Produkt aus dem Divisor in das erste Glied des Quotienten bereits vom Dividenden weggenommen; also wird der Rest das Produkt aus dem Divisor in die sämmtlichen noch fehlenden Glieder des Quotienten sein müssen. Dieser erste Rest ist somit wieder das genaue Produkt zweier geordneten Polynome; daher sein erstes Glied $4x^6y$ das Produkt aus dem ersten Gliede des e i n e n (des Divisors) in das erste Glied des andern (des noch fehlenden Quotienten). Wir werden demnach das zweite Glied des Quotienten finden, wenn wir das erste Glied des ersten Restes, nämlich $4x^6y$, durch das erste Glied des Divisors, durch x^4, dividiren. Wir bekommen so $\frac{4x^6y}{x^4} = 4x^2y$ als zweites Glied des Quotienten. Nun haben wir zu untersuchen, ob der Quotient jetzt vollständig sei. Wir müssten also das Produkt aus dem Divisor in die gefundenen zwei ersten Glieder des Quotienten bilden und vom Dividenden abziehen. Da aber das Produkt aus dem Divisor in das erste Glied des Quotienten bereits abgezogen ist, so haben wir nur vom Rest noch das Produkt aus dem Divisor in das zweite Glied des Quotienten zu subtrahiren. Den erhaltenen neuen Rest

haben wir aus ganz analogen Gründen — wie oben — aufzufassen als das genaue Produkt aus dem ganzen Divisor in die sämmtlichen noch fehlenden Glieder des Quotienten, folglich nach Satz 32 sein erstes Glied $-2x^5y^2$ als das genaue Produkt aus dem ersten Gliede des Divisors in das dritte Glied des Quotienten, welches daher gefunden wird, wenn wir das erste Glied dieses zweiten Restes durch das erste des Divisors dividiren, wodurch wir $-2xy^2$ als drittes Glied des Quotienten bekommen. Indem wir dieses dritte Glied des Quotienten mit dem ganzen Divisor multipliziren und das Produkt vom zweiten Rest subtrahiren, bleibt $x^4y^3 - 2x^3y^4 +$ etc. als neuer Rest. Aus ganz ähnlichen Gründen, wie früher, ist dieser Rest wieder als das genaue Produkt des Divisors in die noch fehlenden Glieder des Quotienten, sein erstes Glied daher als das Produkt aus dem ersten Gliede des Divisors in das nächste Glied des Quotienten aufzufassen. Wir dürfen daher nur das erste Glied dieses Restes durch das erste Glied des Divisors dividiren, um das vierte Glied des Quotienten zu erhalten. Das Produkt aus dem Divisor in das vierte Glied des Quotienten ist hier genau gleich dem dritten Rest; wir bekommen also als Rest Null, woraus wir schliessen, dass der Quotient richtig bestimmt sei.

Es ist nämlich die Summe der vom Dividenden successive abgezogenen Produkte nichts anders als das Produkt aus dem Divisor in den Quotienten; sie ist aber auch gleich dem Dividenden, weil wir ja als Rest Null erhalten haben. Somit ist der erhaltene Quotient genau die Grösse, welche, mit dem Divisor multiplizirt, zum Produkt den Dividenden gibt.

40. Hieraus ergibt sich für die Division zweier Polynome folgende Regel:

Um ein Polynom durch ein anderes zu dividiren, ordnet man erst beide nach fallenden oder steigenden Potenzen eines Buchstabens, dividirt dann das erste Glied des Dividenden durch das erste des Divisors und erhält so das erste Glied des Quotienten, multiplizirt dieses mit dem ganzen Divisor und zieht das Produkt vom Dividenden ab. Das erste Glied des Restes dividirt man wieder durch das erste des Divisors und erhält so das zweite Glied des Quotienten, multiplizirt dieses wieder mit dem ganzen Divisor, zieht das Produkt vom Dividenden ab und fährt

im gleicher Weise so lange fort, bis man als Rest Null erhält oder dann sich überzeugt, dass die Division sich nicht schliesst.

41. Wir lassen nun die in Nr. 40 gemachte Voraussetzung, dass der Dividend durch wirkliche Multiplikation zweier Polynome entstanden sei, wegfallen. Wenn wir nämlich ein ganz beliebiges Polynom durch ein anderes ebenfalls willkürlich gewähltes Polynom dividiren, so wird im Allgemeinen das erste Polynom nicht mehr das genaue Produkt aus dem zweiten in ein drittes sein und dann auch die Division sich nie schliessen, wie weit man auch die Operation fortsetzen mag. Im ersten Fall lässt sich der Quotient immer durch eine endliche Anzahl von Gliedern genau ausdrücken und das eine Polynom ist dann durch das andere theilbar; im letztern Fall aber lässt sich der Quotient nicht durch eine endliche Anzahl von Gliedern ausdrücken, und man sagt alsdann, die Division sei unmöglich. Es frägt sich nun: woran erkennt man, ob die Division unmöglich sei? Wollte man im Quotienten nur ganze Glieder zulassen, so wäre die Division unmöglich, sobald sie uns zu einem Reste führte, dessen erstes Glied nicht mehr theilbar wäre durch das erste Glied des Divisors, und die Kennzeichen der Theilbarkeit für Monome sind aus Nro. 40 bekannt. Lässt man aber auch gebrochene Glieder zu, so kann man die Unmöglichkeit der Division an folgendem Merkmal erkennen: Hat man nach den fallenden Potenzen geordnet, so ist die Division unmöglich, sobald man im Quotienten ein Glied erhält, in welchem der Exponent des Ordnungsbuchstabens kleiner ist, als die Differenz zwischen dem Exponenten dieses Buchstabens im letzten Gliede des Dividenden und des Divisors. Hat man aber nach den steigenden Potenzen geordnet, so ist die Division unmöglich, sobald man im Quotienten zu einem Gliede kommt, in welchem der Exponent des Ordnungsbuchstabens grösser ist als jene Differenz. Es seien z. B. Hx^5 und Kx^2 die letzten Glieder des nach den fallenden Potenzen geordneten Dividenden und Divisors, so betrüge die Differenz der Exponenten von x in diesen letzten Gliedern: $5 - 2 = 3$; es müsste demnach die Division unmöglich sein, sobald man im Quotienten ein Glied in x^2 oder x erhielte, was sich durch folgende Ueberlegung einsehen lässt: Sollte die Division möglich, d. h. der Dividend das genaue Produkt aus dem Divisor in den

Quotienten sein, so müsste nothwendig das letzte Glied des Dividenden, also Hx^5, das Produkt sein aus dem letzten Gliede des Divisors (Kx^2) in das letzte Glied des Quotienten; folglich dieses $= \frac{Hx^5}{Kx^2} = Qx^3$ sein, wenn wir $\frac{H}{K} = Q$ setzen. Erhielte man also im Quotienten ein Glied mit x^2, so könnte das jedenfalls nicht das letzte sein, weil es, mit dem letzten Gliede Kx^2 des Divisors multiplizirt, nicht das letzte Glied Hx^5 des Dividenden gäbe; noch weniger könnte aber eines der folgenden Glieder des Quotienten, in welchen der Exponent von x successive kleiner wird, mit dem letzten Glied des Divisors multiplizirt, das letzte Glied des Dividenden geben; folglich kann sich die Division nicht schliessen.

Diese Merkmale der Theilbarkeit haben indessen keine grosse praktische Bedeutung. Man setzt in solchem Falle die Division in der Regel nur so lange fort, bis man zu einem Reste kommt von niedrigerm Grade als der Divisor und fügt dann, wenn man den Quotienten vollständig haben will, dem ganzen Quotienten noch einen Bruch bei, dessen Zähler gleich dem Rest, dessen Nenner der Divisor ist.

Beispiel:

$$\begin{array}{l}
(2x^5-7x^4+14x^3+5x^2-12x+26) : \underline{(x^3-4x^2+2x+10)} \\
\underline{2x^5-8x^4+4x^3+20x^2} \qquad\qquad\qquad\qquad 2x^2+x+14 \\
\quad x^4+10x^3-15x^2-12x+26 \\
\quad \underline{x^4-4x^3+2x^2+10x} \\
\qquad 14x^3-17x^2-22x+26 \\
\qquad \underline{14x^3-56x^2+28x-140} \\
\qquad\quad +39x^2-50x-114
\end{array}$$

Wir haben hier als Quotient $2x^2+x+14$ und als Rest $39x^2-50x-114$ bekommen. Wollen wir den Quotienten genau d. h. exakt eine Grösse haben, welche, mit dem Divisor multiplizirt, zum Produkt den Dividenden gibt, so setzen wir unserm Quotienten $2x^2+x+14$ noch den Bruch $\frac{39x^2-50x-114}{x^3-4x^2+2x+10}$ bei. Der Ausdruck $2x^2+x+14+\frac{39x^2-50x-114}{x^3-4x^2+2x+10}$ besitzt dann wirklich die Eigenschaft, mit dem Divisor multiplizirt, zum Produkt den Dividenden zu geben. Denn das Produkt aus dem Divisor in den ganzen Bestandtheil des obigen Ausdruckes, $2x^2+x+14$, ist $=$ der Summe der vom Dividenden abgezogenen Produkte; der Bruch

$\frac{39x^2-50x-114}{x^3-4x^2+2x+10}$ gibt unmittelbar nach der Bedeutung des Bruches als Quotient, mit dem Divisor $x^3-4x^2+2x+10$ multiplizirt, zum Produkt den Rest $39x^2-50x-114$; allein die Summe der vom Dividenden abgezogenen Produkte mehr dem Rest ist = dem Dividenden; folglich ist der obige Ausdruck wirklich der genaue Quotient.

42. Bei dem in Nro. 39 entwickelten Divisionsverfahren ist das vorherige Ordnen der beiden Polynome eine nothwendige Bedingung. Denn von den Gliedern des durch wirkliche Multiplikation zweier Polynome entstanden gedachten Dividenden sind im Allgemeinen nur zwei, von welchen man mit Gewissheit sagen kann, dass jedes von ihnen das Produkt sei aus nur einem Gliede des Divisors in nur ein Glied des Quotienten, nämlich das erste und das letzte, während die übrigen Glieder im Allgemeinen durch Reduktion gleichartiger Glieder entstanden sind und daher nicht zur Bestimmung eines Gliedes vom Quotienten benutzt werden können. Dasselbe gilt von jedem der successiven Reste.

Man könnte nun allerdings auch ohne vorheriges Ordnen den Quotienten bestimmen, müsste dann aber bei jeder einzelnen partiellen Division nicht das erste, sondern dasjenige Glied des Dividenden oder des betreffenden Restes nehmen, welches den Ordnungsbuchstaben in der höchsten, beziehungsweise niedrigsten Potenz enthielte und es dividiren durch das ebenfalls den Ordnungsbuchstaben in der höchsten, beziehungsweise niedrigsten Potenz enthaltende Glied des Divisors.

43. Division eines Monoms durch ein Polynom.

Soll der Quotient eines Monoms durch ein Polynom nicht bloss in Bruchform angedeutet, sondern wirklich entwickelt werden, so hat man das Monom als ein Polynom aufzufassen, das sich auf ein Glied reduzirt, indem die übrigen Glieder mit dem Coeffizienten Null hinzugedacht werden können. So lässt sich das Monom $5x$ als das erste Glied eines nach steigenden Potenzen von x geordneten Polynoms von beliebiger Gliederzahl auffassen, indem $5x = 5x + 0 \,.\, x^2 + 0 \,.\, x^3 + \ldots$ und man kann daher die Division eines Monoms durch ein Polynom nach dem für die Division zweier Polynome abgeleiteten Verfahren ausführen. Es wird sich diese Division natürlich nie schliessen und man kann sie daher abbrechen, wo man will, indem man nach Subtraktion

des Produktes aus dem zuletzt bestimmten Gliede des Quotienten in den ganzen Divisor dem erhaltenen Quotienten noch beifügt einen Bruch, dessen Zähler der erhaltene Rest, dessen Nenner aber der Divisor ist.

Beispiel: $1 \quad : \quad 1+x^2$

$$\begin{array}{l}
1 : 1+x^2 = 1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10} \\
\underline{1+x^2} \\
-x^2 \\
\underline{-x^2-x^4} \\
+x^4 \\
\underline{+x^4+x^6} \\
-x^6 \\
\underline{-x^6-x^8} \\
+x^8 \\
\underline{+x^8+x^{10}} \\
-x^{10} \\
\underline{-x^{10}-x^{12}} \\
+x^{12} \text{ u. s. f.}
\end{array}$$

Der Quotient wäre, wenn man bei dem Gliede $-x^{10}$ abbräche $= 1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+\frac{x^{12}}{1+x^2}$; hätte man bei x^8 abbrechen wollen, so müsste der vollständige Quotient sein:

$$1-x^2+x^4-x^6+x^8-\frac{x^{10}}{1+x^2} \text{ u. s. f.}$$

44. Lehrsatz. *Die Differenz der mten Potenzen zweier Grössen ist stets theilbar durch die Differenz dieser Grössen selbst; also x^m-a^m theilbar durch $x-a$.*

Sei Q der Quotient und R der allfällige Rest, so müsste $x^m-a^m=(x-a)\,Q+R$ eine identische Gleichung sein. Sie muss also gelten für jeden Werth von x, also auch für $x=a$. Allein für $x=a$ bekommt man:

$$0 = R.$$

Demnach muss der Rest = Null und x^m-a^m somit theilbar sein durch $x-a$.

45. Das Bildungsgesetz des Quotienten ist leicht zu erkennen. Das erste Glied ist x^{m-1}. Weil der Divisor vom ersten Grade, so wird bei jeder Division der Exponent von x um 1 vermindert. Da aber der Dividend und Divisor homogen sind, so muss auch der Quotient homogen und vom Grade $m-1$ sein. Wenn also der Exponent von x von Glied zu Glied um 1 abnimmt,

so muss umgekehrt der Exponent von a von Glied zu Glied um 1 zunehmen und daher der Quotient =

$$x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+a^3x^{m-4}+\ldots a^{m-2}x+a^{m-1} \text{ sein.}$$

Von der Richtigkeit dieser Behauptung kann man sich übrigens durch Ausführung der Multiplikation mit $x-a$ leicht überzeugen.

46. Aus der Gleichung

$$(1) \quad x^m-a^m=(x-a)\cdot(x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots a^{m-2}x+a^{m-1})$$

ziehen wir folgende Schlüsse:

1. Es ist x^m-a^m durch $x+a$ stets theilbar, wenn m eine gerade Zahl.
2. x^m+a^m durch $x+a$ theilbar, wenn m eine ungerade Zahl.

Um das einzusehen, setzen wir in der identischen Gleichung (1) $a=-a'$, dann geht sie über in

$$(2). \quad x^m-(-a')^m=(x+a')\,(x^{m-1}-a'x^{m-2}+a'x^{m-3}-\ldots\pm a'^{m-1}).$$

Nun müssen wir hiebei 2 Fälle unterscheiden; es kann $m=2n$ d. h. gerade und $m=2n+1$ d. h. ungerade sein.

Ist 1. $m=2n$, so ist $(-a')^m=(-a')^{2n}=+a'^{2n}=+a'^m$, ferner das letzte Glied $\pm a'^{m-1}=(-a')^{m-1}=(-a')^{2n-1}=-a'^{2n-1}$ $=-a'^{m-1}$ und somit verwandelt sich für ein gerades m die Gleichung (2) in

$$x^m-a'^m=(x+a')\,(x^{m-1}-a'x^{m-2}+a'^2x^{m-3}-\ldots-a'^{m-1})$$

welche sagt, dass bei geradem m die Differenz der $m$ten Potenzen zweier Grössen auch durch die Summe dieser Grössen theilbar sei.

Ist 2. $m=2n+1$, so ist

$$(-a')^{2n+1}=-a'^{2n+1}, \text{ somit}$$

$$x^m-(-a')^m=x^{2n+1}+a'^{2n+1}=x^m+a'^m$$

ferner $(-a')^{m-1}=(-a')^{2n}=+a'^{2n}=+a'^{m-1}$ und daher geht die Gleichung (2) über in

$$x^m+a'^m=(x+a')\,(x^{m-1}-a'x^{m-2}+a'x^{m-3}-+\ldots+a'^{m-1})$$

welche sagt, dass bei ungeradem m auch die Summe der $m$ten Potenzen zweier Grössen durch die Summe derselben theilbar sei.

Beispiel. Es ist also sowohl x^5-a^5 als x^6-a^6 durch $x-a$ theilbar; ferner ist x^6-a^6 nicht bloss durch $x-a$, sondern auch durch $x+a$ theilbar; endlich ist auch x^5+a^5 durch $x+a$ theilbar.

47. Enthalten mehrere Glieder eines Polynoms die gleiche Potenz eines Buchstabens, so kann man sie in eines zusammenziehen, indem man alle Glieder durch jenen gemeinschaftlichen

Faktor dividirt und den Quotienten wieder mit demselben multiplizirt. So haben die Glieder von $7a^2x^3-5abx^3+9b^2x^3$ alle den Faktor x^3. Wenn wir sie durch x^3 dividiren und den Quotienten wieder mit x^3 multipliziren, so ist offenbar der Werth nicht geändert worden. Nun ist $(7a^2x^3-5abx^3+9b^2x^3):x^3 = 7a^2-5ab+9b^2$. Daher

$$7a^2x^3-5abx^3+9b^2x^3 = (7a^2-5ab+9b^2)x^3$$

Man nennt diese Zusammenziehung mehrerer Glieder mit einem gemeinschaftlichen Faktor das **Absondern eines gemeinschaftlichen Faktors**. Das Resultat $(7a^2-5ab+9b^2)x^3$ wird als **ein** Glied angesehen, dessen Coeffizient das Polynom $7a^2-5ab+9b^2$ ist.

48. **Multiplikation und Division von Polynomen, deren Coeffienten selber wieder Polynome sind.**

Sei $(a+b)x^3-(a^2+3ab+b^2)x^2+(a^3+b^3)x-a^4+3b^4$ zu multipliziren mit $(a-b)x^2+(a^2-b^2)x+a^3-2b^3$, so sind beide Polynome nach fallenden Potenzen von x geordnet; der Multiplikand enthält 4, der Multiplikator 3 Glieder. Wir bekommen also 3 Partialprodukte, jedes mit 4 Gliedern; das Totalprodukt wird somit vor der Reduktion 12 Glieder enthalten. Da die Coeffizienten beider Polynome selber wieder Polynome sind, so hat man zur Bestimmung der Coeffizienten in jedem einzelnen Partialprodukt 4 partielle Multiplikationen vorzunehmen. Als gleichartig werden hier diejenigen Glieder betrachtet, welche den Ordnungsbuchstaben x in der nämlichen Potenz enthalten. Sie werden daher addirt, indem man ihre Coeffizienten addirt und die Summe als Coeffizient des nämlichen Buchstabenfaktors beibehält. Wir lassen hier die ganze Darstellung und nach derselben noch die zur Bestimmung der Coeffizienten erforderlichen 12 partiellen Multiplikationen folgen.

$$[(a+b)x^3-(a^2+3ab+b^2)x^2+(a^3+b^3)x-a^4+3b^4]\,.\,[(a-b)x^2+(a^2-b^2)x+a^3-2b^3]$$

$$\begin{aligned}
&(a^2-b^2)x^5-(a^3+2a^2b-2ab^2-b^3)x^4+(a^4-a^3b+ab^3-b^4)x^3+(-a^5+a^4b+3ab^4-3b^5)x^2\\
&\quad+(a^3+a^2b-ab^2-b^3)x^4-(a^4+3a^3b-3ab^3-b^4)x^3+(a^5-a^3b^2+a^2b^3-b^5)x^2+(-a^6+a^4b^2+3a^2b^4-3b^6)x\\
&\quad\quad+(a^4+a^3b-2ab^3-2b^4)x^3-(a^5+3a^4b+a^3b^2-2a^2b^3-6ab^4-2b^5)x^2\\
&\quad\quad\quad+(a^6-a^3b^3-2b^6)x-a^7+2a^4b^3+3a^3b^4-6b^7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(a^2-b^2)x^5-(a^2b-ab^2)x^4+(a^4-3a^3b+2ab^3-2b^4)x^3+(-a^5-2a^4b-2a^3b^2+3a^2b^3+9ab^4-2b^5)x^2\\
&\quad+(a^4b^2-a^3b^3+3a^2b^4-5b^6)x-a^7+2a^4b^3+3a^3b^4-6b^7.
\end{aligned}$$

Partielle Multiplikation.

$(a+b)(a-b)$	$(a^2+3ab+b^2)(a-b)$	$(a^3+b^3)(a-b)$	$(-a^4+3b^4)(a-b)$
a^2-b^2	$a^3+3a^2b+ab^2$	a^4+ab^3	$-a^5+3ab^4$
	$-a^2b-3ab^2-b^3$	$-a^3b-b^4$	$+a^4b-3b^5$
	$a^3+2a^2b-2ab^2-b^3$	$a^4-a^3b+ab^3-b^4$	$-a^5+a^4b+3ab^4-3b^5$
$(a+b)(a^2-b^2)$	$(a^2+3ab+b^2)(a^2-b^2)$	$(a^3+b^3)(a^2-b^2)$	$(-a^4+3b^4)(a^2-b^2)$
a^3+a^2b	$a^4+3a^3b+a^2b^2$	$a^5+a^2b^3$	$-a^6+3a^2b^4$
$-ab^2-b^3$	$-a^2b^2-3ab^3-b^4$	$-a^3b^2-b^5$	$+a^4b^2-3b^6$
$a^3+a^2b-ab^2-b^3$	$a^4+3a^3b-3ab^3-b^4$	$a^5-a^3b^2+a^2b^3-b^5$	$-a^6+a^4b^2+3a^2b^4-3b^6$
$(a+b)(a^3-2b^3)$	$(a^2+3ab+b^2)(a^3-2b^3)$	$(a^3+b^3)(a^3-2b^3)$	$(-a^4+3b^4)(a^3-2b^3)$
a^4+a^3b	$a^5+3a^4b+a^3b^2$	$a^6+a^3b^3$	$-a^7+3a^3b^4$
$-2ab^3-2b^4$	$-2a^2b^3-6ab^4-2b^5$	$-2a^3b^3-2b^6$	$+2a^4b^3-6b^7$
$a^4+a^3b-2ab^3-2b^4$	$a^5+3a^4b+a^3b^2-2a^2b^3-6ab^4-2b^5$	$a^6-a^3b^3-2b^6$	$-a^7+2a^4b^3+3a^3b^4-6b^7$

Wir lassen hier auch noch eine Division zweier solcher Polynome mit den für die Bestimmung der einzelnen Glieder des Quotienten nöthigen partiellen Divisionen folgen.

Dividend — Divisor

$$\left\{(a^4-a^3b+ab^3-b^4)x^3+(a^4+2a^3+a^2b^2+3a^2b-2ab^2-3b^3+b^4)x^2+(4a^3+10ab^2)x+4a^2-9b^2\right\} : \left\{(a^2-ab+b^2)x+2a+3b\right\}$$

$$\begin{array}{l} (a^4-a^3b+ab^3-b^4)x^3+\quad(2a^3\quad+3a^2b-2ab^2-3b^3)x^2 \\ \hline (a^4+a^2b^2+b^4)\,x^2 + (4a^3+10ab^2)\,x + 4a^2-9b^2 \\ (a^4+a^2b^2+b^4)\,x^2 + (2a^3+5a^2b+5ab^2+3b^3)\,x \\ \hline +(2a^3-5a^2b+5ab^2-3b^3)\,x + 4a^2-9b^2 \\ (2a^3-5a^2b+5ab^2-3b^3)\,x + 4a^2-9b^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(a^2-b^2)x^2+(a^2+ab+b^2)x+2a-3b$$

1ste partielle Division:

$$\begin{array}{l|l}(a^4-a^3b+ab^3-b^4) : (a^2-ab+b^2) & \\ a^4-a^3b+a^2b^2 & a^2-b^2 \\ \hline -a^2b^2+ab^3-b^4 & \\ -a^2b^2+ab^3-b^4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

2te partielle Division:

$$\begin{array}{l|l}(a^4+a^2b^2+b^4) : (a^2-ab+b^2) & \\ a^4-a^3b+a^2b^2 & a^2+ab+b^2 \\ \hline +a^3b+b^4 & \\ +a^3b-a^2b^2+ab^3 & \\ \hline +a^2b^2-ab^3+b^4 & \\ +a^2b^2-ab^3+b^4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

3te partielle Division:

$$\begin{array}{l|l}(2a^3-5a^2b+5ab^2-3b^3) : (a^2-ab+b^2) & \\ 2a^3-2a^2b+2ab^2 & 2a-3b \\ \hline -3a^2b+3ab^2-3b^3 & \\ -3a^2b+3ab^2-3b^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Beispiele zur Uebung.

1. $(\frac{3}{2}x^3-\frac{2}{5}x^2y+\frac{1}{2}xy^2-\frac{2}{3}y^3)\,.\,(\frac{5}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2y-\frac{2}{3}xy^2+\frac{3}{4}y^3) = ?$

   Antwort: $\frac{5}{4}x^6+\frac{5}{12}x^5y-\frac{47}{60}x^4y^2+\frac{391}{360}x^3y^3-\frac{29}{30}x^2y^4+\frac{59}{72}xy^5-\frac{1}{2}y^6.$

2. Division des Produktes durch einen der beiden Faktoren!

3. Durch Ausführung der angedeuteten Operationen zu verifiziren:

$$(a^2+b^2)\,(a'^2+b'^2)-aa'+bb')^2=(ab'-ba')^2$$

4. Ebenso: $(a^2+b^2+c^2)\,(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2=$

$$(ab'-ba')^2+(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2$$

5. $(10a^5-19a^4b+37a^3b^2-17a^2b^3+12ab^4+5b^5) : (2a^3-3ab+5b^2) = ?$

   Antwort: $5a^3-2a^2b+3ab^2+b^3.$

6. $(16a^6+4a^4b^2+49a^2b^4-4b^6):(4a^3-6a^2b+5ab^2+2b^3 = ?$

7. $(32a^{10}-243b^{10}):(2a^2-3b^2) = ?$

8. $x^6-\frac{16}{15}x^5y+\frac{151}{60}x^4y^2-\frac{41}{20}x^3y^3+\frac{21}{8}x^2y^4-\frac{59}{48}xy^5+\frac{3}{4}y^6$ zu dividiren durch $x^2-\frac{2}{3}xy+\frac{3}{4}y^2$!

Quotient $= x^4-\frac{2}{5}x^3y+\frac{3}{2}x^2y^2-\frac{3}{4}xy^3+y^4$.

9. $[(3a-2b)x^3+(5a^2+3ab-b^2)x^2+(a^3+3a^2b+b^3)x+a^4-b^4]$ zu multipliziren mit $[(3a+2b)x^2-(a^2+b^2)x+2a^3-3b^3]$.

Antwort: $(9a^2-4b^2)x^5+(12a^3+21a^2b)x^4+(4a^4+4a^3b+2a^2b^2-9ab^3+9b^4)x^3+(12a^5+5a^4b-3a^3b^2-19a^2b^3-12ab^4)x^2+(a^6+6a^5b-a^4b^2-8a^2b^4-2b^6)x+2a^7-3a^4b-2a^3b^4+3b^7$.

10. $[(a^2-2ab+b^2)x^4+(2a^3-2b^3)x^3+(3a^4+3a^2b^2+b^4)x^2+(2a^5+2a^4b+2a^3b^2-2a^2b^3-2ab^4-2b^5)x+a^6-2a^3b^3+b^6]$ zu dividiren durch $[(a-b)x^2+(a^2+ab+b^2)x+a^3-b^3]$.

Division geht auf!

Dritter Abschnitt.

Algebraische Brüche.

---

49. Definition. Wenn in dem Ausdruck $\frac{A}{B}$ Zähler und Nenner positive ganze Zahlen bedeuten, so ist $\frac{A}{B}$ ein gewöhnlicher arithmetischer Bruch. Sobald aber A und B beliebige, positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahlen etc. oder selbst algebraische Ausdrücke bedeuten können, heisst $\frac{A}{B}$ ein algebraischer Bruch.

50. Wir wollen nun zeigen, dass auch algebraische Brüche nach denselben Regeln transformirt, addirt, subtrahirt, multiplizirt und dividirt werden können, wie gewöhnliche arithmetische Brüche, dass also

1. $\frac{A}{B} = \frac{Am}{Bm}$

2. $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} = \frac{A \pm C}{B}$

3. $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$

4. $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$.

Wir behaupten also 1. dass $\frac{A}{B} = \frac{Am}{Bm}$ d. h. dass man Zähler und Nenner eines algebraischen Bruches mit einer beliebigen Grösse multipliziren kann, ohne den Werth des Bruches zu ändern.

Um die Richtigkeit dieser Gleichung nachzuweisen, zeigen wir nur, dass beide Seiten derselben die gleichen Eigenschaften besitzen. Nun ist die rechte Seite $\frac{Am}{Bm}$ nach der Bedeutung des Quotienten eine Grösse, die, mit dem Divisor Bm multiplizirt, zum Produkt Am gibt. Allein auch die linke Seite $\frac{A}{B}$ besitzt diese Eigenschaft; denn nach der Bedeutung des Quotienten $\frac{A}{B}$ muss

$$\frac{A}{B} \,.\, B = A \text{ sein.}$$

Indem wir beide Seiten mit m multipliziren und links die Multiplikation dadurch ausführen, dass wir den einen Faktor B mit m multipliziren, kommt

$$\frac{A}{B} \,.\, Bm = Am,$$

worin unmittelbar ausgesprochen liegt, dass $\frac{A}{B}$ eine Grösse sei, welche mit Bm multiplizirt, zum Produkt Am gebe.

Dieses Satzes bedient man sich nun, um auch algebraische Brüche gleichnamig zu machen.

Wenn z. B. $\frac{A}{B}$ und $\frac{C}{D}$ die beiden Brüche, so darf man nur Zähler und Nenner von $\frac{A}{B}$ mit D, und Zähler und Nenner von $\frac{C}{D}$ mit B multipliziren. Man hat alsdann

$$\frac{A}{B} = \frac{AD}{BD} \text{ und } \frac{C}{D} = \frac{CB}{DB}.$$

Wir behaupten 2. dass

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} = \frac{A \pm C}{B}$$

d. h. dass gleichnamige algebraische Brüche addirt oder subtrahirt werden, indem man ihre Zähler addirt oder subtrahirt und den Nenner als solchen unverändert beibehält. Auch da haben wir nur wieder zu

zeigen, dass die linke Seite $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B}$ die Eigenschaft besitze, welche der rechten Seite $\frac{A \pm C}{B}$ unmittelbar nach ihrer Bedeutung zukommt, nämlich die Eigenschaft, mit B multiplizirt, zum Produkt $A \pm C$ zu geben. Nun ist aber $\left(\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B}\right) . B = \frac{A}{B} . B \pm \frac{C}{B} . B$ $= A \pm C$ nach No. 28; also hat wirklich die linke Seite dieselbe Eigenschaft, wie die erste, womit der Satz erwiesen ist.

Auf diesen Satz werden sämmtliche bei der Addition und Subtraktion algebraischer Brüche vorkommenden Fälle zurückgeführt, indem man die ungleichnamigen Brüche erst gleichnamig macht.

3. Es ist $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$

d. h. algebraische Brüche werden mit einander multiplizirt, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplizirt und das erste Produkt durch das zweite dividirt.

Die erste Seite $\frac{AC}{BD}$ bedeutet eine Grösse, die, mit BD multiplizirt, zum Produkt AC gibt. Um zu zeigen, dass auch das links vorkommende Produkt $\frac{A}{B} . \frac{C}{D}$ dieselbe Eigenschaft besitze, multipliziren wir dasselbe zuerst mit B und was herauskommt, dann mit D. Nun ist aber

$$\frac{A}{B} . \frac{C}{D} \times B = \left(\frac{A}{B} . B\right) . \frac{C}{D} = A . \frac{C}{D}$$

$$A . \frac{C}{D} \times D = A . \left(\frac{C}{D} . D\right) = AC,$$ beides nach Satz 25. Es ist somit wirklich

$$\frac{A}{B} . \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD} \quad (3)$$

Zusatz. Aus diesem allgemeinen Satz der Multiplikation zweier Brüche können wir die Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Grösse und die Multiplikation einer ganzen Grösse mit einem Bruch als spezielle Fälle ableiten. Setzt man nämlich in Gleichung (3) $D = 1$, so geht sie über in $\frac{A}{B} . C = \frac{AC}{B}$ d. h. ein Bruch wird mit einer ganzen Grösse multiplizirt

indem man nur den Zähler mit derselben multiplizirt, den Nenner aber unverändert beibehält.

Setzt man dagegen $B = 1$, so verwandelt Gleichung (3) sich in

$$A \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{D}$$

d. h. eine ganze Grösse wird mit einem algebraischen Bruch multiplizirt, wenn man sie mit dem Zähler multiplizirt, den Nenner aber als solchen unverändert beibehält.

$$4. \quad \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}. \quad (4)$$

Um das zu beweisen, dürfen wir nur zeigen, dass der behauptete Quotient $\frac{AD}{BC}$ wirklich die Eigenschaft des Quotienten besitze, nämlich die Eigenschaft, mit dem Divisor $\frac{C}{D}$ multiplizirt, zum Produkt $\frac{A}{B}$ zu geben. Nun ist aber $\frac{AD}{BC} \cdot \frac{C}{D} = \frac{ADC}{BCD}$ oder, wenn wir hier Zähler und Nenner durch CD dividiren, $= \frac{A}{B}$.

Somit in der That $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$ d. h. ein algebraischer Bruch wird durch einen andern dividirt, indem man ihn mit dem Umgekehrten des Divisorbruches multiplizirt.

Zusatz. In diesem allgemeinen Satz sind die Sätze über Division eines Bruches durch eine ganze Grösse und Division einer ganzen Grösse durch einen algebraischen Bruch als spezielle Fälle enthalten. Setzt man nämlich in Gleichung (4) $D = 1$, so kommt

$$\frac{A}{B} : C = \frac{A}{BC}$$

d. h. ein algebraischer Bruch wird durch eine ganze Grösse dividirt, indem man den Nenner desselben mit der ganzen Grösse multiplizirt, den Zähler aber als solchen unverändert beibehält.

Setzt man dagegen in Gl. (4) $B = 1$, so geht sie über in

$$A : \frac{C}{D} = \frac{AD}{C}$$

d. h. seine ganze Grösse wird durch einen algebrai-

schen Bruch dividirt, indem man sie mit dem Umgekehrten des Divisorbruches multiplizirt.

Anmerkung. Zwei Grössen a und b heissen reziprok, wenn ihr Produkt $= 1$. Also wenn $ab = 1$, dann ist a der reziproke Werth von b und b der reziproke Werth von a. Es folgt aus

$$ab = 1$$

$$1. \quad a = \frac{1}{b}$$

$$2. \quad b = \frac{1}{a}$$

woraus man erkennt, dass der reziproke Werth einer Grösse auch $=$ dem Quotienten aus der Einheit durch sie ist. Die Brüche $\frac{A}{B}$ und $\frac{B}{A}$ sind offenbar reziprok; denn $\frac{A}{C} \cdot \frac{B}{A} = 1$.

Wir können nunmehr auch sagen: Eine beliebige Grösse — gleichviel, ob ganz oder gebrochen — wird durch einen algebraischen Bruch dividirt, indem man sie mit dem reziproken Werth des Bruches multiplizirt.

Anmerkung 2. Für die Division zweier Brüche können wir noch ein anderes, der Multiptikation analoges Verfahren ableiten. Wir behaupten nämlich, zwei algebraische Brüche können auch durch einander dividirt werden, indem man Zähler durch Zähler, Nenner durch Nenner dividirt und das erste Resultat endlich noch durch das zweite dividirt.

Es müsste demnach:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A : C}{B : C} = \frac{\frac{A}{C}}{\frac{B}{D}} \text{ sein.}$$

In der That können wir bei dem Bruch $\frac{\frac{A}{C}}{\frac{B}{D}}$ nur Zähler und Nenner mit CD multipliziren, so bekommen wir $\frac{AD}{BC} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$, was wir nach Satz 4 als Quotient der beiden Brüche $\frac{A}{B}$ und $\frac{C}{D}$ kennen gelernt haben.

Dieses 2te Divisionsverfahren ist jedoch nur dann vortheilhaft, wenn Zähler und Nenner des Dividenden theilbar sind durch die entsprechenden Theile der Divisors. So bekäme man:

$$\frac{45x^{12}y^7}{56a^4z^5} : \frac{9x^8y^6}{8a^3z^2} = \frac{45x^{12}y^7 : 9x^8y^6}{56a^4\ z^5 : 8a^3z^2} = \frac{5x^4y}{7az^3}$$

während mit dem aus dem allgemeinen Verfahren hervorgehenden Resultat erst noch eine Reduktion vorzunehmen wäre, um es in der obigen einfachsten Gestalt zu erhalten.

51. Hat man mehrere gleiche algebraische Brüche, so ist der Quotient aus der Summe der Zähler durch die Summe der Nenner wieder ein den ersten gleicher Bruch.

Wenn also $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F}$

so ist $\frac{A+C+E}{B+D+F} = \frac{A}{B}$

Wir wollen mit Q den Werth eines jeden der 3 gleichen Brüche bezeichnen, so wäre

$$\frac{A}{B} = Q \text{ woraus folgt } A = BQ$$

$$\frac{C}{D} = Q \qquad C = DQ$$

$$\frac{E}{F} = Q \qquad E = FQ$$

Durch Addition dieser 3 Gleichungen kommt:

$$A + C + E = (B + D + F) \,.\, Q$$

also $\frac{A+C+E}{B+D+F} = Q$, also auch $= \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ etc. w. z. b. w.

52. Wir können nun ohne weiter schliessen, dass die im vorigen Abschnitt über die 4 ersten Operationen mit Monomen und Polynomen abgeleiteten Sätze auch dann noch gelten, wenn die Monome oder die Glieder der Polynome beliebige algebraische Brüche sind. Wir wollen hier je ein Beispiel für die Multiplikation und Division solcher Polynome ausführen, deren Glieder algebraische Brüche sind. Sei z. B. zu multipliziren das Polynom

$$\frac{4x^3y^2}{5a^3} - \frac{3x^2y^2}{2a^2b} + \frac{2xy^4}{3ab^2} - \frac{y^5}{b^3} \text{ mit } \frac{2x^2y}{3a^2} - \frac{3x^3y}{5ab} - \frac{3y^3}{2b^2}$$

so sind beide geordnet nach fallenden Potenzen von x, beide homogen und zwar der Multiplikand vom 2ten, der Multiplikator vom 1sten Grade; das Produkt wird daher ebenfalls homogen und vom 3ten Grade werden.

$$\left(\frac{4x^3y^2}{5a^3} - \frac{3x^2y^3}{2a^2b} + \frac{2xy^4}{3ab^2} - \frac{y^5}{b^3}\right) \cdot \left(\frac{2x^2y}{3a^2} - \frac{3xy^2}{5ab} - \frac{3y^3}{2b^2}\right)$$

$$\frac{8x^5y^3}{15a^5} - \frac{x^4y^4}{a^4b} + \frac{4x^3y^5}{9a^3b^2} - \frac{2x^2y^6}{3a^2b^3}$$

$$- \frac{12x^4y^4}{25a^4b} + \frac{9x^3y^5}{10a^3b^2} - \frac{2x^2y^6}{5a^2b^3} + \frac{3xy^7}{5ab^4}$$

$$- \frac{12x^3y^5}{10a^3b^2} + \frac{9x^2y^6}{4a^2b^3} - \frac{xy^7}{ab^4} + \frac{3y^8}{2b^5}$$

$$\frac{8x^5y^3}{15a^5} - \frac{37x^4y^4}{25a^4b} + \frac{13x^3y^5}{90a^3b^2} + \frac{71x^2y^6}{60a^2b^3} - \frac{2xy^7}{5ab^4} + \frac{3y^8}{2a^5}$$

Als Divisionsbeispiel wollen wir das eben erhaltene Resultat prüfen.

$$\left(\frac{8x^5y^3}{15a^5} - \frac{37x^4y^4}{25a^4b} + \frac{13x^3y^5}{90a^3b^2} + \frac{71x^2y^6}{60a^2b^3} - \frac{2xy^7}{5ab^4} + \frac{3y^8}{2b^5}\right) : \left(\frac{2x^2y}{3a^2} - \frac{3xy^2}{5ab} - \frac{3y^3}{2b^2}\right) = \frac{4x^3y^2}{5a^3} - \frac{3x^2y^3}{2a^2b} + \frac{2xy^4}{3ab^2} - \frac{y^5}{b^3}$$

$$\frac{8x^5y^3}{15a^5} - \frac{12x^4y^4}{25a^4b} - \frac{6x^3y^5}{5a^3b^2}$$

$$- \frac{x^4y^4}{a^4b} + \frac{121x^3y^5}{90a^3b^2} + \frac{71x^2y^6}{60a^2b^3} - \frac{2xy^7}{5ab^4} + \frac{3y^8}{2b^5}$$

$$- \frac{x^4y^4}{a^4b} + \frac{9x^3y^5}{10a^3b^2} + \frac{9x^2y^6}{4a^2b^3}$$

$$\frac{4x^3y^5}{9a^3b^2} - \frac{16x^2y^6}{15a^2b^3} - \frac{2xy^7}{5ab^4} + \frac{3y^8}{2b^5}$$

$$\frac{4x^3y^5}{9a^3b^2} - \frac{2x^2y^6}{5a^2b^3} - \frac{xy^7}{ab^4}$$

$$- \frac{2x^2y^6}{3a^2b^3} + \frac{3xy^7}{5ab^4} + \frac{3y^8}{2b^5}$$

$$- \frac{2x^2y^6}{3a^2b^3} + \frac{3xy^7}{5ab^4} + \frac{3y^8}{2b^5}$$

$$0$$

Die hier für die Bestimmung der einzelnen Gliedes des Quotienten erforderlichen partiellen Divisionen sind:

1. $\frac{8x^5y^3}{15a^5} : \frac{2x^2y}{3a^2} = \frac{8x^5y^3 : 2x^2y}{15a^5 : 3a^2} = \frac{4x^3y^2}{5a^3}$

2. $- \frac{x^4y^4}{a^4b} : \frac{2x^2y}{3a^2} = - \frac{3}{2} \cdot \frac{x^4y^4 : x^2y}{a^4b : a^2} = - \frac{3x^2y^3}{2a^2b}$

3. $\frac{4x^3y^5}{9a^3b^2} : \frac{2x^2y}{3a^2} = \frac{4x^3y^5 : 2x^2y}{9a^3b^2 : 3a^2} = \frac{2xy^4}{3ab^2}$

4. $- \frac{2x^2y^6}{3a^2b^3} : \frac{2x^2y}{3a^2} = - \frac{2x^2y^6 : 2x^2y}{3a^2b^3 : 3a^2} = - \frac{y^5}{b^3}$

53. Wir wollen hier an einigen Beispielen die Anwendung der in No. 51 nachgewiesenen Sätze über Rechnung mit algebraischen Brüchen zeigen.

$$\frac{3}{4(1-x^2)} + \frac{3}{8(1-x)} + \frac{5}{2(1+x)} - \frac{1-x}{1+x^2} = ?$$

Um diese algebraischen Brüche zusammenzuziehen, bestimmen wir zunächst die möglich kleinste Grösse, welche durch jeden der Nenner theilbar ist und zerlegen daher diese Nenner in ihre Faktoren. Es ist

1. $4(1-x^2) = 2 . 2 (1+x)(1-x)$
2. $8(1-x) \quad = 2 . 2 . 2(1-x)$
3. $2(1+x) \quad = 2(1+x)$
4. $\quad 1+x^2 \quad = 1+x^2$ ist nicht weiter zerlegbar.

Die zu suchende Grösse soll nun erstens theilbar sein durch $4(1-x^2)$, was nur möglich ist, wenn in ihr alle Faktoren von $4(1-x^2)$ vorkommen. Wir nehmen also einmal diese Faktoren und bekommen so $2 . 2(1-x)(1+x)$.

Die gesuchte Grösse muss sich aber auch zweitens theilen lassen durch $8(1-x)$, was erfordert, dass in ihr 3mal der Faktor 2 und einmal der Faktor $1-x$ vorkomme; den Faktor $1-x$ haben wir bereits, ebenso 2mal den Faktor 2; wir brauchen also nur noch 1mal den Faktor 2 hinzuzusetzen, wodurch wir bekommen: $2.2.2(1-x)(1+x)$. Die Faktoren des nächsten Nenners $2(1+x)$ sind bereits in unserm Produkt enthalten; wir brauchen also wegen des 3ten Nenners keinen neuen Faktor hinzuzusetzen. Dagegen muss der letzte Nenner $1+x^2$ noch als neuer Faktor hinzugesetzt werden. Das so erhaltene Produkt: $2 . 2 . 2(1-x)(1+x)(1+x^2) = 8(1-x^2)(1+x^2) = 8(1-x^4)$ ist jedenfalls eine durch sämmtliche Nenner theilbare Grösse. Es frägt sich nur, ob nicht vielleicht noch eine kleinere Grösse existire, welche ebenfalls durch jeden der Nenner theilbar sei. Dass das aber nicht der Fall ist, erkennt man leicht daraus, dass wenn man auch nur einen der genommenen Faktoren wegliesse, das Produkt der noch übrigen schon nicht mehr durch jeden der 4 Nenner theilbar wäre.

Wir verwandeln nun unsere Brüche sämmtlich in solche, deren Nenner $= 8(1-x^4)$ und haben zu diesem Zwecke Zähler und Nenner eines jeden Bruches zu multipliziren mit der Grösse, welche angibt, wie oftmal der Nenner desselben in dem gefundenen gemeinschaftlichen Nenner $8(1-x^4)$ enthalten sei. Wir bekommen so:

$$\frac{3}{4(1-x^2)}=\frac{3\,.\,2(1+x^2)}{8(1-x^4)}=\frac{6+6x^2}{8(1-x^4)}$$

$$\frac{3}{8(1-x)}=\frac{3(1+x)\,(1+x^2)}{8(1-x^4)}=\frac{3(1+x+x^2+x^3)}{8(1-x^4)}$$

$$\frac{5}{2(1+x)}=\frac{5\,.\,4(1-x)\,(1+x^2)}{8(1-x^4)}=\frac{20(1-x+x^2-x^3)}{8(1-x^4}$$

$$\frac{1-x}{1+x^2}=\frac{8(1-x)\,(1-x^2)}{8(1-x^4)}=\frac{8(1-x-x^2+x^3)}{8(1-x^4)}$$

Nun sind die 3 ersten Polynome zu addiren und das 4te zu subtrahiren; wenn wir daher mit S das Resultat bezeichnen, so hat man

$$S=\frac{6+6x^2+3+3x^2+3x^3+20-20x+20x^2-20x^3-8+8x+8x^2-8x^3}{8(1-x^4)}$$

oder

$$S=\frac{21-9x+37x^2-25x^3}{8(1-x^4)}.$$

2. Beispiel: $\dfrac{x^5-2x^3}{x^4-4x^2+4}=?$

Wenn wir im Zähler x^3 absondern, so kommt

$$\frac{x^5-2x^3}{x^4-4x^2+4}=\frac{x^3(x^2-2)}{(x^2-2)^2}=\frac{x^3}{x^2-2}.$$

3. Beispiel: $\dfrac{14a^2-7ab}{10ac-5bc}=?$

$$\frac{14a^2-7ab}{10ac-5bc}=\frac{7a(2a-b)}{5c(2a-b)}=\frac{7a}{5c}.$$

4. Beispiel. $\dfrac{\dfrac{A}{A+B}-\dfrac{B}{A-B}}{\dfrac{A}{A+B}+\dfrac{B}{A-B}}=?$

Multipliziren wir Zähler und Nenner des Ganzen mit $(A+B)\,(A-B)$, so erhalten wir:

$$\frac{\dfrac{A}{A+B}-\dfrac{B}{A-B}}{\dfrac{A}{A+B}-\dfrac{B}{A-B}}=\frac{A(A-B)-B(A+B)}{A(A-B)+B(A+B)}=\frac{A^2-AB-AB-B^2}{A^2-AB+AB+B^2}$$

$$=\frac{A^2-2AB-B^2}{A^2+B^2}.$$

Vierter Abschnitt.

Potenzen und Wurzelgrössen; Ausziehung der 2ten und 3ten Wurzel.

A. Lehre von den Potenzen.

54. Wenn m und n positive ganze Zahlen bedeuten, so finden folgende 5 Gleichungen statt:

$$1.\quad a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$$
$$2.\quad a^m : a^n = a^{m-n}$$
$$3.\quad (abc)^m = a^m b^m c^m$$
$$4.\quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$
$$5.\quad (a^m)^n = a^{mn}$$

Die in (1) und (2) enthaltenen Sätze wurden früher in No. 26 und 35 ausgesprochen und bewiesen.

Um die Gleichung (3) nachzuweisen, wollen wir dem m einmal den speziellen Werth 4 geben, also $(abc)^4$ entwickeln. Nach der Bedeutung der Potenz ist $(abc)^4 = abc \,.\, abc \,.\, abc \,.\, abc$.

Um diese Multiplikation auszuführen, haben wir erst das Produkt $abc \,.\, abc$ der 2 ersten Faktoren zu bilden, dieses mit abc und das Resultat noch einmal mit abc zu multipliziren. Wenden wir nun die Lehrsätze 24 und 25 an, so haben wir

$$abc \times a = a^2bc$$
$$a^2bc \times b = a^2b^2c$$
$$a^2b^2c \times c = a^2b^2c^2$$
$$\text{also } abc \times abc = a^2b^2c^2$$

Dieses Resultat multipliziren wir in gleicher Weise mit abc, so kommt

$$a^2b^2c^2 \times a = a^3b^2c^2$$
$$a^3b^2c^2 \times b = a^3b^3c^2$$
$$a^3b^3c^2 \times c = a^3b^3c^3$$

Und wenn wir endlich $a^3b^3c^3$ noch mit dem 4ten Faktor abc in gleicher Weise multipliziren, so erhalten wir $(abc)^4 = a^4b^4c^4$.

Ist endlich, statt 4, m der Exponent von abc, so hat man, statt wie eben, 3, im Ganzen $m-1$ mal die Multiplikation mit abc zu vollziehen, wodurch man erhält

$$(abc)^m = a^m b^m c^m$$

d. h. ein Produkt mehrerer Faktoren wird mit einer positiven ganzen Zahl potenzirt, indem man jeden einzelnen Faktor mit ihr potenzirt und die Resultate mit einander multiplizirt.

Um die 4te Gleichung zu erweisen, haben wir lediglich auf die Bedeutung einer Potenz und die Multiplikation von Brüchen uns zu stützen; denn es ist

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots = \frac{aaaa\ldots}{bbbb\ldots} = \frac{a^m}{b^m}$$

d. h. ein Bruch wird mit einer pos. ganzen Zahl potenzirt, indem man Zähler und Nenner desselben mit dieser Zahl potenzirt und das 1ste Resultat durch das 2te dividirt.

Die 5te Gleichung endlich folgt unmittelbar aus der Bedeutung der Potenz und dem Satz über Multiplikation von Potenzen mit gleichen Grundfaktoren.

Es ist nämlich $(a^m)^n = a^m . a^m . a^m . a^m \ldots = a^{m+m+m+\cdots}$ wobei m gerade n mal als Summand vorkommt; also $(a^m)^n = a^{mn}$ d. h. eine Potenz wird mit einer positiven ganzen Zahl potenzirt, indem man den Exponenten der Potenz mit dieser Zahl multiplizirt und das Produkt als Exponent des nämlichen Grundfaktors setzt.

55. Wenn wir die 5 obigen Gleichungen umkehren, d. h. sie rückwärts lesen, so bekommen wir 5 andere Sätze:

1. $a^{m+n} = a^m . a^n$
2. $a^{m-n} = a^m : a^n$
3. $a^m b^m c^m = (abc)^m$
4. $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$
5. $a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$

welche, in Worten ausgesprochen, folgendermassen lauten:

1. $a^{m+n} = a^m . a^n$: Eine Grösse wird mit einer Summe potenzirt, indem man sie mit jedem Summanden potenzirt und die Resultate mit einander multiplicirt. So ist z. B. $7 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1$; daher $10^7 = 10^4 . 10^3 = 10^5 . 10^2 = 10^6 . 10$

2. $a^{m-n} = a^m : a^n$: Eine Grösse wird mit einer Differenz potenzirt, indem man sie mit dem Minuenden, dann mit dem Subtrahenden potenzirt und das 1ste Resultat durch das 2te dividirt.

3. $a^m b^m c^m = (abc)^m$: Potenzen mit gleichen Exponenten werden mit einander multip izirt, indem man ihre Grundfaktoren mit einander multiplizirt und das Produkt zur nämlichen Potenz erhebt.

So ist $5^6 . 2^6 = (5 . 2)^6 = 10^6 = 1000000$.

4. $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$: Potenzen mit gleichen Exponenten können durch einander dividirt werden, wenn man ihre Grundfaktoren durch einander dividirt und den Quotienten zur nämlichen Potenz erhebt.

So ist z. B. $\frac{24^5}{8^5} = \left(\frac{24}{8}\right)^5 = 3^5$, was viel einfacher zu bestimmen ist, als wenn man 24^5 und 8^5 ausrechnen und nachher die Resultate durch einander dividiren würde.

5. $a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$ heisst in Worten:

Eine Grösse wird mit einem Produkt mehrerer Faktoren potenzirt, indem man sie successive mit jedemeinzelnen Faktor potenzirt d. h. indem man sie zuerst mit dem ersten Faktor potenzirt, was herauskommt, mit dem 2ten Faktor u. s. f.

56. Diese 5 Sätze über Potenzen mit ganzen positiven Exponenten gelten sammt ihren Umkehrungen auch noch, wenn die Exponenten negative ganze Zahlen sind.

1) Es wäre demnach zuerst zu zeigen, dass auch die Multiplikation der Potenzen mit negativen Exponenten durch Addition dieser Exponenten vollzogen wird, dass also

$$a^{-m} . a^n = a^{-m+n}$$
$$a^m . a^{-n} = a^{m-n} \text{ und}$$
$$a^{-m} . a^{-n} = a^{-m-n}$$

Wenn man sich der Sätze über Multiplikation und Division der Potenzen mit gleichen Grundfaktoren und positiven Exponenten, ferner der Bedeutung einer Potenz mit negativen Exponenten erinnert, so ergibt sich unmittelbar:

$$a^{-m} . a^n = \frac{1}{a^m} . a^n = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m+n}, \text{ ferner}$$

$$a^m . a^{-n} = a^m . \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ und endlich}$$

$$a^{-m} . a^{-n} = \frac{1}{a^m} . \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}, \text{ was zu zeigen war.}$$

2) Auf gleiche Weise kann die in Nro. 34 aufgestellte Divisionsregel auch für Potenzen mit negativen Exponenten nachgewiesen, also gezeigt werden, dass

$$\alpha)\quad a^{-m} : a^n = a^{-m-n};$$
$$\beta)\quad a^m : a^{-n} = a^{m+n} \text{ und}$$
$$\gamma)\quad a^{-m} : a^{-n} = a^{-m+n}.$$

Man hat nämlich wieder:

$$a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m \,.\, a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}; \text{ ferner}$$

$$a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \times \frac{a^n}{1} = a^{m+n}; \text{ endlich}$$

$$a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{a^n}{1} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m+n}.$$

3) Es ist auch $(ab)^{-m} = a^{-m}b^{-m}$; denn

$$(ab)^{-m} = \frac{1}{(ab)^m} = \frac{1}{a^m b^m} = \frac{1}{a^m} \,.\, \frac{1}{b^m} = a^{-m} \,.\, b^{-m} \text{ nach Nro 34, } \gamma.$$

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}}$; denn

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \frac{1}{\frac{a^m}{b^m}} = 1 : \frac{a^m}{b^m} = \frac{b^m}{a^m} = \frac{1}{a^m} \,.\, b^m.$$

Nun ist aber $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$; allein auch statt b^m kann man setzen: $\frac{1}{b^{-m}}$; denn da $b^{-m} = \frac{1}{b^m}$, so wird $\frac{1}{b^{-m}} = \frac{1}{\frac{1}{b^m}} = b^m$ sein. Aus unserer Definition einer Potenz mit negativem Exponenten folgt daher mit Nothwendigkeit, dass eine Potenz mit positivem Exponenten auch gleich der Einheit, dividirt durch dieselbe Potenz mit negativem Exponenten gesetzt werden darf.

Wir hatten nun $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{a^m} \,.\, b^m = a^{-m} \,.\, b^m$ und diess ist $= a^{-m} \,.\, \frac{1}{b^{-m}} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}}$; somit $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}}$, was z. b. w.

5. Endlich bleibt noch zu zeigen, dass auch $(a^m)^n = a^{mn}$ wenn m oder n oder beide zugleich negativ sind, dass also

$$(a^m)^{-n} = a^{-mn}$$

$$(a^{-m})^n = a^{-mn}$$

und $(a^{-m})^{-n} = a^{mn}$ sein.

Es ist $(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}$

ferner $(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}$

Endlich $(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n} = \frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} = a^{mn}$,

indem man nur Zähler und Nenner des ganzen Bruches mit a^{mn} multiplizirt.

Die Umkehrungen brauchen nicht besonders bewiesen zu werden; denn wenn $A = B$, so ist selbstverständlich auch $B = A$.

Es gelten somit die in Nro. 54 und 55 für Potenzen mit positiven Exponenten bewiesenen Sätze auch dann noch, wenn die Exponenten negativ sind.

B. Lehre von den Wurzelgrösssen.

57. Die Gleichung $a^m = b$ (1) gibt, wie wir in Nro. 7 der Einleitung gesehen haben, zu 3 verschiedenen Aufgaben Anlass, deren 2te durch die aus (1) hervorgehende Gleichung

$$a = \sqrt[m]{b} \quad (2)$$

angedeutet wird. Man versteht unter $\sqrt[m]{b}$ jede Zahl, welche, zur $m$ten Potenz erhoben, b gibt. Ist $m = 2$, so lässt man den Wurzelindex 2 ganz weg und schreibt bloss $\sqrt{b}$ statt $\sqrt[2]{b}$.

Wie man aus geometrischen Gründen die 2te Potenz einer Zahl auch ihr Quadrat, die 3te Potenz auch ihren Cubus nennt, so wird auch umgekehrt die 2te Wurzel aus einer Zahl Quadratwurzel, die 3te Wurzel aber Cubikwurzel genannt.

So lange die Gleichung (2) wirklich aus Gleichung (1) abgeleitet gedacht wird d. h. so lange b wirklich durch Potenzirung einer ganzen Zahl a entstand, wird auch die Wurzelausziehung nur auf ganze Zahlen führen, d. h. $\sqrt[m]{b}$ eine ganze Zahl sein. Lässt man aber diese Beschränkung fallen, so wird der Radikand b keineswegs mehr immer eine vollkommene $m$te Potenz sein und es führt dann die Wurzelausziehung auf Zahlen, die wir bisher noch nicht kannten, nämlich auf Zahlen, die weder durch die Einheit, noch durch

Theile der Einheit ausdrückbar sind und die wir desshalb **inkommensurabel** nennen. So sind $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{48}$, $\sqrt[5]{34}$ solche Zahlen, die — wie wir erst später genau nachweisen werden — weder durch die Einheit sich ausdrücken lassen, noch auch durch einen Bruch (Quotient zweier ganzen Zahlen) darstellbar sind. Man nennt solche inkommensurable Wurzelgrössen auch etwa **irrational** im Gegensatz zu den **rationalen** Grössen, die kein Wurzelzeichen enthalten, oder bei welchen wenigstens das Wurzelzeichen durch wirkliche Ausziehung der Wurzel weggeschafft werden kann, wie bei $\sqrt{36}$, was $= \pm 6$.

58. Die Quadratwurzel aus einer Zahl hat immer **zwei** Werthe, welche absolut gleich, im Vorzeichen aber verschieden sind. So ist $\sqrt{49} = +7$, aber auch $= -7$; denn $+7$ sowol als -7 geben, zum Quadrat erhoben, $+49$. Ebenso hat — wie wir später zeigen werden — die 3te Wurzel aus einer Zahl 3, die 4te Wurzel 4, die $m$te Wurzel endlich m verschiedene Werthe.

Wenn wir nun unter $\sqrt[m]{a}$ jede der Zahlen verstehen, welche, zur $m$ten Potenz erhoben, a geben, so hat also $\sqrt[m]{a}$ m verschiedene Bedeutungen und man nennt dann $\sqrt[m]{a}$ eine **algebraische Wurzelgrösse**. Bei den nun folgenden Entwickelungen verstehen wir unter $\sqrt[m]{a}$ nur den **einen**, durch unmittelbare Wurzelausziehung erhältlichen Werth, der, zur $m$ten Potenz erhoben, a gibt und nennt die Wurzelgrösse in diesem Sinne eine **arithmetische Wurzelgrösse**. So wäre die arithmetische Wurzelgrösse $\sqrt[3]{125} = 5$ und $\sqrt[3]{-125} = -5$, während die algebraische Wurzelgrösse $\sqrt[3]{125}$ ausser 5 noch 2 andere Werthe hat.

59. **Eine absolute Zahl a kann nicht mehr als eine absolute $m$te Wurzel haben d. h. es gibt nicht zwei dem absoluten Werthe nach verschiedene Zahlen, welche, zur $m$ten Potenz erhoben, gleich a sein könnten.** Denn gesetzt für einen Augenblick, es gäbe 2 solche, ihrem absoluten Werthe nach verschiedene $m$te Wurzeln aus a, etwa α und β, so müsste die eine davon die grössere sein. Gesetzt $\alpha > \beta$, dann müsste auch $\alpha^2 > \beta^2$, $\alpha^3 > \beta^3$ u. s. f., endlich $\alpha^m > \beta^m$ sein. Da aber jede derselben eine $m$te Wurzel aus a ist, so müsste $\alpha^m = a$ und $\beta^m = a$ d. h. a hätte zwei verschiedene absolute Werthe, was absurd.

60. Die Ausziehung der *m*ten Wurzel aus einer Potenz, deren Exponent ein Vielfaches vom Wurzelindex ist, wird vollzogen, indem man den Exponenten durch den Wurzelindex dividirt und den Quotienten als Exponenten der nämlichen Basis beibehält.

So ist z. B. $\sqrt[7]{a^{28}} = a^{\frac{28}{7}} = a^4$; $\sqrt[5]{a^{30}} = a^{\frac{30}{5}} = a^6$; allgemein $\sqrt[m]{a^{mr}} = a^{\frac{mr}{m}} = a^r$.

Denn $\sqrt[7]{a^{28}}$, $\sqrt[5]{a^{30}}$, $\sqrt[m]{a^{mr}}$ bedeuten Grössen, welche zur 7ten, 5ten, *m*ten Potenz erhoben, beziehungsweise a^{28}, a^{30} und a^{mr} geben. Allein a^4, a^6 und a^r genügen diesen Bedingungen; denn $(a^4)^7 = a^{28}$, $(a^6)^5 = a^{30}$ und $(a^m)^r = a^{mr}$ nach No. 54 (5).

Zusatz. Ist der Exponent der Potenz nicht theilbar durch den Wurzelindex, so kann man die Wurzelausziehung bloss andeuten, nicht wirklich vollziehen z. B. $\sqrt[5]{a^7}$, $\sqrt[11]{a^9}$. Diese Wurzelgrössen sind dann irrational, während $\sqrt[5]{a^{20}}$ auf eine rationale Grösse a^4 zurückgeführt werden kann.

Wir gehen nun an die Rechnung mit Wurzelgrössen und werden nacheinander die Multiplikation und Division von Wurzelgrössen mit gleichen Indices, die Potenzirung, Radizirung und Transformation von Wurzelgrössen behandeln.

61. Es ist $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$ (1)

Um die Richtigkeit dieser Gleichung zu beweisen, zeigen wir nur, dass beide Seiten Gleiches bedeuten. Von der rechten Seite $\sqrt[m]{ab}$ kennen wir unmittelbar die Bedeutung; sie repräsentirt eine Grösse, welche, zur *m*ten Potenz erhoben, die Grösse *ab* unter dem Wurzelzeichen gibt. Aber auch die linke Seite $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$ hat die Eigenschaft, zur *m*ten Potenz erhoben, die Grösse *ab* unter dem Wurzelzeichen zu geben. Denn

$$\left(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}\right)^m = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m \cdot \left(\sqrt[m]{b}\right)^m \text{ nach No. 55 (3).}$$

Allein $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m$ ist $= a$ unmittelbar nach der Bedeutung von $\sqrt[m]{a}$; ebenso $\left(\sqrt[m]{b}\right)^m = b$; daher $\left(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}\right)^m = ab$.

Es hat somit das Produkt $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$ die Eigenschaft, zur *m*ten Potenz erhoben, *ab* zu geben, ist also $= \sqrt[m]{ab}$.

Nun sind $\sqrt[m]{a}$ und $\sqrt[m]{b}$ zwei Wurzelgrössen mit gleichen Indices; ab ist das Produkt der Grössen a und b unter dem Wurzelzeichen; die Gleichung (1) heisst demnach in Worten:

Wurzelgrössen mit gleichen Indices werden mit einander multiplizirt, indem man die Grössen unter dem Wurzelzeichen mit einander multiplizirt und aus dem Produkt die nämliche Wurzel zieht.

62. $$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

Denn die rechte Seite hat vermöge ihrer Bedeutung die Eigenschaft, zur $m$ten Potenz erhoben, $\frac{a}{b}$ zu geben. Dieselbe Eigenschaft besitzt aber auch der links stehende Quotient der beiden Wurzelgrössen. Wir können denselben zunächst in Bruchform darstellen; also $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$ setzen. Allein nach No. 54 (4) ist

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{\left(\sqrt[m]{a}\right)^m}{\left(\sqrt[m]{b}\right)^m} = \frac{a}{b};$$

folglich $$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

d. h. Wurzelgrössen mit gleichen Indices werden durch einander dividirt, indem man die Grössen unter dem Wurzelzeichen durch einander dividirt und aus dem Quotienten dieselbe Wurzel zieht.

63. $$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$$

Das folgt unmittelbar aus der Bedeutung der Potenz und dem in 62 entwickelten Satz über Multiplikation von Wurzelgrössen mit gleichen Indices.

Es ist nämlich $$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} \ldots.$$
$$= \sqrt[m]{a \cdot a \cdot a \ldots.} = \sqrt[m]{a^n}$$

d. h. Eine Wurzelgrösse wird mit einer positiven ganzen Zahl potenzirt, indem man die Grösse unter dem Wurzelzeichen mit dieser Zahl potenzirt und aus dem Resultat die nämliche Wurzel zieht.

64. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Die rechte Seite $\sqrt[mn]{a}$ hat vermöge ihrer Bedeutung die Eigenschaft, zur *mn*ten Potenz erhoben, a zu geben. Dieselbe Eigenschaft besitzt auch die linke Seite; denn nach No. 55 (5) ist

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right]^n$$

Allein $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m = \sqrt[n]{a}$ (nach Bedeutung der Wurzelgrösse) und $\left[\sqrt[n]{a}\right]^n = a$ aus demselben Grunde.

Somit $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = a$ und

daher $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

d. h. Aus einer Wurzelgrösse wird die *m*te Wurzel gezogen, indem man ihr'en Index mit *m* multiplizirt und das Produkt als Wurzelindex der nämlichen Grösse setzt.

65. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mr]{a^{nr}}$.

Wir zeigen auch da wieder, dass beide Seiten Gleiches bedeuten. $\sqrt[mr]{a^{nr}}$ stellt eine Grösse vor, welche, zur *mr*ten Potenz erhoben, a^{nr} gibt. Allein auch $\sqrt[m]{a^n}$ hat diese Eigenschaft. Denn $\left[\sqrt[m]{a^n}\right]^{mr} = \left[\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^m\right]^r$.

Nun ist aber $\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^m = a^n$ und $(a^n)^r = a^{nr}$.

Somit $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mr]{a^{nr}}$

d. h. man kann bei einer Wurzelgrösse Index und Exponent der Grösse unter dem Wurzelzeichen mit derselben positiven ganzen Zahl multipliziren, ohne den Werth der Wurzelgrösse zu ändern.

Zusatz: Von diesem Satze macht man Gebrauch, um Wurzelgrössen mit verschiedenen Indices mit einander zu multipliziren oder durch einander zu dividiren. Man darf sie nämlich nur zuerst auf den nämlichen Index bringen und dann nach den Sätzen 61 und 62 verfahren. Gesetzt z. B. man hätte zu bilden

$\sqrt[5]{a^4} \cdot \sqrt[7]{b^6}$, so würden wir Index und Exponent der Grösse unter dem Wurzelzeichen einer jeden Wurzelgrösse mit dem Index der andern multipliziren. Man bekäme so: $\sqrt[5]{a^4} = \sqrt[35]{a^{28}}$

$$\sqrt[7]{b^6} = \sqrt[7 \cdot 5]{b^{6 \cdot 5}} = \sqrt[35]{b^{30}},$$

somit $\sqrt[5]{a^4} \cdot \sqrt[7]{b^6} = \sqrt[35]{a^{28}} \cdot \sqrt[35]{b^{30}} = \sqrt[35]{a^{28} b^{30}}$.

Wären mehrere Wurzelgrössen auf denselben Index zu reduziren, so würde man erst das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller Indices aufsuchen und dann bei jeder Wurzelgrösse Index und Exponent der Grösse unter dem Wurzelzeichen mit der Zahl multipliziren, welche angibt, wie oft ihr Index in dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen aller Indices enthalten ist.

Wir haben von Nro. 61 bis 65 nach einander folgende Sätze bewiesen:

1. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$

2. $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$

3. $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$

4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

5. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mr]{a^{nr}}$

66. Durch Umkehrung dieser Gleichungen bekommen wir fünf neue Sätze:

1. $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$

2. $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$

3. $\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$

4. $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

5. $\sqrt[mr]{a^{nr}} = \sqrt[m]{a^n}$

welche wir hier in Worten ausdrücken wollen:

1. $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$

d. h. man kann die *m*te Wurzel aus einem Produkt ziehen, indem man aus jedem einzelnen Faktor die

*m*te Wurzel zieht und die Resultate mit einander multiplizirt.

Mit Hülfe dieses Satzes kann man Wurzelgrössen oft vereinfachen, indem man die Grösse unter dem Wurzelzeichen in 2 Faktoren zerlegt, aus deren einem man die Wurzel ziehen kann. Z. B. $\sqrt{50a^9b^{10}} = \sqrt{25a^8b^{10}.2a} = 5a^4b^5\sqrt{2a}$.
Ferner: $\sqrt[3]{128a^{17}b^{12}c} = \sqrt[3]{64a^{15}b^{12}.2a^2c} = 4a^5b^4\sqrt[3]{2a^2c}$.

Hätte man allgemein $\sqrt[m]{a^n}$ zu ziehen, wo $n > m$, so dürfte man nur die in n enthaltenen Vielfachen von m herausheben. Wenn z. B. $n = mq + r$, so wäre

$$a^n = a^{mq+r} = a^{mq} \,.\, a^r \text{ und somit}$$

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a^{mq} \,.\, a^r} = a^q\sqrt[m]{a^r}.$$

2.
$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

d. h. die *m*te Wurzel aus einem Bruch ist gleich der *m*ten Wurzel aus dem Zähler, dividirt durch die *m*te Wurzel aus dem Nenner.

Man wird von diesem Satz Gebrauch machen, so oft Zähler und Nenner vollkommen *m*te Potenzen sind, ja selbst dann noch, wenn nur der Nenner eine vollkommene *m*te Potenz. Ist aber der Nenner keine vollkommene Potenz oder gar weder Zähler noch Nenner, so läge in seiner Anwendung keine Vereinfachung, sondern eine Complikation.

So würde man $\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{2}{3}$ setzen.

Ebenso $\frac{\sqrt{419}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{419}}{4}$.

Dagegen nicht $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$ und

noch weniger $\sqrt{\frac{7}{5}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

weil die Berechnung von $\sqrt{\frac{7}{5}}$ mittelst $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$ wohl die 3 fache Arbeit erfordern würde.

3.
$$\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$$

d. h. Man kann aus einer Potenz die $m$te Wurzel auch dadurch ziehen, dass man aus der Basis die $m$te Wurzel zieht und das Resultat zur nämlichen Potenz erhebt. Man wird von diesem Satze dann Gebrauch machen, wenn die Basis eine vollkommene $m$te Potenz ist. So ist z. B.

$$\sqrt[3]{125^4} = (\sqrt[3]{125})^4 = 5^4 = 625,$$

was natürlich viel einfacher zu berechnen ist, als wenn man erst 125^4 ausrechnen und dann aus dem Resultat die 3te Wurzel ziehen wollte.

4. $$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

d. h. Hat man aus einer Grösse eine Wurzel zu ziehen, deren Index ein Produkt ist aus mehreren Faktoren, so kann man die Wurzelausziehung in so viele einzelne Wurzelausziehungen verwandeln, als der Index Faktoren enthält.

Z. B. $$\sqrt[6]{729} = \sqrt[3.2]{729} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{729}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

oder auch: $$\sqrt[6]{729} = \sqrt[3.2]{729} = \sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt{9} = 3.$$

5. $$\sqrt[mr]{a^{nr}} = \sqrt[m]{a^n}$$

d. h. Man kann auch bei einer Wurzelgrösse, ohne ihren Werth zu ändern, Index und Exponent der Grösse unter dem Wurzelzeichen durch dieselbe Zahl dividiren, wofern nämlich beide durch die letzte theilbar sind.

67. Ableitung spezieller Verfahren für Potenzirung und Radizirung einer Wurzelgrösse.

a. Hat man eine Wurzelgrösse zu potenziren mit einer Zahl, die in dem Index der Wurzelgrösse als Faktor enthalten ist, so bekommt man durch Anwendung des Satzes 63 ein Resultat, das sich noch vereinfachen lässt, weil Index und Exponent der Grösse unter dem Wurzelzeichen einen gemeinschaftlichen Faktor enthalten. Hat man z. B. $(\sqrt[21]{a^4})^7$, so ist das $= \sqrt[21]{a^{28}} = \sqrt[3]{a^4}$.

Dieses letzte Resultat in der einfachsten Form hätte man unmittelbar aus $\sqrt[21]{a^4}$ erhalten, wenn man den Wurzelindex 21 durch 7 dividirt und den Quotienten 3 als Wurzelindex der nämlichen Grösse a^4 beibehalten hätte.

Statt daher eine Wurzelgrösse mit einer Zahl n zu potenziren, indem man den Radikanden mit n potenzirt und aus dem Resultat die nämliche Wurzel zieht, kann man auch den Wurzelindex durch n dividiren und den Quotienten als Index der sonst unveränderten Grösse beibehalten. Erlaubt ist aber dieses 2te Verfahren nur, wenn der Wurzelindex theilbar ist durch den Exponenten, mit dem die Wurzelgrösse zu potenziren ist.

Wollte man dieses Verfahren auch da anwenden, wo der Wurzelindex nicht theilbar ist durch den Exponenten, wie z. B. in $(\sqrt[12]{a})^7$, so bekäme man $\sqrt[\frac{12}{7}]{a}$, also eine Wurzelgrösse mit gebrochenem Index. Eine solche hat an sich keinen Sinn. Wenn man aber dabei sich der Entstehung des Ausdruckes erinnert, so kann man sich des Symbols $\sqrt[\frac{12}{7}]{a}$ bedienen als einer zweiten Bezeichnung für $(\sqrt[12]{a})^7$.

Das thut man in der That und versteht dann unter einer Wurzelgrösse mit gebrochenen Index immer eine Wurzelgrösse, deren Index gleich ist dem Zähler des gebrochenen Wurzelexponenten, erhoben zur so vielten Potenz, als der Nenner anzeigt. Somit hätte man

$$\sqrt[\frac{3}{4}]{a} = (\sqrt[3]{a})^4$$

$$\sqrt[\frac{12}{13}]{b} = (\sqrt[12]{b})^{13}$$

b. Nach No. 64 hat man

$$\sqrt[5]{\sqrt[9]{a^{20}}} = \sqrt[45]{a^{20}} = \sqrt[9]{a^4}.$$

Das vereinfachte Resultat $\sqrt[9]{a^4}$ könnte man auch sofort erhalten, wenn man den Exponenten 20 des Radikanden durch 5 dividirte und das Uebrige unverändert liesse. Man kann folglich aus einer Wurzelgrösse die $m$te Wurzel auch dadurch ziehen, dass man den Exponenten der Grösse unter dem Wurzelzeichen durch m dividirt, mit anderen Worten: aus dem Radikanden die $m$te Wurzel zieht und den Wurzelindex unverändert beibehält. Anwendbar ist dieses zweite Verfahren aber nur, wenn der Exponent des Radikanden durch m theilbar ist.

Wir haben demnach sowol für die Potenzirung einer Wurzelgrösse als für deren Radizirung zwei Verfahren, ein allgemeines,

in allen Fällen anwendbares, entwickelt in den Sätzen 64 und 65, und ein besonderes, nur unter gewissen Bedingungen anwendbares, das in dieser No. entwickelt wurde.

c. In No. 60 hatten wir, dass

$$\sqrt[m]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{m}} = a^p$$

d. h. man kann aus einer Potenz die $m$te Wurzel ziehen, indem man den Epxonenten der Potenz durch m dividirt und den Quotienten als Exponent der nämlichen Basis beibehält. Erlaubt ist jedoch dieses Verfahren nur, wenn der Exponent der Potenz durch den Wurzelindex theilbar ist. Wollte man das gleiche Verfahren auch da anwenden, wo diese Bedingung nicht erfüllt ist, z. B. auf $\sqrt[5]{a^{12}}$, so bekäme man $a^{\frac{12}{5}}$, also eine Potenz mit gebrochenem Exponenten d. h. ein an sich völlig sinnloses Resultat. Man kann sich jedoch des Symbols $a^{\frac{12}{5}}$ bedienen als einer zweiten Bezeichnung für $\sqrt[5]{a^{12}}$. Das geschieht nun auch in der That und wir wollen in der Folge unter einer Potenz mit gebrochenem Exponenten stets eine Wurzelgrösse verstehen, deren Index gleich ist dem Nenner des Bruchexponenten, während der Zähler des letzten als Exponent des Radikanden erscheint. Es wäre somit $a^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{a^7}$

$$b^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{b^3} \text{ u. s. f.}$$

68. Für Potenzen und Wurzelgrössen mit gebrochenen Exponenten gelten ganz dieselben Regeln, wie für Potenzen und Wurzelgrössen mit ganzen Exponenten.

Wir haben also zunächst zu zeigen, dass

$$1.\quad a^{\frac{n}{m}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{n}{m}+\frac{r}{s}}$$

$$2.\quad a^{\frac{n}{m}} : a^{\frac{n}{s}} = a^{\frac{n}{m}-\frac{r}{s}}$$

$$3.\quad (ab)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n}{m}} \cdot b^{\frac{n}{m}}$$

$$4.\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}$$

$$5.\quad \left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{n}{m}\cdot\frac{r}{s}}$$

Wir dürfen uns dabei bloss auf die Bedeutung einer Potenz mit gebrochenem Exponenten und auf die über Potenzen und Wurzelgrössen mit ganzen Exponenten und Indices bewiesenen Sätze stützen.

Es ist $a^{\frac{n}{m}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[ms]{a^{ns}} \cdot \sqrt[ms]{a^{rm}} \cdot \sqrt[ms]{a^{ns} \cdot a^{rm}}$
$= \sqrt[ms]{a^{ns+rm}} = a^{\frac{ns+rm}{ms}} = a^{\frac{ns}{ms}+\frac{rm}{ms}} = a^{\frac{n}{m}+\frac{r}{s}}$.

2. $a^{\frac{n}{m}} : a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[m]{a^n} : \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[ms]{a^{ns}} : \sqrt[ms]{a^{mr}} = \sqrt[ms]{\frac{a^{ns}}{a^{ms}}}$
$= \sqrt[ms]{a^{ns-mr}} = a^{\frac{ns-mr}{ms}} = a^{\frac{ns}{ms}-\frac{mr}{ns}} = a^{\frac{n}{m}-\frac{r}{s}}$.

3. $(ab)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{(ab)^n} = \sqrt[m]{a^n b^n} = \sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{b^n} = a^{\frac{n}{m}} \cdot b^{\frac{n}{m}}$.

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \sqrt[m]{\frac{a^n}{b^m}} = \frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[m]{b^n}} = \frac{a^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n}{m}}}$.

5. $\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^r} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^r} = \sqrt[s]{\sqrt[m]{a^{nr}}} =$
$\sqrt[ms]{a^{nr}} = a^{\frac{nr}{ms}} = a^{\frac{n}{m}\cdot\frac{r}{s}}$.

Es bleibt nun noch ferner zu zeigen, dass

1. $\sqrt[\frac{n}{m}]{a} \cdot \sqrt[\frac{n}{m}]{b} = \sqrt[\frac{n}{m}]{ab}$

2. $\sqrt[\frac{n}{m}]{a} : \sqrt[\frac{n}{m}]{b} = \sqrt[\frac{n}{m}]{\frac{a}{b}}$

3. $\left[\sqrt[\frac{n}{m}]{a}\right]^{\frac{r}{s}} = \sqrt[\frac{n}{m}]{a^{\frac{r}{s}}}$

4. $\sqrt[\frac{n}{m}]{\sqrt[\frac{r}{s}]{a}} = \sqrt[\frac{n}{m}\cdot\frac{p}{q}]{a}$

5. $\sqrt[\frac{n}{m}]{a^{\frac{r}{s}}} = \sqrt[\frac{n}{m}\cdot\frac{r}{s}]{a^{\frac{r}{s}\cdot\frac{p}{q}}}$ sei.

Auch da dürfen wir uns nur an die Bedeutung einer Wurzelgrösse mit gebrochenem Exponenten (Nro. 67, a) erinnern. Man hat:

1. $\sqrt[\frac{n}{m}]{a} \cdot \sqrt[\frac{n}{m}]{b} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^m$ nach Satz 56 (3); ferner ist

$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^m = \left(\sqrt[n]{ab}\right)^m = \sqrt[\frac{n}{m}]{ab}$, weil ja $\sqrt[\frac{n}{m}]{ab}$ gar nichts anderes bedeutet als $\left(\sqrt[n]{ab}\right)^m$.

2. $\sqrt[\frac{n}{m}]{a} : \sqrt[\frac{n}{m}]{b} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m : \left(\sqrt[n]{b}\right)^m = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^m$ nach 55 (4) $=$

$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^m$, wofür man wieder schreiben darf: $\sqrt[\frac{n}{m}]{\frac{a}{b}}$.

3. $\left(\sqrt[\frac{n}{m}]{a}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[\frac{n}{m}]{a}\right)^r} = \sqrt[s]{\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right]^r} = \sqrt[s]{\left[\sqrt[n]{a^m}\right]^r} =$

$\sqrt[s]{\sqrt[n]{a^{mr}}} = \sqrt[ns]{a^{mr}} = a^{\frac{mr}{ns}} = \left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^m} = \left[\sqrt[n]{a^{\frac{r}{s}}}\right]^m$

$= \sqrt[\frac{n}{m}]{a^{\frac{r}{s}}}$.

4. $\sqrt[\frac{n}{m}]{\sqrt[\frac{r}{s}]{a}} = \left[\sqrt[n]{\sqrt[\frac{r}{s}]{a}}\right]^m = \left[\sqrt[n]{\left(\sqrt[r]{a}\right)^s}\right]^m = \left[\sqrt[n]{\sqrt[r]{a^s}}\right]^m$

$\left[\sqrt[nr]{a^s}\right]^m = \sqrt[nr]{a^{ms}} = \left[\sqrt[nr]{a}\right]^{ms} = \sqrt[\frac{n}{m}\frac{r}{s}]{a}$, weil $\sqrt[\frac{n}{m}\frac{r}{s}]{a}$ ja gar nichts anderes bedeutet, als $\left(\sqrt[nr]{a}\right)^{ms}$.

5. Um endlich zu zeigen, dass auch

$$\sqrt[\frac{n}{m}]{a^{\frac{r}{s}}} = \sqrt[\frac{n}{m}\cdot\frac{p}{q}]{a^{\frac{r}{s}\cdot\frac{p}{q}}}$$

, gehen wir von dem letzten Ausdrucke aus und haben:

$\sqrt[\frac{n}{m}\cdot\frac{p}{q}]{a^{\frac{r}{s}\cdot\frac{p}{q}}} = \sqrt[\frac{np}{mq}]{a^{\frac{rp}{sq}}} = \left[\sqrt[np]{a^{\frac{rp}{sq}}}\right]^{mq} = \left[\sqrt[np]{\sqrt[sq]{a^{rp}}}\right]^m$

$\left[\sqrt[npsq]{a^{rp}}\right]^{mq} = \sqrt[npsq]{a^{rpmq}}$, wo wir jetzt Index und Exponenten der Grösse unter dem Wurzelzeichen dividiren können durch den gemeinschaftlichen Faktor pq, wodurch wir bekommen:

$$\sqrt[ns]{a^{mr}} = a^{\frac{mr}{ns}} = \left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^m} = \left[\sqrt[n]{a^{\frac{r}{s}}}\right]^m = \sqrt[\frac{n}{m}]{a^{\frac{r}{s}}},$$

da letzteres gar nichts anderes bedeutet als $\left(\sqrt[n]{a^{\frac{r}{s}}}\right)^m$.

Anmerkung. Wir erwähnen hier noch der Wurzelgrössen mit negativen Indices. Wenn wir nämlich die Relation haben $a^{-m} = c$, so muss es auch möglich sein, aus c und $-m$ das a zu bestimmen, und nach der bisherigen Ausdrucksweise wäre dann a die $-m$te Wurzel aus c oder $a = \sqrt[-m]{c}$. Um zu wissen, welche Bedeutung wir dem Ausdruck $\sqrt[-m]{c}$ beizulegen haben, dürfen wir

nur die ursprüngliche Relation $a^{-m} = c$ transformiren in die gleichbedeutende $\frac{1}{a^m} = c$ oder $a^m c = 1$ oder $a^m = \frac{1}{c} = c^{-1}$; daher ist dann $a = \sqrt[m]{c^{-1}}$. Wenn also $a^{-m} = c$, so ist auch $a^m = c^{-1}$, und unter a oder der — $m$ten Wurzel aus c haben wir dann nichts Anderes zu verstehen, als die $m$te Wurzel aus c^{-1}. Es liessen sich dann auch die Regeln für die Rechnung der Wurzelgrössen mit positiven Indices eben so gut auf die Wurzelgrössen mit negativen Indices ausdehnen.

So wäre z. B.: $\sqrt[-m]{a} \,.\, \sqrt[-m]{b} = \sqrt[-m]{ab}$; denn da $\sqrt[-m]{a} = \sqrt[m]{a^{-1}}$ und $\sqrt[-m]{b} = \sqrt[m]{b^{-1}}$, so hat man:

$$\sqrt[-m]{a} \,.\, \sqrt[-m]{b} = \sqrt[m]{a^{-1}} \,.\, \sqrt[m]{b^{-1}} = \sqrt[m]{a^{-1} \,.\, b^{-1}} = \sqrt[m]{(ab)^{-1}} = \sqrt[-m]{ab}.$$

Ebenso hätte man: $\sqrt[-m]{a} : \sqrt[-m]{b} = \sqrt[-m]{\frac{a}{b}}$; denn

$$\sqrt[-m]{a} : \sqrt[-m]{b} = \sqrt[m]{a^{-1}} : \sqrt[m]{b^{-1}} = \sqrt[m]{\frac{a^{-1}}{b^{-1}}} = \sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}} = \sqrt[-m]{\frac{a}{b}} \text{ u. s. f.}$$

C. Potenzirung eines Binoms und Polynoms mit 2 und 3 und Ausziehung der 2ten und 3ten Wurzel.

69. $(a)^2 = a \,.\, a = a^2$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b+c)^2 = (a+b)^2+2(a+b)c+c^2 = a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2$

$(a+b+c+d)^2 = (a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2 = a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2.$

Wenn wir $a+b$ quadriren, so finden wir durch unmittelbare Multiplikation $a^2+2ab+b^2$. Es kommen somit beim Quadrat der zweitheiligen Grösse $a+b$ zum Quadrat des 1sten Gliedes a noch 2 Glieder hinzu, nämlich 1) $2ab$, d. h. das doppelte Produkt aus dem 1sten Glied a in das zweite b, und 2) b^2, d. h. das Quadrat des 2ten Gliedes, so dass also das Quadrat eines Binoms immer besteht aus: 1) dem Quadrat des 1sten Gliedes, 2) dem doppelten Produkt aus dem 1sten Glied in das 2te und 3) dem Quadrat des 2ten Gliedes. Wollen wir nun ein Trinom $(a+b+c)$ zum Quadrat erheben, so können wir dasselbe zunächst als ein Binom

betrachten, dessen 1stes Glied $a+b$ und dessen 2tes Glied c ist; das Quadrat davon wird daher nach dem Vorigen sein müssen:

$(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$, und setzen wir für $(a+b)^2$ den Werth $a^2+2ab+b^2$, so erhalten wir:

$(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2$. Hierbei ist $a+b$ die Summe der beiden 1sten Glieder, c das 3te Glied, daher $2(a+b)c$ das doppelte Produkt aus der Summe der beiden ersten Glieder in das 3te und c^2 das Quadrat des 3ten Gliedes, so dass also das Quadrat einer 3theiligen Grösse bestände aus: 1) dem Quadrat des 1sten Gliedes, 2) dem doppelten Produkt aus dem 1sten Glied in das 2te, 3) dem Quadrat des 2ten Gliedes, 4) dem doppelten Produkt aus der Summe der beiden ersten Glieder in das 3te und 5) dem Quadrat des 3ten Gliedes. Wollte man das Quadrat des viergliedrigen Polynoms $a+b+c+d$ bilden, so könnte man dieses wieder zunächst als ein Binom ansehen, dessen 1stes Glied $=$ $a+b+c$, dessen 2tes Glied $= d$ wäre und, man hätte demnach: $(a+b+c+d)^2 = (a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2$ oder indem man für $(a+b+c)^2$ seinen Werth setzt:

$$(a+b+c+d)^2 = a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2,$$

wobei $2(a+b+c)d$ das doppelte Produkt aus der Summe der 3 ersten Glieder $(a+b+c)$ in das 4te d und d^2 das Quadrat des 4ten Gliedes ist. Indem man auf die nämliche Weise fortfährt, findet man ganz allgemein, dass das Quadrat eines beliebigen Polynoms enthalten muss: 1) das Quadrat des 1sten Gliedes, 2) das doppelte Produkt aus dem 1sten Glied in das 2te, 3) das Quadrat des 2ten Gliedes, 4) das doppelte Produkt aus der Summe der beiden 1sten Glieder in das 3te, 5) das Quadrat des 3ten Gliedes, 6) das doppelte Produkt aus der Summe der 3 ersten Glieder in das 4te, 7) das Quadrat des 4ten, 8) das doppelte Produkt aus der Summe der 4 ersten Glieder in das 5te, 9) das Quadrat des 5ten, u. s. f.

So wäre z. B.

$$(5x^3y-3x^2y^2+4xy^3+2y^4)^2=(5x^3y)^2+2\,.\,(5x^3y)\,.\,(-3x^2y^2)+$$
$$(-3x^2y^2)^2+2(5x^3y-3x^2y^2)\,.\,4xy^3+(4xy^3)^2+$$
$$2(5x^3y-3x^2y^2+4xy^3)\,.\,2y^4+(2y^4)^2$$

oder wenn wir entwickeln:

$(5x^3y)^2=25x^6y^2$

$2(5x^3y)\,.\,(-3x^2y^2)=-30x^5y^3$

$+(-3x^2y^2)^2=+9x^4y^4$

$2(5x^3y-3x^2y^2)\,.\,4xy^3=40x^4y^4-24x^3y^5$

$$+(4xy^3)^2 = 16x^2y^6$$
$$+2(5x^3y-3x^2y^2+4xy^3) \,.\, 2y^4 = 20x^3y^5-12x^2y^6+16xy^7$$
$$+(2y^4)^2 \quad = \quad 4y^8$$
$$(5x^3y-3x^2y^2+4xy^3+2y^4)^2 = 25x^6y^2-30x^5y^2+49x^4y^4$$

$-4x^3y^5+4x^2y^6+16xy^7+4y^8$ ist demnach das nach der Reduktion der gleichartigen Glieder nach fallenden Potenzen von x geordnete Quadrat unsers Polynoms.

Man berechne in gleicher Weise:

1. $(3a^2-2ab+4b^2)^2 = \ ?$
2. $(4x^3+7x^2y-5xy^2+y^3)^2 = \ ?$
3. $(7a^4+3a^3b+5a^2b^2-2ab^3-3b^4)^2 = \ ?$
4. $(\frac{1}{2}x^6-\frac{2}{3}x^4y^2+\frac{3}{4}x^2y^4-y^6)^2 = \ ?$

70. Ausziehung der 2ten Wurzel aus einem Polynom.

$$\sqrt{25x^6y^2-30x^5y^3+49x^4y^4-4x^3y^5+4x^2y^6+16xy^7+4y^8}$$
$$= 5x^3y-3x^2y^2+4xy^3+2y^4$$
$$\underline{25x^6y^2}$$
$$10x^3y: \ -30x^5y^3+49x^4y^4-4x^3y^5+4x^2y^6+16xy^7+4y^8$$
$$\underline{-30x^5y^3+\ 9x^4y^4}$$
$$10x^3y-6x^2y^2: \quad 40x^4y^4-4x^3y^5+4x^2y^6+16xy^7+4y^8$$
$$40x^4y^4-24x^3y^5$$
$$\underline{+16x^2y^6}$$
$$10x^3y-6^2y^2+8xy^3: \quad +20x^3y^5-12x^2y^6+16xy^7+y^8$$
$$20x^3y^5-12x^2y^6+16xy^7$$
$$\underline{+4y^8}$$
$$0$$

Nach der Vorbereitung von Nr. 69 ist es leicht, die Gesetze für die Ausziehung der 2ten Wurzel aus einem gegebenen Polynom abzuleiten. Wir wollen zu dem Ende ein Polynom wählen, das wirklich durch Quadrirung eines andern entstanden, also ein vollständiges Quadrat ist und zudem veraussetzen, es folgen in demselben die Glieder genau so auf einander, wie wir in der Quadrirung fanden. Sei

$$25x^6y^2 - 30x^5y^3 + 49x^4y^4 - 4x^3y^5 + 4x^2y^6 + 16xy^7 + 4y^8$$

dieses Polynom, so wird einmal sein 1stes Glied $25x^6y^2$ das Quadrat vom 1sten Gliede der Wurzel sein und dieses daher gefunden werden, wenn wir aus $25x^6y^2$ die 2te Wurzel ziehen. Nun ist $\sqrt{25x^6y^2} = 5x^3y$; somit $5x^3y$ das 1ste Glied der Wurzel. Indem wir das Quadrat desselben vom gegebenen Polynom subtrahiren, bekommen wir als Rest: $-30x^5y^3+49x^4y^4$ + etc., woraus wir schliessen, dass das gegebene Polynom das Quadrat einer wenigstens zweitheiligen Grösse sein muss. Nun

folgt aber in dem Quadrat eines jeden Polynoms nach dem Quadrat des 1sten Gliedes der Wurzel das doppelte Produkt aus dem 1sten Glied in das 2te. Bei der gemachten Voraussetzung wird daher gleich das 1ste Glied unsers Restes das doppelte Produkt aus dem 1sten Glied in das 2te sein müssen, dieses 2te Glied daher gefunden werden, wenn man das erste Glied des Restes durch das Doppelte des ersten Gliedes der Wurzel dividirt. Nun ist $-30x^5y^3$, dividirt durch $10x^3y, = -3x^2y^2$; daher $-3x^2y^2$ das 2te Glied der Wurzel. Es frägt sich nun, ob die gefundene zweitheilige Grösse $5x^3y - 3x^2y^2$ schon die vollständige Wurzel sei. Sie wäre es, wenn sie, zum Quadrat erhoben, unserm Polynom gleich käme. Wir bilden also das Quadrat unserer zweitheiligen Grösse und subtrahiren dasselbe vom gegebenen Polynom. Allein das Quadrat des ersten Gliedes ist bereits subtrahirt; es bleibt daher nur noch zu bilden und zu subtrahiren 1. das doppelte Produkt aus dem ersten Glied in das zweite und 2., das Quadrat des zweiten Gliedes, oder, da das Doppelte des ersten Gliedes Divisor, das zweite Glied Quotient war, so können wir auch sagen: wir müssen das Produkt aus dem Divisor in den Quotienten und das Quadrat des Quotienten vom Rest subtrahiren. Wir bekommen so als neuen Rest

$$40x^4y^4 - 4x^3y^5 + 4x^2y^6 + 16xy^7 + 4y^8,$$

welcher beweist, dass die zu suchende Wurzel wenigstens 3 Glieder haben und daher das gegebene Polynom das Quadrat einer wenigstens 3gliedrigen Grösse sein muss. Nun wissen wir, dass in dem Quadrat einer mehrtheiligen Grösse nach dem Quadrat des 2ten Gliedes folgen muss das doppelte Produkt aus der Summe der beiden ersten Glieder in das 3te, also ein Produkt aus 3 Faktoren (2, Summe der beiden ersten Glieder, 3tes Glied); dieses Produkt besteht aus zwei Gliedern, nämlich dem doppelten Produkt des ersten Gliedes in das 3te und dem doppelten Produkt des 2ten Gliedes in das 3te. Weil wir aber vorausgesetzt haben, dass im gegebenen Polynom die Glieder gerade so auf einander folgen, wie sie bei der Quadrirung zum Vorschein kommen, so werden wir die 2 ersten Glieder unsers Restes ansehen müssen als enthaltend das doppelte Produkt der Summe beider ersten Glieder in das 3te und wir werden daher das 3te Glied der Wurzel finden, wenn wir diese 2 ersten Glieder des Restes durch das Doppelte des bereits gefundenen Wurzeltheiles dividiren. Die doppelte Summe beider 1sten Glieder der Wurzel

ist $=10x^3y-6x^2y^2$. Indem wir damit in die 1sten Glieder des Restes dividiren, bekommen wir im Quotienten $4xy^3$ das 3te Glied der Wurzel. Wir hätten nun wieder die gefundene 3theilige Grösse zu quadriren und dieses Quadrat vom gegebenen Polynom zu subtrahiren. Da aber das Quadrat der Summe beider ersten Glieder bereits subtrahirt wurde, so brauchen wir nur noch diejenigen Glieder zu bilden und vom Reste zu subtrahiren, um welche sich das Quadrat einer 3theiligen Grösse von dem Quadrat einer zweitheiligen unterscheidet: nämlich das doppelte Produkt aus der Summe beider ersten Glieder in das dritte und das Quadrat des dritten oder mit andern Worten: das Produkt aus dem Divisor in den Quotienten und das Quadrat des Quotienten. Der hier bleibende Rest

$$20x^3y^5-12x^2y^6+16xy^7+4y^8$$

ist uns ein Beweis, dass unser Polynom das Quadrat einer mindestens 4theiligen Grösse sein muss und dass daher in Folge der gemachten Voraussetzung die 3 ersten Glieder desselben als das doppelte Produkt aus der Summe der 3 ersten Glieder in das zu suchende 4te aufzufassen sind, dieses 4te Glied daher gefunden wird, wenn wir mit dem Doppelten des bereits gefundenen Wurzeltheiles in die ersten Glieder des Restes dividiren, wobei nach der Divisionsregel für Polynome nur das erste Glied des Dividenden (Restes) durch das erste des Divisors dividirt wird. Wir finden so $2y^4$ als 4tes Glied der Wurzel und wenn wir von dem Rest noch subtrahiren diejenigen Glieder, um welche sich das bereits abgezogene Quadrat der Summe der 3 ersten Glieder von dem Quadrat eines 4gliederigen Polynoms unterscheidet, nämlich das doppelte Produkt aus der Summe der 3 ersten Glieder in das 4te (Produkt aus Divisor in den Quotienten) und Quadrat des 4ten Gliedes oder des Quotienten, so bekommen wir als Rest Null, was uns beweist, dass die gefundene 4gliederige Grösse

$$5x^3y-3x^2y^2+4xy^3+2y^4$$

die genaue Quadratwurzel unsers Polynoms ist.

71. Wir lassen nun die Voraussetzung fallen, dass in dem gegebenen Polynom die Glieder gerade so auf einander folgen, wie sich's bei der Quadrirung ergibt und behaupten, dass das entwickelte Verfahren auch d a n n noch gilt, wenn nur das Polynom nach f a l l e n d e n oder steigenden Potenzen eines Buchstabens geordnet ist. Thatsächlich ist der Beweis bereits geleistet; denn das Polynom in No. 70 ist aus dem direkt gebildeten Quadrat von

$5x^3y - 3x^2y^2 + 4xy^3 + 2y^4$ durch Zusammenziehung der gleichartigen Glieder entstanden. Um aber die Behauptung allgemein zu erweisen, haben wir nur zu zeigen, dass wenn das gegebene Polynom ein nach fallenden Potenzen von x geordnetes Quadrat der ebenfalls nach fallenden Potenzen von x geordneten Wurzel $a+b+c+d$ ist, wenn also z. B., wie im vorigen Fall, a den Ordnungsbuchstaben x in der 3ten, b in der 2ten, c in der 1sten und d in der nullten Potenz enthält, alsdann das erste Glied unsers Polynoms $= a^2$, das erste Glied des 1sten Restes $= 2ab$, das 1ste Glied des 2ten Restes $= 2ac$ u. s. f., kurz das erste Glied eines jeden Restes das doppelte Produkt aus dem 1sten Glied der Wurzel in das zu bestimmende neue Glied sein muss, das nächste Glied daher immer gefunden wird, wenn man das 1ste Glied des geordneten Restes durch das doppelte erste Glied der Wurzel dividirt.

Da nämlich a in Bezug auf x von höherm Grade ist, als b und b von höherm Grade als c und alle folgenden Glieder, so muss das Produkt $2ab$ in Bezug auf x von höherem Grade sein, als b^2, als $2ac$ und alle folgenden Glieder, d. h. es muss $2ab$ das höchste Glied des geordneten Restes sein. Nachdem man dann das Quadrat der Summe beider ersten Glieder subtrahirt hat, so bleibt noch übrig das doppelte Produkt aus der Summe der 2 ersten Glieder in das 3te etc., also $2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2 +$ etc. oder: $2ac + 2bc + 2c^2 + 2ad + 2bd + 2cd +$ etc. Hier ist wieder, wie leicht einzusehen, $2ac$ in Bezug auf x von höherem Grade, als $2bc$, als c^2, $2ad$, $2bd$ und alle folgenden Glieder; also ist auch hier das 1ste Glied des geordneten Restes das doppelte Produkt aus dem 1sten Glied der Wurzel in das zu bestimmende 3te Glied, welches daher auf die schon beschriebene Weise gefunden wird.

Wäre umgekehrt das Polynom nach steigenden Potenzen von x geordnet, so würde a^2 auch den niedrigsten Exponenten von x enthalten und daher das 1ste Glied des gegebenen Polynoms sein; ebenso müsste das 1ste Glied jedes geordneten Restes, d. h. dasjenige Glied, welches den Ordnungsbuchstaben in der niedrigsten Potenz enthielte, das genaue Produkt sein aus dem doppelten ersten in das zu bestimmende neue Glied, so dass also das Verfahren unverändert bliebe. Wir können demnach für die Ausziehung der 2ten Wurzel folgende Regel ableiten:

Um aus einem Polynom die 2te Wurzel zu ziehen, ordnen

wir dasselbe zuerst nach den fallenden oder steigenden Potenzen des nämlichen Buchstabens und ziehen alsdann aus dem 1sten Glied die 2te Wurzel, so ist diese einmal das 1ste Glied der Wurzel. Wir quadriren dieses 1ste Glied und ziehen das Quadrat vom gegebenen Polynom ab, dividiren dann das höchste Glied des geordneten Restes durch das Doppelte des 1sten Gliedes und erhalten so das 2te Glied der Wurzel; dann bilden und subtrahiren wir 2 Grössen: 1) das doppelte Produkt aus dem 1sten Glied in das 2te und 2) das Quadrat des 2ten Gliedes. Bleibt ein Rest, so dividiren wir wieder mit dem doppelten der gefundenen 2 ersten Glieder in die ersten Glieder des Restes und erhalten als Quotient das 3te Glied der Wurzel, worauf wir wieder das Produkt aus dem Divisor in den Quotienten und dann noch das Quadrat des Quotienten subtrahiren. Auf diese Weise fahren wir fort, bis wir entweder als Rest Null erhalten oder uns überzeugt haben, dass das gegebene Polynom kein vollständiges Quadrat ist, was wir an folgendem Merkmal erkennen:

72. Ist das Polynom nach fallenden Potenzen geordnet, so kann dasselbe kein vollständiges Quadrat sein, sobald man in die Wurzel ein Glied setzen muss, in welchem der Exponent von x kleiner ist, als die Hälfte des Exponenten von x im letzten Gliede des gegebenen Polynoms. Wäre dagegen das Polynom nach steigenden Potenzen geordnet, so könnte dasselbe kein vollständiges Quadrat sein, sobald man in die Wurzel ein Glied setzen müsste, in welchem der Exponent von x grösser wäre, als der halbe Exponent von x im letzten Gliede des gegebenen Polynoms.

Gesetzt z. B. man hätte $\sqrt{Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots Qx^n}$ zu bestimmen, so kann sich also die Operation nicht schliessen, sobald man in die Wurzel ein Glied setzen muss, welches x mit einem kleinern Exponenten enthält, als $\frac{n}{2}$; denn wäre $Ax^m + Bx^{m-1} +$ etc. ein vollständiges Quadrat, so müsste dessen letztes Glied Qx^n das Quaduat vom letzen Glied der Wurzel und dieses daher $=$ sein $\sqrt{Qx^n} = \sqrt{Q} \cdot x^{\frac{n}{2}}$. Hätte man nun in der Wurzel schon ein Glied, das x mit einem Exponenten, kleiner als $\frac{n}{2}$, enthielte, so könnte diess jedenfalls einmal nicht das letzte sein, weil das Quadrat davon nicht das letzte Glied Qx^n gäbe; aber noch we-

niger könnte eines der folgenden Glieder, die, weil nach den fallenden Potenzen von x geordnet, sämmtlich x mit noch kleinern Exponenten enthalten, das letzte sein; folglich kann sich die Operation nicht schliessen und das Polynom kein vollständiges Quadrat sein.

Wäre dagegen $\sqrt{Ax^2 + Bx^2 + Cx^4 + \ldots Qx^n}$ zu bestimmen, so würde sich hier die Operation nicht schliessen, sobald man zu einem Gliede käme, dessen Exponent von x grösser wäre, als $\frac{n}{2}$. Denn soll sich die Operation schliessen, so muss wieder das letzte Glied Qx^n das Quadrat sein vom letzten Gliede der Wurzel. Wie nun aber in der Wurzel einmal ein Glied vorkommt, dessen Exponent von x grösser, als $\frac{n}{2}$, so kann das jedenfalls wieder nicht das letzte sein, weil das Quadrat davon x schon in einer höhern, als in der $n$ten Potenz enthält. Noch weniger wird aber eines der folgenden Glieder, die sämmtlich x in noch höhern Potenzen enthalten, das letzte sein können; folglich kann sich auch jetzt wieder die Operation nicht schliessen.

Ausziehung der 2ten Wurzel aus dekadischen Zahlen.

73. Zur Vermeidung späterer Wiederholungen wollen wir einige Definitionen vorausschicken. Wir werden nämlich in der Folge von dem absoluten, dem relativen und dem Lokalwerth einer Ziffer reden und dabei unter dem absoluten Werth derselben ihre lediglich von der Form abhängige Bedeutung, unter dem relativen Werth aber den Werth verstehen, welchen die Ziffer wirklich hat da, wo sie steht; dieser letzte wird demnach durch die Stelle und durch den absoluten Werth der Ziffer bedingt. Der Lokalwerth endlich ist die Zahl, mit welcher man den absoluten Werth einer Ziffer multipliziren muss, um ihren wahren oder relativen Werth zu erhalten. Im dekadischen Zahlensystem ist derselbe immer eine Potenz von 10. In der Zahl 7985,43 sind die absoluten Werthe der einzelnen Ziffern von links nach rechts fortschreitend: 7, 9, 8, 5, 4 und 3; ihre Lokalwerthe: 1000, 100, 10, 1, $\frac{1}{10}$, und $\frac{1}{100}$, endlich ihre relativen Werthe: 7000, 900, 80, 5, $\frac{4}{10}$ und $\frac{3}{100}$. Wenn wir die Einer als Einheiten der nullten Ordnung betrachten, so bilden die Zehner die 1ste Ordnung aufwärts (nach links), die Zehntel die 1ste Ordnung abwärts (nach rechts); die Hunderter die 2te Ordnung aufwärts,

die Hundertstel die 2te Ordnung abwärts u. s. f.; es stimmt dann die Ordnungszahl mit dem Exponenten des Lokalwerthes überein d. h. der Lokalwerth einer Ziffer ist $= 10^0$ oder $1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$, oder $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$, je nachdem sie an der nullten, der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, 6ten Ordnung aufwärts oder an der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten oder 6ten Ordnung abwärts steht.

74. Es ist

$(7326{,}45)^2 = (7000 + 300 + 20 + 6 + 0{,}4 + 0{,}05)^2 = 7000^2 + 2.7000.300 + 300^2 + 2.7300.20 + 20^2 + 2.7320.6 + 6^2 + 2.7326.0{,}4 + (0{,}4)^2 + 2.7326{,}4.0{,}05 + (0{,}05)^2$. Nun ist

$$
\begin{array}{lcr}
7000^2 & = & 49000000 \\
2.\,7000.\,300 & = & 4200000 \\
300^2 & = & 90000 \\
2.\,7300.\,20 & = & 292000 \\
20^2 & = & 400 \\
2.\,7320.\,6 & = & 87840 \\
6^2 & = & 36 \\
2.\,7326.\,0{,}4 & = & 5860{,}8 \\
(0{,}4)^2 & = & 0{,}16 \\
2.\,7326{,}4.\,0{,}05 & = & 732{,}640 \\
(0{,}05)^2 & = & 0{,}0025 \\
\hline
(7326{,}45)^2 & = & 53676869{,}6025
\end{array}
$$

Wir erkennen hieraus, dass das Quadrat einer 6stelligen dekadischen Zahl, die 4 Stellen v o r und 2 Stellen n a c h dem Decimalkomma enthält, zusammengesetzt ist aus dem Quadrat des Tausenders mehr dem doppelten Produkt des Tausenders in den Hunderter, mehr dem Quadrat des Hunderters, mehr dem doppelten Produkt aus der Summe des Tausenders und Hunderters in den Zehner mehr dem Quadrat des Zehners mehr dem doppelten Produkt aus der Summe des Tausenders, Hunderters und Zehners in den Einer, mehr dem Quadrat des Einers, mehr dem doppelten Produkt aus der Summe des Tausenders, Hunderters, Zehners und Einers in die Zehntel mehr dem Quadrat der Zehntel, mehr endlich dem doppelten Produkt aus der Summe der Tausender, Hunderter, Zehner, Einer und Zehntel in die Hundertstel mehr dem Quadrate der Hundertstel und können hieraus leicht die Zusammensetzung des Quadrates irgend einer anderen dekadischen Zahl beurtheilen.

75. Hieraus ergeben sich folgende Consequenzen:

1. D i e L o k a l w e r t h e d e r e i n z e l n e n B e s t a n d-

theile, aus welchen das Quadrat einer mehrstelligen dekadischen Zahl zusammengestzt ist, werden von Glied zu Glied 10mal kleiner. So sind sie in dem vorigen Beispiel der Reihe nach

1000 . 1000
1000 . 100
100 . 100
100 . 10
10 . 10
10 . 1
1 . 1
1 . 0,1
0,1 . 0,1
0,1 . 0,01
0,01 . 0,01

Das ist auch leicht einzusehen: Der Tausender hat den Lokalwerth 10C0; sein Quadrat somit den Lokalwerth 1000 . 1000. Das doppelte Produkt aus dem Tausender in den Hunderter hat den Lokalwerth 1000 . 100 und das Quadrat des Hunderters den Lokalwerth 100 . 100. Das doppelte Produkt aus der Summe der Tausender und Hunderter in die Zehner hat einen Lokalwerth = dem Produkt der Lokalwerthe der einzelnen Faktoren. Der 1ste Faktor 2 hat den Lokalwerth 1; der 2te Faktor — die Summe der Tausender und Hunderter — ist eine Anzahl Hunderter, hat also den Lokalwerth 100; der 3te Faktor, der Zehner, hat den Lokalwerth 10; folglich das Produkt den Lokalwerth 1 . 100 . 10 = 100 . 10. Das Quadrat des Zehners hat den Lokalwerth 10 . 10. Das doppelte Produkt aus der Summe der Tausender, Hunderter und Zehner in den Einer besteht wieder aus 3 Faktoren; der erste ist 2 und hat den Lokalwerth 1; der 2te ist die Summe der Tausender, Hunderter und Zehner, also eine Anzahl Zehner, hat demnach den Lokalwerth 10; der 3te Faktor ist der Einer, hat den Lokalwerth 1, somit das Produkt den Lokalwerth 1 . 10 . 1 = 10. Das Quadrat des Einers hat den Lokalwerth 1 . 1. Da die Summe der Tausender, Hunderter, Zehner, Einer als eine Anzahl Einer den Lokalwerth 1, die Summe der Tausender, Hunderter, Zehner, Einer und Zehntel aber als eine Anzahl Einer den Lokalwerth $\frac{1}{10}$ = 0,1 hat, so ist ohne weiteres klar, dass die Lokalwerthe der auf das Quadrat des Einers noch folgenden Glieder der Reihe nach sind: 1 . $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{100}$ und $\frac{1}{100}$. $\frac{1}{100}$, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

2. Man kann schon aus der Anzahl der Stellen einer Zahl erkennen, wie viele Stellen ihre 2te Wurzel bekommt. Man darf nämlich die Zahl nur, vom Decimalkomma ausgehend, in Klassen zu je 2 Stellen eintheilen: so viele Klassen man durch diese Eintheilung erhält, aus eben so vielen Stellen besteht die Wurzel.

In der That: Alle einstelligen Zahlen liegen zwischen 1 und 10, ihre Quadrate daher zwischen 1^2 und 10^2 oder zwischen 1 und 100 und zwar müssen sie kleiner als 100 sein, da 100 schon das Quadrat der kleinsten zweistelligen Zahl ist. Wenn also die Wurzel einstellig, so ist das Quadrat 1- oder 2stellig; und umgekehrt müssen alle 2 stelligen Zahlen einstellige Quadratwurzeln haben. Die 2stelligen Wurzeln liegen zwischen den Grenzen 10 und 100 und zwar sind sie noch kleiner als 100; ihre Quadrate werden daher zwischen den Quadraten dieser Grenzen d. h. zwischen 10^2 und 100^2 oder zwischen 100 und 10000 liegen, d. h. mit wenigstens 3 und höchstens 4 Stellen geschrieben werden. Wenn also die Wurzel 2stellig, so ist das Quadrat 3- oder 4stellig und umgekehrt werden alle 3 und 4stelligen Zahlen zweistellige Quadratwurzeln haben. Indem wir in gleicher Weise fortfahren, finden wir, dass die 3stelligen Wurzeln Quadrate mit wenigstens 5 und höchstens 6 Stellen und umgekehrt alle 5- und 6stelligen Zahlen 3stellige Quadratwurzeln haben, dass die Quadrate der 4stelligen Wurzeln 7 oder 8 Stellen, die Wurzeln von 7- und 8stelligen Zahlen aber 4 Stellen zählen müssen und so fort, dass allgemein, wenn die Wurzel $n$stellig, das Quadrat derselben $2n-1$ oder $2n$ Stellen haben muss, so dass man in der That aus der Anzahl der Stellen einer Zahl auf die Anzahl der Stellen ihrer 2ten Wurzel schliessen kann.

3. Die Lokalwerthe der einzelnen Klassen sind gerade die Quadrate von den Lokalwerthen der einzelnen Glieder in der Wurzel.

Hätte man z. B. die Quadratwurzel zu ziehen aus

$\sqrt{53|67|68|69,|60|25} = \ldots .,\ldots$ so würde die Eintheilung 6 Klassen liefern und zwar 4 Klassen vor und 2 Klassen nach dem Decimalkomma. Die Wurzel würde demnach 4 Stellen vor und zwei Stellen nach dem Decimalkomma erhalten. Die unterste Klasse umfasst hier die Tausendstel und Zehntausendstel, hat also einen Lokalwerth $= 10^{-4}$; das unterste Glied der Wurzel zählt Hundertstel, hat also den Lokalwerth 10^{-2}; da nun $10^{-4} = (10^{-2})^2$,

so ist einmal der Lokalwerth der untersten Klasse das Quadrat vom Lokalwerth des untersten Gliedes der Wurzel.

Die 2te Klasse umfasst die Zehntel und Hundertstel, also eine Anzahl Hundertstel; ihr Lokalwerth ist somit $= \frac{1}{100} = 10^{-2}$; das 2te Glied der Wurzel ist der Zehntel, dessen Lokalwerth $= 10^{-1}$; abermals ist $10^{-2} = (10^{-1})^2$.

Die 3te Klasse umfasst die Einer und Zehner, also eine Anzahl Einer; ihr Lokalwerth ist $= 1 = 10^0$. Das 3te Glied der Wurzel ist der Einer; sein Lokalwerth $= 1$; allein 1 ist auch $= 1^2$; d. h. der Lokalwerth der 3ten Klasse ist wieder gleich dem Quadrat vom Lokalwerth des 3ten Gliedes in der Wurzel; und so finden wir, dass auch die Lokalwerthe $100 = 10^2$, 10^4, 10^6 der 3 noch folgenden Klassen die Quadrate sind von den Lokalwerthen 10, 100 und 1000 der 3 folgenden Glieder in der Wurzel.

76. $\sqrt{53|67|68|69,|60|25} = 7326,45$

```
                49
14        :     467
                 42 }
                  9 }
146       :      3868
                  292 }
                    4 }
1464      :       94469
                   8784 }
                     36 }
14652     :        6593,60
                    5860 8 }
                        16 }
14652,8   :          732,6425
                     732 640 }
                          25 }
                           0
```

Wir wollen nun aus der in Nro. 74 durch Quadrirung erhaltenen Zahl 53676869,6025 wieder die Quadratwurzel zu ziehen suchen. Durch Eintheilung in Klassen finden wir gleich, dass dieselbe 4 Stellen vor und 2 Stellen nach dem Decimalkomma enthalten muss. Die oberste Klasse enthält das Quadrat des 1sten Gliedes der Wurzel, ausser welchem im Allgemeinen auch noch Bestandtheile der folgenden Glieder — des doppelten Produktes aus dem ersten Glied in das 2te — vorkommen können. Wir werden daher das 1ste Glied der Wurzel finden, wenn wir aus dem absoluten Werth der obersten Klasse — aus 53 — die Qua-

dratwurzel bis auf eine Einheit genau ziehen. $\sqrt{53} = 7$; daher 7 Tausender das 1ste Glied der Wurzel. Wir subtrahiren das Quadrat derselben vor der obersten Klasse und setzen nun zum Rest noch die 2te Klasse herab. Wir wissen nämlich, dass in dem Quadrat unserer Wurzel nach dem Quadrat des Tausenders kommen muss das doppelte Produkt aus dem Tausender in den Hunderter und das Quadrat des Hunderters, wissen ferner, dass das erste dieser Produkte einen 10 mal kleinern Lokalwerth hat als das Quadrat das Tausenders oder als die oberste Klasse, folglich den gleichen Lokalwerth, wie das erste Glied der zweiten Klasse, während das Quadrat des Hunderters wieder einen 10 mal kleinern Lokalwerth als jenes, folglich den Lokalwerth der 2ten Klasse selber besitzt. Wenn wir daher zu dem von der ersten Klasse her erhaltenen Rest die 2te Klasse (67 Zehntausender) herunter setzen, so können wir nicht nur sagen, dass in der so erhaltenen Zahl 467 1. das doppelte Produkt aus dem Tausender in den Hunderter und 2. das Quadrat des Hunderters enthalten sein muss, sondern wissen auch noch genau, wie weit ein jedes jener Produkte reicht; das doppelte Produkt aus dem Tausender in den Hunderter hat den Lokalwerth des ersten Gliedes der 2ten Klasse, ist folglich in den 46 Hunderttausendern enthalten und wir finden demnach das 2te Glied der Wurzel, wenn wir die Gesammtheit der Stellen, die wir nach Heruntersetzung der 2ten Klasse haben, mit Ausnahme der letzten durch das Doppelte des gefundenen ersten Gliedes, durch $2 . 7 = 14$ (Tausender) dividiren. Der Quotient 3 (Hunderter) wird dann das 2te Glied der Wurzel sein. Wir untersuchen nun, ob die 73 (Hunderter) schon die vollständige Wurzel bilden, indem wir ihr Quadrat mit der gegebenen Zahl vergleichen. Da das Quadrat des Tausenders bereits subtrahirt wurde, so dürfen wir nur noch das doppelte Produkt aus dem Tausender in den Hunderter d. h. das Produkt aus dem Divisor in den Quotienten und das Quadrat des Quotienten subtrahiren, welch letztes einen 10 mal kleinern Lokalwerth, als das erste hat, daher unter die letzte Stelle der heruntergesetzten Klasse zu stehen kommt. Wir setzen nun zum Reste 38 die 3te Klasse 68 (Hunderter) herab; dann wird in der Gesammtheit der so erhaltenen Stellen, nämlich in 3868, sowol das doppelte Produkt aus der Summe des Tausenders und Hunderters in den Zehner, als auch das Quadrat des Zehners enthalten sein, und da das 1ste einen 10, das letzte einen 100 mal kleinern Lokalwerth als das Quadrat des Hunder-

ters oder als die 2te Klasse besitzt, so wird das 1ste dieser Produkte den gleichen Lokalwerth haben, wie das erste Glied der heruntergesetzten 3ten Klasse, folglich in den 386 (Tausendern) enthalten sein. Indem wir daher diese 386 (Tausender) durch das Doppelte des bereits gefundenen Wurzeltheils d. h. durch 2 . 73 = 146 (Hunderter) dividiren, bekommen wir im Quotienten 2 (Zehner) das 3te Glied der Wurzel. Wenn wir nun das doppelte Produkt aus der Summe der Tausender und Hunderter in den gefundenen Zehner d. h. das Produkt aus dem Divisor in den Quotienten und dann das Quadrat des Zehners oder des Quotienten subtrahiren, so ist das vollständige Quadrat des bis jetzt gefundenen Wurzeltheiles subtrahirt. Wir setzen dann zum Rest 944 die nächste oder 4te Klasse herunter, dann enthält die resultirende Zahl 94469 das doppelte Produkt aus der Summe der Tausender, Hunderter und Zehner in den Einer und das Quadrat des Einers und zwar ist das erste der genannten Produkte in den 9446 (Zehnern) enthalten; wir werden somit das 4te Glied der Wurzel erhalten, wenn wir 9446 durch die doppelte Summe der 3 ersten Glieder d. h. durch 2 . 732 = 1464 dividiren. Der Quotient 6 ist das 4te Glied der Wurzel. Man hat nun wieder das doppelte Produkt aus der Summe der Tausender, Hunderter und Zehner in den Einer (Produkt aus Divisor in den Quotienten) und das Quadrat des Einers oder Quotienten zu subtrahiren, dann ist das vollständige Quadrat des bisher gefundenen 4stelligen Wurzeltheils subtrahirt. In ganz analoger Weise bestimmen wir noch die 2 folgenden Glieder und bekommen dann als Rest Null, woraus wir schliessen, dass die Wurzel richtig bestimmt sei. Es macht nämlich die Summe der successive abgezogenen Produkte gerade das Quadrat der gefundenen Wurzel aus, ist aber auch gleich der gegebenen Zahl, weil wir ja Null als Rest erhalten haben.

Gesetzt aber, man hätte als Rest nicht Null erhalten, so wäre die Wurzel hier bloss bis auf die Hundertstel genau bestimmt und man könnte nun dem Rest 2 Nullen anhängen d. h. die Hunderttausendstel und Millionstel als nächste Klasse heruntersetzen und durch Fortsetzung des gleichen Verfahrens von der Wurzel noch beliebig viele Glieder bestimmen.

77. Es kann der Fall eintreten, dass von den durch Division zu bestimmenden Gliedern einzelne kleiner angenommen werden müssen als der Quotient eigentlich würde. Nimmt man ein solches Glied zu gross an, so macht sich der Fehler sogleich dadurch

bemerkbar, dass die Subtraktion des doppelten Produktes aus dem Divisor in den Quotienten und des Quadrates vom Quotienten unmöglich wird. Würde es aber zu klein angenommen, so liesse sich dieser Fehler aus der Vergleichung des Restes mit dem Doppelten des bereits gefundenen Wurzeltheiles erkennen, indem alsdann der Rest grösser als das Doppelte des bereits gefundenen Wurzeltheiles sein müsste.

Sei nämlich a der absolute Werth des bereits gefundenen Wurzeltheiles und A der Theil der Zahl, welcher zur Bestimmung von a verwendet wurde, so ist der absolute Werth des Restes $= A - a^2$. Wenn nun dieser Rest grösser als das Doppelte des bereits gefundenen Wurzeltheiles, also grösser als $2a$, so muss er doch mindestens um 1 grösser sein und somit hätte man

$$A - a^2 \geqq 2a+1$$
$$\text{oder } A \geqq a^2+2a+1$$
$$A \geqq (a+1)^2$$

Es wäre also A das Quadrat von wenigstens $a+1$; somit a um wenigstens 1 zu klein.

So wenn wir im obigen Beispiel als 3tes Glied der Wurzel bloss 1 genommen hätten, statt 2, so wäre

$$a = 731$$
$$A = 536768 \text{ und}$$
$$A - a^2 = 2407$$

$2a$ dagegen $= 1462$; Nun ist der Rest $A - a^2 = 2407$ grösser als $2a$ oder 1462 und daher wäre das 3te Glied 1 mindestens um 1 und der ganze Wurzeltheil $a = 731$ ebenfalls um mindestens 1 zu klein.

78. Wenn einzelne durch Division bestimmte Glieder der Wurzel = Null werden, so sind auch die betreffenden abzuziehenden Produkte Null, so dass man gleich die folgende Klasse heruntersetzen kann. Das ist in folgendem Beispiel der Fall:

```
              √19|07|44|86|49 = 40093
               16
              ―――――――――――
8    :         −07
              ――――――
80   :           744
               ――――――――
800  :          74486
                7200
                  81
               ―――――――――――
8018 :          240549
                24054 ⎫
                    9 ⎭
               ―――――――――――
                     0
```

Der erste Rest macht mit der 1sten Klasse hier 7 aus; die Gesammtheit der Stellen mit Ausnahme der letzten, ist demnach $= 0$, daher das 2te Glied der Wurzel $= 0$. Nach Heruntersetzung der 3ten Klasse hat man 744; es wäre demnach 74 durch 80 zu dividiren, was wieder 0 als Quotient gibt. Erst wenn wir zu dem Rest 744 die 4te Klasse herabsetzen, bekommen wir 7448 als Dividend, 800 als Divisor und daher den Quotienten 9 als 4tes Glied der Wurzel.

79. Hat man bei der Quadratwurzelausziehung aus einer dekadischen Zahl schon mehr, als die Hälfte der Stellen bestimmt, so können die noch fehlenden durch eine blosse Division gefunden werden, indem man nämlich den Rest durch das Doppelte der bereits gefundenen Wurzel dividirt. Wir wollen z. B. den absoluten Werth der bereits gefundenen Wurzel mit a bezeichnen und annehmen, es enthalte das a schon $n+1$ Ziffern und seien noch n Stellen zu bestimmen, so wird der Lokalwerth des $a = 10^n$ und folglich der relative oder der vollständige Werth des bereits gefundenen Wurzeltheiles $= a . 10^n$ sein. Wenn wir dann mit x den noch fehlenden Theil der Wurzel bezeichnen, so ist die vollständige Wurzel $= a . 10^n + x$ und folglich ihr Quadrat oder die gegebene Zahl $= (a . 10^n + x)^2 = a^2 . 10^n + 2 . a . 10^n . x + x^2$. Nachdem wir davon das Quadrat des schon gefundenen 1sten Theiles subtrahirt haben, bleibt $2 . a . 10^n . x + x^2$, welchen Rest wir mit R bezeichnen wollen; dann ist

$$R = 2 . a . 10^n . x + x^2 \text{ und}$$
$$R - x^2 = 2 . a . 10^n . x, \text{ woraus folgt}$$
$$x = \frac{R - x^2}{2 . a . 10^n} = \frac{R}{2a . 10^n} - \frac{x^2}{2a . 10^n}.$$

Führen wir die Division von R durch $2a . 10^n$ aus und bezeichnen den ganzen Quotienten mit q, den Rest mit r, so ist

$$\frac{R}{2a . 10^n} = q + \frac{r}{2a . 10^n} \text{ und daher}$$
$$x = q + \frac{r}{2a . 10^n} - \frac{x^2}{210 . a^n}, \text{ oder}$$
$$x - q = \frac{r}{2a . 10^n} - \frac{x^2}{2a . 10^n} = \frac{r - x^2}{2a . 10^n}.$$

Nun ist r kleiner, als $2a . 10^n$, weil r ja der Rest der Division des R durch $2a . 10^n$ war; x wird mit n Stellen geschrieben und ist daher kleiner, als 10^n, das schon mit $n+1$ Ziffern geschrieben wird; ebenso ist x kleiner, als a, das auch mit $n+1$

Ziffern geschrieben wird; folglich ist x^2 oder $x \cdot x$ kleiner, als $a \cdot 10^n$ und noch um so mehr kleiner, als $2a \cdot 10^n$. Es ist somit auch die Differenz $r - x^2$ kleiner, als $2a \cdot 10^n$ und folglich $\frac{r - x^2}{2a \cdot 10^n}$ ein ächter Bruch. Da nun $x - q = \frac{r - x^2}{2a \cdot 10^n}$, so ist also die Differenz zwischen dem noch fehlenden Theil x der Wurzel und dem Quotienten q kleiner, als 1; folglich ist q bis auf eine Einheit genau der noch fehlende Theil der Wurzel. Nun war $q = \frac{R}{2a \cdot 10^n}$ bis auf 1 genau; und da $2a \cdot 10^n$ das Doppelte der schon gefundenen Wurzel und R der entsprechende Rest war, so wird also der noch fehlende Theil der Wurzel bis auf 1 genau gefunden, wenn man den Rest (R) durch das Doppelte des schon gefundenen Wurzeltheils dividirt. Die ganze Wurzel heisst also, bis auf eine Einheit genau: $a \cdot 10^n + q$.

Wir haben jetzt nur noch zu untersuchen, ob der gefundene letzte Theil q grösser oder kleiner, als x oder $= x$ sei. Aus $x - q = \frac{r - x^2}{2a \cdot 10^n}$ folgt, dass wenn $x > q$ und also $x - q$ positiv, auch $r - x^2$ positiv, d. h. $r > x^2$, und daher noch um so mehr $r > q^2$; wenn aber $x = q$, so dass $x - q = 0$, so muss $r = x^2$ oder $= q^2$ sein; wenn endlich $x < q$, also $x - q$ negativ, so muss auch $r = x^2$ negativ, also $r < x^2$ und also auch $r < q^2$ sein. Umgekehrt können wir auch schliessen:

1) Wenn $r > q^2$, so ist $x > q$, d. h. wenn der Rest r grösser ist, als das Quadrat des gefundenen Quotienten, so ist der gefundene Quotient q kleiner, als der noch fehlende Theil der Wurzel und daher die ganze genäherte Wurzel zu klein.

2) Wenn $r = q^2$, so ist $x = q$, d. h.: wenn das Quadrat des gefundenen Quotienten gerade = ist dem Rest, so ist der Quotient genau = dem noch fehlenden Theil der Wurzel und also die Wurzel genau bestimmt.

3) Wenn $r < q^2$, so ist auch $x < q$, d. h.: wenn der Rest kleiner, als das Quadrat des gefundenen Quotienten, so ist der Quotient q grösser, als der noch fehlende Theil x der Wurzel und die genäherte Wurzel zu gross.

1ste Art:	2te Art:
$\sqrt{2\vert 36\vert 14\vert 46\vert 89} = 15367$	$\sqrt{2\vert 36\vert 14\vert 46\vert 89} = 1\ldots.$
	15367
1	1
2 : 136	2 : 136
10	10
25	25
30 : 1114	30 : 1114
90	90
9	9
306 : 20546	30600 : 2054689
1836	67 183600
36	218689
3072 : 215089	214200
21504	4489
49	
0	

Hier haben wir bei der ersten Art das vollständige Verfahren bis zu Ende angewandt und als exakte Wurzel 15367 gefunden. Bei der 2ten Art rechts aber haben wir das Verfahren der Quadratwurzelausziehung nur zur Bestimmung der 3 ersten Stellen angewandt, während die zwei letzten Ziffern (67) durch blosse Division gefunden wurden. Nachdem man nämlich das Quadrat der 3 ersten Stellen (also von 153) subtrahirt, hat man als Rest erhalten 2054689, so dass also bei unserer obigen Bezeichnung $R = 2054689$, $a = 153$ ist. Diesen Rest haben wir nun dividirt durch das Doppelte des Gefundenen, durch $2a \, . \, 10^n$ oder durch $2 \, . \, 153 \, , 10^2$, d. h. durch 2 . 153 Hunderter oder durch 30600 und als Quotient q gefunden 67. Der gebliebene Rest r ist $= 4489$ und ist genau $= q^2 = 67^2$; folglich ist $q = x$, d. h. die Wurzel ist genau bestimmt, wie sich das auch leicht einsehen lässt; denn wenn man von $R = 2054689$ zuerst das Produkt aus dem Divisor 30600 in den Quotienten 67 und dann noch das Quadrat des Quotienten, also 67^2, subtrahirt, so erhält man als Rest Null. Ebenso sieht man auch leicht ein, dass, wenn der Rest $r = 4489$ grösser, als 67^2, die gefundene Wurzel zu klein, im entgegengesetzten Fall aber, wo $r = 4489$ kleiner, als 67^2, die gefundene Wurzel zu gross wäre.

80. Bei der Ausziehung der Quadratwurzel kann man oft schon vorher erkennen, dass die Wurzel bloss annähernd bestimmt werden kann. Wir merken uns hierüber Folgendes:

1) $(2n)^2 = 4n^2$, d. h. das Quadrat jeder geraden Zahl $(2n)$

ist durch 4 theilbar, und umgekehrt kann nur eine durch 4 theilbare Zahl eine gerade Wurzel haben.

2) $(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1$, d. h. jede ungerade Zahl hat ein Quadrat von der Form $4n^2+4n+1$, also ein Quadrat, welches, um 1 vermindert, durch 4 theilbar ist, und umgekehrt kann eine ungerade Zahl nur dann ein vollständiges Quadrat sein, wenn sie, um 1 vermindert, durch 4 theilbar ist.

3) Die Quadrate der Zahlen 1, 2, 3 ... bis 9 sind: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, endigen also rechts auf 1, 4, 5, 6, 9, dagegen keines auf 2, 3, 7 oder 8. Da nun in dem Quadrat jeder mehrstelligen ganzen Zahl das Quadrat des Einers als letztes Glied vorkommt, so werden die Quadrate aller ganzen Zahlen rechts auf 1, 4, 9, 6, 5 oder dann auf Null endigen müssen; umgekehrt kann eine ganze Zahl, welche rechts auf 2, 3, 7 oder 8 endigt, kein vollständiges Quadrat sein.

Anmerkung. Man hüte sich indessen, diese bloss negativen Merkmale für positive anzusehen, welche uns die Quadratzahl als solche erkennen lassen. So ist keineswegs jede durch 4 theilbare Zahl ein vollständiges Quadrat, eben so wenig jede ungerade Zahl, welche, um 1 vermindert, durch 4 theilbar ist, noch endlich jede ganze Zahl, die rechts auf 1, 4, 9, 6, 5 oder 0 endigt. So sind z. B. 28, 32, 40 etc. durch 4 theilbar, und 45, um 1 vermindert, durch 4 theilbar, ohne Quadratzahlen zu sein; ebenso endigen 96, 54, 61, 35 resp. auf 6, 4, 1 und 5 und sind doch keine vollständigen Quadrate.

Cubikwurzel.

81. (1) $(a)^3 = a^3$

(2) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(3) $(a+b+c)^3 = (a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^2$ oder

(4) $(a+b+c)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$

(5) $(a+b+c+d)^3 = (a+b+c)^3+3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3+3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3.$

Wir finden durch unmittelbare Multiplikation:

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Es kommen also im Cubus einer zweitheiligen Grösse zum Cubus des 1sten Theiles noch 3 Grössen hinzu, nämlich 1) $3a^2b$, d. h. das 3 fache Produkt aus dem Quadrat des 1sten Theiles (a^2) in den 2ten (b); 2) $3ab^2$, d. h. das 3fache Produkt aus dem 1sten Theil a in das Quadrat des 2ten (b^2), und 3) der Cubus des 2ten

Theiles, also b^3. Wollten wir ein Trinom $(a+b+c)$ zur 3ten Potenz erheben, so könnten wir es zunächst als Binom betrachten, dessen 1stes Glied $(a+b)$ und dessen 2tes Glied c wäre und wir hätten dann dem Vorigen gemäss die Gleichung (3) oder, indem wir für $(a+b)^3$ seinen Werth aus Gleichung (2) setzen:

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$$

Hiebei ist $3(a+b)^2c$ das 3fache Produkt aus dem Quadrat der Summe beider erster Glieder $(a+b)$ in das 3te (c), $3(a+b)c^2$ das 3fache Produkt aus der Summe der beiden ersten Glieder in das Quadrat des 3ten und c^3 der Cubus des 3ten Gliedes. So könnte man fortfahren und würde finden, dass der Cubus eines beliebigen Polynoms enthalten muss:

1) den Cubus des 1sten Gliedes, 2) das 3fache Produkt aus dem Quadrat des 1sten Gliedes in das 2te, 3) das 3fache Produkt aus dem 1sten Glied in das Quadrat des 2ten, 4) den Cubus des 2ten Gliedes, 5) das 3fache Produkt aus dem Quadrat von der Summe der beiden ersten Glieder in das 3te, 6) das 3fache Produkt aus der Summe der beiden 1sten Glieder in das Quadrat des 3ten und 7) den Cubus des 3ten, 8) das 3fache Produkt aus dem Quadrat von der Summe der 3 ersten Glieder in das 4te, 9) das 3fache Produkt aus der Summe der 3 ersten Glieder in das Quadrat des 4ten und 10) den Cubus des 4ten Gliedes u. s. f.

Nach dieser Regel können wir den Cubus eines jeden Polynoms bilden. So wäre $(3a^2+4ab-2b^2)^3 = (3a^2)^3+3.(3a^2)^2.4ab +3.(3a^2).(4ab)^2+(4ab)^3+3.(3a^2+4ab)^2.(-2b^2)+ 3.(3a^2+4ab).(-2b^2)^2+(-2b^2)^3$

Nun ist aber:

$$(3a^2)^3 = 27a^6$$
$$3.(3a^2)^2.4ab = 3.9a^4.4ab = 108a^5b$$
$$3.(3a^2).(4ab)^2 = 3.3a^2.16a^2b^2 = 144a^4b^2$$
$$(4ab)^3 = 64a^3b^3$$
$$3(3a^2+4ab)^2.(-2b^2)=3.(9a^4+24a^3b+16a^2b^2).(-2b^2)=-54a^4b^2 -144a^3b^3-96a^2b^4$$
$$3.(3a^2+4ab).(-2b^2)^2 = 3(3a^2+4ab).4b^4 = 36a^2b^4+48ab^5$$
$(-2b^2)^3 = -8b^6$; also ist
$$(3a^2+4ab-2b^2)^3=27a^6+108a^5b+90a^4b^2-80a^3b^3-60a^2b^4+ 48ab^5-8b^6.$$

82. Gesetzt nun, es sei das Polynom P als Cubus eines zu suchenden Polynoms p gegeben und es folgen dessen Glieder gerade so auf einander, wie wir in Nro. 81 gesehen haben, so kann

die Bestimmung der 3ten Wurzel aus P keine Schwierigkeit mehr haben. Denn es muss ja das 1ste Glied des gegebenen Polynoms P der Cubus sein vom 1sten Gliede der Wurzel, und daher dieses gefunden werden, wenn man aus dem 1sten Gliede von P die 3te Wurzel zieht. Wir subtrahiren nun den Cubus des gefundenen 1sten Gliedes vom gegebenen Polynom; dann muss das 1ste Glied des Restes das 3fache Produkt aus dem Quadrat des bereits gefundenen 1sten Gliedes in das zu suchende 2te Glied der Wurzel sein und daher dieses 2te Glied gefunden werden, wenn wir das 1ste Glied des Restes durch das dreifache Quadrat des gefundenen 1sten Gliedes dividiren. Um nun zu wissen, ob die gefundene zweitheilige Grösse die vollständige 3te Wurzel von P sei, erheben wir sie zum Cubus und ziehen denselben von P ab; weil aber der Cubus des 1sten Gliedes schon subtrahirt worden, so hat man von dem Reste nur noch zu subtrahiren: 1) das 3fache Produkt aus dem Quadrat des 1sten Gliedes in das 2te, oder mit andern Worten: das Produkt aus dem Divisor in den Quotienten; 2) das 3fache Produkt aus dem 1sten Glied in das Quadrat des neugefundenen 2ten Gliedes, und 3) noch den Cubus des 2ten Gliedes. Bleibt abermals ein Rest, so beweist das, dass die zu suchende Wurzel wenigstens 3 Glieder haben und das gegebene Polynom P daher wenigstens der Cubus einer 3theiligen Grösse sein muss. Weil nun aber im Cubus eines jeden Polynoms auf den Cubus des 2ten Gliedes zunächst das 3fache Produkt aus dem Quadrat von der Summe beider 1sten Glieder in das 3te folgt, so werden die 1sten Glieder des Restes dieses 3fache Produkt aus dem Quadrat der Summe beider 1sten Glieder in das zu suchende 3te Glied enthalten müssen, und daher dieses das 3te Glied gefunden werden, wenn man mit dem 3fachen Quadrat des bereits gefundenen Wurzeltheils in die ersten Glieder des Restes dividirt. Hat man so das 3te Glied der Wurzel bestimmt, so darf man von dem letzten Reste nur subtrahiren: 1) das 3fache Produkt aus dem Quadrat des bereits gefundenen Wurzeltheiles in das neu bestimmte 3te Glied, 2) das 3fache Produkt aus der bereits gefundenen Wurzel in das Quadrat des neu bestimmten Gliedes und 3) endlich noch den Cubus des neugefundenen Gliedes, um überzeugt zu sein, dass der vollständige Cubus der gefundenen 3theiligen Grösse von dem gegebenen Polynom subtrahirt wurde. Erhält man daher als Rest Null, so ist die gefundene Grösse die gesuchte Wurzel; bleibt

aber ein Rest, so kann man auf gleiche Weise die noch fehlenden Glieder der Wurzel bestimmen.

83. Wären nun in dem Polynom P die gleichartigen Glieder zusammengezogen und dasselbe etwa nach den fallenden Potenzen eines Buchstabens x geordnet, so müsste der Cubus des 1sten Gliedes der Wurzel wieder den höchsten Exponenten von x enthalten, folglich das 1ste Glied von P sein, und ebenso müsste im 1sten Rest das 3fache Produkt aus dem Quadrat des 1sten Gliedes in das 2te den höchsten Exponenten von x enthalten, also die 1ste Stelle einnehmen, kurz das erste Glied jedes geordneten Restes müsste das 3fache Produkt aus dem Quadrat des 1sten Gliedes in das zu suchende neue Glied sein und daher das obige Verfahren unverändert dasselbe bleiben. Denn wenn $A+B+C+D+\ldots$ das nach fallenden Potenzen von x geordnete Polynom P, $a+b+c+\ldots$ die ebenso geordnete 3te Wurzel davon ist, so muss einmal, da a den höchsten Exponenten von x enthält, a^3 den höchsten Exponenten von x in dem Produkt $(a+b+c+\ldots)^3$ enthalten, also $a^3 = A$ sein nach Nro. 32. Ist nun a^3 subtrahirt, so bleibt der Rest $B+C+D+\ldots$, welcher $3a^2b+3ab^2+b^3+$ etc. enthält. Da nun a in Bezug auf x von höherm Grade ist, als b, b von höherm Grade, als c etc., so wird auch a^2b von höherm Grade sein, als ab^2 und b^3, aber auch von höherm Grade, als a^2c und alle folgenden Glieder, somit $3a^2b$ das 1ste Glied des geordneten Restes, d. h. $= B$ sein müssen. Hat man den Cubus der Summe beider 1sten Glieder subtrahirt, so bleibt das 3fache Produkt aus dem Quadrat von der Summe beider 1sten Glieder in das 3te + etc. Dieses 3fache Produkt aus dem Quadrat von der Summe beider 1sten Glieder in das 3te, d. h. $3(a+b)^2 \cdot c$, besteht aus 3 Gliedern, deren 1stes $(3a^2c)$ in Bezug auf x wieder einen höhern Grad hat, als alle übrigen und somit das 1ste Glied des geordneten Restes sein muss, u. s. f. Es ergibt sich demnach für die Ausziehung der 3ten Wurzel folgende Regel:

Um aus einem Polynom die 3te Wurzel zu ziehen, ordne man es vorerst nach den fallenden Potenzen eines Buchstabens und ziehe dann aus dem 1sten Gliede die 3te Wurzel, erhebe diese zum Cubus und ziehe denselben vom gegebenen Polynom ab. Dann dividire man das 1ste Glied des geordneten Restes durch das 3fache Quadrat des gefundenen 1sten Gliedes, so erhält man als Quotienten das 2te Glied der Wurzel. Hierauf subtrahire man 1) das 3fache Produkt aus dem Quadrat des 1sten Gliedes in das neu

bestimmte 2te Glied, 2) das 3fache Produkt aus dem 1sten Glied in das Quadrat des neu gefundenen Gliedes und 3) den Cubus des neugefundenen Gliedes. Sodann dividire man die 1sten Glieder des geordneten Restes durch das 3fache Quadrat der bereits gefundenen Wurzel, so erhält man als Quotient das 3te Glied der Wurzel — subtrahire dann wieder 1) das dreifache Produkt aus dem Quadrat des bereits gefundenen Wurzeltheiles in das 3te Glied der Wurzel, oder mit andern Worten: das Produkt aus dem Divisor in den Quotienten; 2) das dreifache Produkt aus der bereits gefundenen Wurzel in das Quadrat des Quotienten, und 3) den Cubus des Quotienten, und fahre so auf die nämliche Weise fort, bis man entweder als Rest Null erhält oder sich überzeugt, dass das gegebene Polynom kein vollständiger Cubus ist.

84. Sobald man nämlich in der Wurzel ein Glied erhält, in welchem der Exponent des Ordnungsbuchstabens x kleiner ist, als der 3te Theil vom Exponenten dieses Buchstabens im letzten Gliede des nach den fallenden Potenzen geordneten Polynoms P, so kann man gewiss sein, dass das Polynom keine genaue 3te Potenz ist. Denn soll das gegebene Polynom ein vollständiger Cubus sein, so muss sein letztes Glied die 3te Potenz sein vom letzten Gliede der Wurzel und daher der Exponent von x im letzten Gliede der Wurzel der 3te Theil des Exponenten von x im letzten Gliede von P. Wie man also in der Wurzel ein Glied mit einem kleinern Exponenten von x erhält, so kann das gegebene Polynom kein vollständiger Cubus sein.

Anmerkung. Wenn man zur Bestimmung eines folgenden Gliedes der Wurzel das dreifache Quadrat des bereits gefundenen Wurzeltheiles bildet und damit in die ersten Glieder des Restes dividirt, so wird nach den Regeln der Division immer nur das erste Glied des Dividenden durch das erste Glied des Divisors dividirt. Das 1ste Glied des Divisors ist aber immer das dreifache Quadrat des 1sten Gliedes der Wurzel. Man kann daher, wenn man es vorzieht, dieses dreifache Quadrat des 1sten Gliedes als konstanten Divisor zur Bestimmung sämmtlicher Glieder der Wurzel betrachten; dann muss man aber sämmtliche 3 abzuziehende Produkte immer noch besonders bilden.

78. Wir lassen hier noch ein Beispiel von der Ausziehung der 3ten Wurzel folgen, bei dem das dreifache Quadrat des gefundenen Wurzeltheiles immer als Divisor zur Bestimmung des nächsten Gliedes figurirt.

$$\sqrt[3]{(8a^9+36a^8b+102a^7b^2+159a^6b^3+168a^5b^4+69a^4b^5-2a^3b^6-39a^2b^7+12ab^8-b^9)}=2a^3+3a^2b+4ab^2-b^3$$

$$8a^9$$

$$12a^6 \quad : \quad +36a^8b+102a^7b^2+159a^6b^3+168a^5b^4+69a^4b^5 \text{ etc...}$$

$$36a^8b+\ 54a^7b^2+\ 27a^6b^3$$

$$12a^6+36a^5b+27a^4b^2:+48a^7b^2+132a^6b^3+168a^5b^4+69a^4b^5-2a^3b^6-39a^2b^7-12ab^8-b^9$$

$$+48a^7b^2+144a^6b^3+108a^5b^4$$

$$+\ 96a^5b^4+144a^4b^5$$

$$+64a^3b^6$$

$$12a^6+36a^5b+75a^4b^2+72a^3b^3+48a^2b^5:-12a^6b^3-36a^5b^4-75a^4b^5-66a^3b^6-39a^2b^7+12ab^8-b^9$$

$$-12a^6b^3-36a^5b^4-75a^4b^5-72a^3b^6-48a^2b^7$$

$$+\ 6a^3b^5+\ 9a^2b^7+12ab^8$$

$$-b^9$$

$$0$$

Cubikwurzel aus dekadischen Zahlen.

85. Wenn wir die Zahl 534,2 zur dritten Potenz erheben, so bekommen wir:

$$(534{,}2)^3 = (500+30+4+0{,}2)^3 = 500^3+3\,.\,500^2\,.\,30$$
$$+\,3\,.\,500\,.\,30^2+30^3+3\,.\,530^2\,.\,4+3\,.\,530\,.\,4^2+4^3+3\,.\,534^2\,.\,0{,}2$$
$$+\,3\,.\,534\,.\,(0{,}2)^2+(6{,}2)^3.$$

Nun ist

$$\begin{array}{rcr}
500^3 & = & 125000000 \\
3\,.\,500^2\,.\,30 & = & 22500000 \\
3\,.\,500\,.\,30^2 & = & 1350000 \\
30^3 & = & 27000 \\
3\,.\,530^2\,.\,4 & = & 3370800 \\
3\,.\,530\,.\,4^2 & = & 22440 \\
4^3 & = & 64 \\
3\,.\,534^2\,.\,(0{,}2) & = & 171093{,}6 \\
3\,.\,534\,.\,(0{,}2)^2 & = & 64{,}08 \\
(0{,}2)^3 & = & 0{,}008 \\
\hline
(534{,}2)^3 & = & 152444461{,}688
\end{array}$$

Der Cubus einer 4stelligen dekadischen Zahl, welche 3 Stellen vor und eine Stelle nach dem Decimalkomma enthält, besteht demnach aus 1. dem Cubus des Hunderters, 2. dem 3fachen Produkt aus dem Quadrat des Hunderters in den Zehner, 3. dem 3fachen Produkt aus dem Hunderter in das Quadrat des Zehners, 4. dem Cubus des Zehners, 5. dem 3fachen Produkt aus dem Quadrat der Summe der Hunderter und Zehner in den Einer, 6. dem 3fachen Produkt aus der Summe der Hunderter und Zehner in das Quadrat des Einers, 7. dem Cubus des Einers, 8. dem 3fachen Produkt aus dem Quadrat der Summe der Hunderter, Zehner und Einer in die Zehntel, 9. dem 3fachen Produkt aus der Summe der Hunderter, Zehner und Einer in das Quadrat der Zehntel, 10. dem Cubus der Zehntel.

86. Aus dieser Zusammensetzung des Cubus einer mehrstelligen dekadischen Zahl ziehen wir folgende Consequenzen:

1. Die Lokalwerthe der einzelnen Bestandtheile, aus welchen der Cubus einer mehrstelligen dekadischen Zahl zusammengesetzt ist, werden von Glied zu Glied 10mal kleiner.

In dem obigen Beispiel sind die Lokalwerthe der einzelnen Theile nach einander folgende:

$$\begin{array}{lll}
100 & .\,100 & .\,100 \\
100 & .\,100 & .\,10 \\
100 & .\,10 & .\,10 \\
10 & .\,10 & .\,10 \\
10 & .\,10 & .\,1 \\
10 & .\,1 & .\,1 \\
1 & .\,1 & .\,1 \\
1 & .\,1 & .\,0{,}1 \\
1 & .\,0{,}1 & .\,0{,}1 \\
0{,}1 & .\,0{,}1 & .\,0{,}1
\end{array}$$

was sehr leicht einzusehen ist: Der Lokalwerth eines Produktes mehrerer Faktoren ist immer gleich dem Produkt der Lokalwerthe der einzelnen Faktoren. Das 1ste Glied unserer Zahl — der Hunderter — hat den Lokalwerth 100; also sein Cubus den Lokalwerth 100 . 100 . 100. Ebenso wird das 3fache Produkt aus dem Quadrat des Hunderters in den Zehner den Lokalwerth $100^2 . 10$, das 3fache Produkt aus dem Hunderter in das Quadrat des Zehners den Lokalwerth 100 . 10 . 10 und der Cubus des Zehners den Lokalwerth 10 . 10 . 10 haben. Die Summe der Hunderter und Zehner ist eine Anzahl Zehner, hat also den Lokalwerth 10; ihr Quadrat den Lokalwerth 10 . 10; somit das 3fache Produkt aus dem Quadrat der Summe der Hunderter und Zehner in den Einer den Lokalwerth 10 . 10 . 1, das 3fache Produkt aus der Summe der Hunderter und Zehner in das Quadrat des Einers aber den Lokalwerth 10 . 1 . 1 und der Cubus des Einers den Lokalwerth 1 . 1 . 1. Berücksichtigt man endlich, dass die Summe der Hunderter, Zehner und Einer eine Anzahl Einer ausmacht, die den Lokalwerth 1 hat, so erkenet man sehr leicht, dass die Lokalwerthe der noch folgenden 3 Glieder sein müssen:

$$1^2 . 0{,}1$$
$$1 . (0{,}1)^2$$
$$\text{und } (0{,}1)^3.$$

Es ist also wirklich der Lokalwerth jedes folgenden Gliedes 10mal kleiner als der des vorhergehenden.

2. Man kann auch hier wieder aus der Anzahl der Stellen einer Zahl erkennen, wie viele Stellen ihre Cubikwurzel haben muss. Man darf nur, vom Decimalkomma ausgehend, die Zahl in Klassen zu je 3 Stellen abtheilen; so viele Klassen man durch diese Eintheilung bekommt, aus eben so vielen Stellen besteht die Wurzel.

Da die einstelligen Zahlen zwischen 1 und 10 liegen, so müssen ihre Cuben zwischen 1^3 und 10^3 oder 1 und 1000 liegen und zwar noch kleiner sein als 1000, daher mit 1, 2 und 3 Stellen geschrieben werden; umgekehrt muss jede 1-, 2- bis 3stellige Zahl eine 1stellige Cubikwurzel haben. Die zweistelligen Zahlen liegen zwischen 10 und 100 mit Ausschluss der obern Grenze; ihre Cuben werden daher zwischen 10^3 und 100^3 d. h. zwischen 1000 und 1000000 liegen, exklusive die obere Grenze. Sie werden daher mit 4, 5 und 6 Stellen geschrieben und umgekehrt muss jede 4-, 5- und 6stellige Zahl eine 2stellige Cubikwurzel haben. So finden wir in gleicher Weise, dass die Cuben der 3stelligen Zahlen mit wenigstens 7 und höchstens 9 Stellen, die der 4stelligen Zahlen mit mindestens 10 und höchstens 12 Stellen u. s. f. geschrieben werden.

Wir können also sagen: Hat eine Zahl 1, 2 oder 3 Stellen, so muss ihre Cubikwurzel 1stellig sein; hat die Zahl 4, 5 oder 6 Stellen, so ist ihre Cubikwurzel 2stellig; hat die Zahl 7, 8 oder 9 Stellen, so bekommt die Wurzel 3, hat sie 10, 11 oder 12 Stellen, so bekommt ihre Cubikwurzel 4 Stellen u. s. f.

3. *Die Lokalwerthe der einzelnen Klassen sind gerade die Cuben von den Lokalwerthen der einzelnen Glieder der Wurzel.*

Hätte man etwa die 3te Wurzel aus 152444461,688 zu ziehen, so bekäme man

$$\sqrt[3]{152|444|461,|688} = \ldots,.$$

3 Klassen *vor* und *eine nach* dem Decimalkomma. Die Wurzel selber würde daher 3 Stellen *vor* und *eine nach* dem Decimalkomma bekommen. Die unterste Klasse der Zahl umfasst hier die Zehntel, Hundertstel und Tausendstel, also eine Anzahl Tausendstel und hat den Lokalwerth $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$; das unterste Glied der Wurzel (der Zehntel) hat den Lokalwerth $\frac{1}{10} = 10^{-1}$; nun ist $10^{-3} = (10^{-1})^3$ d. h. der Lokalwerth der untersten Klasse ist einmal der Cubus vom Lokalwerth des letzten Gliedes der Wurzel. Die 2te Klasse umfasst Einer, Zehner und Hunderter, ist also eine Anzahl Einer und hat den Lokalwerth 1; das 2te Glied der Wurzel hat ebenfalls den Lokalwerth 1; allein es ist auch $1 = 1^3$. Die 3te Klasse umfasst die Tausender, Zehntausender und Hunderttausender, ist also eine Anzahl Tausender und hat den Lokalwerth 1000, welcher gerade der Cubus vom Lokalwerth 10 des 3ten Gliedes der Wurzel ist. Die oberste Klasse endlich ist

= 152 Millioner, hat den Lokalwerth 10^6, welcher der Cubus ist von dem Lokalwerth 100 des höchsten Gliedes der Wurzel.

87. $\sqrt[3]{49|836|032} = 368$

```
              27
    27  :  22836
             162 )
             324 }
             216 )
  3888  :  3180032
           31104 )
            6912 }
             512 )
               0
```

Wenn wir aus 49836032 die 3te Wurzel zu ziehen haben, so finden wir durch die so eben genannte Eintheilung in Klassen gleich, dass die Wurzel 3stellig wird, und indem wir aus der obersten Klasse die 3te Wurzel bis auf eine Einheit genau ausziehen, erhalten wir als 1stes Glied der Wurzel 3 Hunderter. Wir erheben dieses zum Cubus, ziehen denselben von der obersten Klasse ab und setzen dann zu dem erhaltenen Rest die folgende Klasse (836 Tausender) herunter. Da nun auf den Cubus des Hunderters folgen muss das 3fache Produkt aus dem Quadrat des Hunderters in den Zehner und dieses Produkt einen 10mal kleinern Lokalwerth hat, als der Cubus des Hunderters, so muss dasselbe enthalten sein in den 228 (Hunderttausendern), d. h. in der Summe der heruntergesetzten und der ihnen vorangehenden Stellen, die 2 letzten abgerechnet. Wenn wir daher mit dem 3fachen Quadrat des gefundenen 1sten Gliedes, d. h. mit $3 . 300^2$ oder mit 27 (Zehntausendern) in die 228 (Hunderttausender) dividiren, so erhalten wir in dem Quotienten 6 (Zehner) das 2te Glied der Wurzel. Da nun der Cubus des Hunderters bereits abgezogen wurde, so müssen wir nur noch bilden und subtrahiren: 1) das 3fache Produkt aus dem Quadrat des Hunderters in den Zehner oder das Produkt aus dem Divisor in den Quotienten; 2) das 3fache Produkt aus dem Hunderter in das Quadrat des Zehners oder das Produkt aus dem Quadrat des Quotienten in das Dreifache des Vorhergehenden, welches Produkt dem Lokalwerth nach 10mal kleiner ist, als das 1ste, und also um eine Stelle weiter nach rechts kommt, und 3) endlich den Cubus des Quotienten, welcher wieder einen 10mal kleinern Lokalwerth hat und daher unter die letzte

Stelle zu stehen kommt. Zu dem erhaltenen Rest setzen wir nun die folgende Klasse herunter und haben so nach Subtraktion des Cubus von 36 Zehnern noch 318032, in welchem Rest zunächst das 3fache Produkt aus dem Quadrat der Summe des Hunderters und Zehners in den Einer vorkommen muss, welches, wie wir wissen, einen 10 mal kleinern Lokalwerth hat, als der Cubus des Zehners oder die 2te Klasse, und desshalb enthalten sein muss in der Summe der Stellen, die wir jetzt haben, die 2 letzten abgerechnet. Wenn wir daher das 3fache Quadrat der gefundenen 2 ersten Glieder, also $3 . 36^2 = 3888$ Hunderter bilden und damit hinein dividiren in die 31800 (Hunderter), so erhalten wir im Quotienten (8 Einer) das letzte Glied der Wurzel. Nachdem wir dann 1) das Produkt aus dem Divisor in den Quotienten, 2) das Produkt aus dem Quadrat des Quotienten in das Dreifache des Vorhergehenden, welches Produkt dem Lokalwerth nach 10 mal kleiner ist und daher um eine Stelle weiter nach rechts kommt, 3) endlich den Cubus des Quotienten, der abermals einen 10 mal kleinern Lokalwerth hat und daher unter die letzte Stelle zu stehen kommt, subtrahirt haben, so ist der vollständige Cubus von 368 abgezogen worden, und da man als Rest Null erhielt, so muss 368 genau die 3te Wurzel aus 49836032 sein.

Zusatz. Erhielte man einen von Null verschiedenen Rest, so wäre die Cubikwurzel bloss bis auf eine Einheit genau bestimmt, und man müsste daher zum Cubus der gefundenen Wurzel noch den Rest addiren, um die gegebene Zahl zu erhalten. Uebrigens könnte man die Zehntel, Hundertstel und Tausendstel als nächste herunterzusetzende Klasse betrachten und durch Fortsetzung des nämlichen Verfahrens von der 3ten Wurzel noch beliebig viele Dezimalstellen bestimmen.

88. Beispiele über Reduktion von Wurzelgrössen.

1. Beispiel: $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48} = ?$

Auflösung.

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 . 3} = 2\sqrt{3}$$
$$2\sqrt{27} = 2\sqrt{9 . 3} = 6\sqrt{3}$$
$$3\sqrt{75} = 3\sqrt{25 . 3} = 15\sqrt{3}$$
$$-9\sqrt{48} = -9\sqrt{16.3} = -36\sqrt{3}$$

Daher $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 15\sqrt{3}$
$- 36\sqrt{3} = (23-36)\sqrt{3} = -13\sqrt{3}$.

2. Beispiel. $\sqrt{\frac{a^2x - 2ax^2 + x^2}{a^2 + 2ax + x^2}} = ?$ $\frac{(a-x)\sqrt{x}}{(a+x)}$

Es ist $\sqrt{\frac{a^2x-2ax^2+x^3}{a^2+2ax+x^2}} = \sqrt{\frac{(a^2-2ax+x^2)x}{a^2+2ax+x^2}}$

$$= \frac{\sqrt{(a^2-2ax+x^2)x}}{\sqrt{a^2+2ax+x^2}} = \frac{(a-x)\sqrt{x}}{a+x}.$$

3. Beispiel: $\frac{a-b}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = ?$

$$\frac{a-b}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \sqrt{\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}}\cdot\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \sqrt{\frac{(a-b)^2(a+b)}{(a+b)^2(a-b)}}$$

$$\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

4. Beispiel: $\frac{13}{4\sqrt{7}} = \frac{13\sqrt{7}}{4.7} = \frac{13\sqrt{7}}{28}$

5. Beispiel: $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = ?$

Wir suchen den Nenner rational zu machen, indem wir Zähler und Nenner mit der Summe der Grössen multipliziren, deren Differenz wir im Nenner haben, also mit $\sqrt{b}+\sqrt{c}$; dann bekommen wir:

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$$

z.B. $\frac{12}{\sqrt{21}-\sqrt{5}} = \frac{12(\sqrt{21}+\sqrt{5})}{21-5} = \frac{12(\sqrt{51}+\sqrt{5})}{16} =$

$$\frac{3(\sqrt{21}+\sqrt{5})}{4} = \tfrac{3}{4}\sqrt{21}+\tfrac{3}{4}\sqrt{5}.$$

Ebenso $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} =$

$$\frac{7+5-2\sqrt{35}}{7-5} = \frac{12-2\sqrt{35}}{2} = 6-\sqrt{35}.$$

6. Beispiel: $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{8}} = ?$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{8}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{8})^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{8}}{3+5+2\sqrt{15}-8}$$

$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{8}}{2\sqrt{15}}$ (indem wir noch Zähler und Nenner mit $\sqrt{15}$ multipliziren)

$$= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{8})\sqrt{15}}{2.15} = \frac{\sqrt{45}+\sqrt{75}+\sqrt{120}}{30} =$$

$$\frac{\sqrt{9\,.\,5}+\sqrt{25\,.\,3}+\sqrt{4\,.\,30}}{30}=\frac{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}+2\sqrt{30}}{30}=$$
$$\tfrac{1}{10}\sqrt{5}+\tfrac{1}{6}\sqrt{3}+\tfrac{1}{15}\sqrt{30}.$$

89. a. Es ist $(\pm 5)^2 = +25$; umgekehrt $\sqrt{+25} = \pm 5$

$(\pm 5)^4 = +625$; . . . . $\sqrt[4]{625} = \pm 5$

$(\pm 2)^6 = +64$ $\sqrt[6]{+63} = \pm 2$

$(\pm a)^{2n} = +a^{2n}$ $\sqrt[2n]{+a^{2n}} = \pm a$

d. h. Wenn wir eine positive oder negative Zahl zu einer *geraden* Potenz erheben, zur 2ten, 4ten, 6ten... $2n$ten, so wird das Resultat jedesmal positiv; umgekehrt kann dann eine *gerade* Wurzel aus einer positiven Zahl sowol positiv als negativ sein, oder mit andern Worten: *Eine gerade Wurzel aus einer positiven Zahl hat zwei dem absoluten Werthe nach gleiche, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Werthe.*

b. Es ist ferner

$(\pm 7)^3 = \pm 343$, umgekehrt $\sqrt{\pm 343} = \pm 7$

$(\pm a)^{2n+1} = \pm a^{2n+1}$ $\sqrt[2n+1]{\pm a^{2n+1}} = \pm a$

d. h. Wenn wir eine positive oder negative Zahl (± 7, $\pm a$) zu einer ungeraden Potenz erheben, zur 3ten, 5ten . . . $(2n+1)$ten, so erhalten wir stets ein Resultat vom nämlichen Vorzeichen, wie diese Zahl. Umgekehrt wird eine Wurzel ungeraden Ranges aus einer positiven Zahl *positiv*, aus einer negativen Zahl *negativ* ausfallen.

c. In (a) haben wir bereits gesehen, dass wenn man eine positive oder negative Zahl zu einer geraden Potenz erhebt, das Ergebniss jedesmal positiv wird. Es gibt somit weder eine positive, noch eine negative Zahl, die, zu einer *geraden* Potenz erhoben, ein negatives Resultat hervorbringt; folglich wird umgekehrt eine *gerade* Wurzel aus einer negativen Zahl sich weder durch eine positive noch durch eine negative Zahl, weder genau, noch näherungsweise ausdrücken lassen. So ist $\sqrt{-49}$ weder $= +7$ noch $= -7$, weil beide quadrirt $+49$ geben. Es kann aber $\sqrt{-49}$ auch nicht eine positive oder negative, dem absoluten Werthe nach von ± 7 *verschiedene* Zahl sein, z. B. nicht $= \pm 7 \pm \omega$; denn $(\pm 7 \pm \omega)^2 = 49 + \omega^2 \pm 14\omega$; d. h. eine dem absoluten Werthe nach von ± 7 verschiedene Zahl gibt, zum Quadrat erhoben, ein dem absoluten Werthe nach von 49 *verschiedenes* Resultat. Man

kann daher gerade Wurzeln aus negativen Zahlen, wie $\sqrt{-49}$, $\sqrt[4]{-81}$, $\sqrt[2n]{-a^{2n}}$ weder durch die positive, noch durch die negative Einheit, weder genau, noch näherungsweise ausdrücken. Solche weder durch die positive, noch durch die negative Einheit ausdrückbare Zahlen nennt man imaginäre Zahlen; zu ihrer Darstellung bedarf's einer neuen Einheit, die nichts anderes ist als $\sqrt{-1}$. So hat man

$$\sqrt{-49} = \pm\sqrt{49.(-1)} = \pm 7\sqrt{-1}$$
$$\sqrt[6]{-64} = \sqrt{\sqrt[3]{-64}} = \sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1}.$$

Im Gegensatz zu den imaginären nennt man die bisher bekannten, durch die positive oder die negative Einheit ausdrückbaren Zahlen reell.

Wir können die Resultate *a*, *b* und *c* so zusammenfassen: Eine ungerade Wurzel aus einer positiven oder negativen Zahl hat stets einen reellen Werth vom nämlichen Vorzeichen, wie diese Zahl; eine gerade Wurzel aus einer positiven Zahl hat zwei reelle Werthe, die absolut gleich, im Zeichen aber verschieden sind; eine gerade Wurzel aus einer negativen Zahl ist imaginär.

90. Die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl A hat also, wie wir gesehen haben, zwei gleich grosse, dem Zeichen nach entgegengesetzte Werthe und $\sqrt{A}$ kann sowol den einen, als den andern dieser Werthe bedeuten, so dass, wenn $A = a^2$, dann $\sqrt{A} = \pm a$. Will man nun gleich von vorn herein diese beiden Werthe andeuten, so schreibt man: $\pm\sqrt{A}$. Dass die Quadratwurzel aus einer Grösse A übrigens nicht mehr als zwei Werthe haben kann, liesse sich leicht so nachweisen: Wenn ich mit x jede Grösse bezeichne, welche, quadrirt, A gibt, so müsste also $x^2 = A$ oder $x^2 - A = 0$ sein. Allein $x^2 - A = (x + \sqrt{A})(x - \sqrt{A})$; man bekommt daher die Gleichung:

$$(x + \sqrt{A})(x - \sqrt{A}) = 0.$$

Nun kann aber ein Produkt nur Null werden, wenn einer seiner Faktoren $= 0$; also hat man

$$1.\ x + \sqrt{A} = 0 \text{ oder } x = -\sqrt{A}$$
$$\text{oder } 2.\ x - \sqrt{A} = 0 \text{ oder } x = +\sqrt{A}$$

Für andere Werthe von x wird die Gleichung $x^2 - A = 0$ nicht erfüllt.

91. Wir haben hier zum ersten Mal von dem Satze Gebrauch gemacht, dass ein Produkt aus 2 Faktoren Null wird, wenn einer seiner Faktoren $= 0$ ist und wollen diesen in der Folge häufig zur Anwendung kommenden Satz hier noch speziell nachweisen.

Wenn in dem Produkt ab der Multiplikand $a = 0$ ist, so leuchtet der Satz unmittelbar ein; denn je nachdem der Multiplikator ganz oder gebrochen ist, hat man entweder den Multiplikanden selbst oder einen Theil desselben — die beide $= 0$ — mehrmal als Summand zu setzen. Eine Summe aber aus mehrern Summanden, deren jeder $= 0$, ist ebenfalls $= 0$.

Ist dagegen der Multiplikator $b = 0$, so kann man ihn als Differenz zweier gleicher Zahlen ansehen, z. B. $0 = c - c$ setzen; dann ist $a \,.\, 0 = a\,(c - c) = ac - ac = 0$.

Ob also der erste oder der zweite Faktor Null sei, stets wird das Produkt = Null sein. Wären endlich beide Faktoren $= 0$, so wäre das Produkt aus doppeltem Grunde $= 0$ oder — wie man zu sagen pflegt — Null von der 2ten Ordnung.

Es geht daraus auch hervor, dass wenn keiner der Faktoren eines Produktes gleich Null, das Produkt selbst ebenfalls nicht Null sein kann.

Fünfter Abschnitt.

Gleichungen des ersten Grades.

Definitionen: Auflösung der Gleichungen ersten Grades mit **einer** Unbekannten.

92. Wenn 2 Grössen dem Werthe nach einander gleich sind, so drücken wir dies dadurch aus, dass wir sie durch das Gleichheitszeichen mit einander verbinden. Jede solche Verbindung zweier Grössen oder Ausdrücke durch das Gleichheitszeichen heisst eine Gleichung im weitesten Sinne des Wortes. Nun können aber die durch das Gleichheitszeichen verbundenen Ausdrücke entweder so beschaffen sein, dass ihre Gleichheit unmittelbar aus der Natur ihrer Zusammensetzung sich ergibt, d. h. dass sie einander wirklich völlig gleich werden, sobald man die darin angedeuteten

Operationen ausführt; dann drückt die Gleichung eine allgemein geltende, unbedingte Gleichheit aus, wie z. B. $(a+b)(a-b)= a^2-b^3$, $(3x+1)(4x-7)=12x^2-17x-7$, welche Gleichungen immer wahr bleiben, was für Werthe man auch an die Stelle der Buchstaben setzen mag; — oder die durch das Gleichheitszeichen verbundenen Ausdrücke sind an sich durchaus nicht gleich, enthalten aber noch eine oder mehre unbestimmt gelassene, unbekannte Grössen; alsdann ist es im Allgemeinen immer möglich, für diese unbekannten Grössen solche spezielle Werthe zu finden, dass die Ausdrücke sich wirklich gleich werden; es drückt die Gleichung dann nicht mehr eine allgemein geltende, sondern eine bedingte, nur in speziellen Fällen gültige Gleichheit aus. Wenn wir z. B. schreiben: $3x+5=26$, so ist diese Gleichung durchaus nicht wahr, so lange x beliebige Zahlenwerthe vorstellt. Setzen wir z B. für x successive 1, 2, 3...etc., so werden wir immer Ausdrücke erhalten, die gar nicht $=26$ sind; nur für den speziellen Fall, dass man $x=7$ setzt, wird die Gleichung zur Wahrheit. Ebenso sind in $5x-13=3x+11$ die beiden Ausdrücke an sich verschieden; allein es ist möglich, für x einen solchen Werth zu finden, dass in der That $5x-13=3x+11$ wird; man darf nur $x=12$ setzen. Im ersten Fall haben wir eine analytische, im letzten eine algebraische Gleichung. Eine analytische Gleichung ist demnach die Gleichsetzung zweier Ausdrücke, deren Gleichheit unmittelbar aus der Natur ihrer Zusammensetzung hervorgeht, die also ungestört bleibt, welche Werthe auch an die Stelle der einzelnen Buchstabengrössen gesetzt werden mögen. Eine algebraische Gleichung aber ist die Gleichsetzung zweier Ausdrücke, die an sich durchaus nicht gleich sind, in welchen aber noch eine oder mehrere unbekannte Grössen vorkommen, und wobei es sich dann darum handelt, für die Unbekannten solche Werthe zu finden, dass die Ausdrücke wirklich gleich werden.

Wenn endlich die beiden Ausdrücke nicht bloss dem Werthe, sondern auch der Form nach einander gleich sind, so wird die Gleichung eine identische genannt. So wird z. B. $(x+b)^2= a^2+2ab+b^2$ identisch, sobald man die bloss angedeuteten Operationen ausführt; denn alsdann hat man: $a^2+2ab+b^2=a^2+2ab+b^2$.

Da jede analytische Gleichung zur Identität wird, wenn man die darin angedeuteten Operationen ausführt, so werden gewöhnlich alle analytischen Gleichungen identische genannt.

Die beiden durch das Zeichen = verbundenen Ausdrücke werden die Seiten der Gleichung genannt.

Eine Gleichung auflösen, heisst nichts anderes, als die Werthe suchen, welche an die Stelle der unbekannten Grössen gesetzt werden müssen, um die Gleichung zur Wahrheit zu machen oder zu verifiziren. Die Werthe der Unbekannten heissen dann auch die Wurzeln der Gleichung.

Wir unterscheiden die Gleichungen nach der Anzahl der ihnen vorkommenden Unbekannten in Gleichungen mit 1, 2, 3 oder mehrern Unbekannten, und nach dem Grade dieser Unbekannten in Gleichungen vom 1sten, 2ten, 3ten.. und $m$ten Grade. Die Gleichung heisst vom $m$ten Grade, wenn der höchste Exponent der Unbekannten $= m$, oder wenn, falls mehrere Unbekannte da sind, der Grad eines Gliedes in Bezug auf die Unbekannten $= m$ und keines der übrigen Glieder von höherm Grade ist.

93. Bei der Auflösung einer Gleichung muss man mit derselben gewisse Umformungen vornehmen; diese dürfen aber nur so beschaffen sein, dass dadurch das Wesen der Gleichung nicht gestört wird. Jede neue Form, in welche die anfängliche Gleichung übergeführt wird, muss daher ganz dieselben Wurzeln zulassen, wie die erste, nicht mehr und nicht weniger, mit andern Worten: sie muss der ersten vollkommen äquivalent sein.

Die Transformationen, welche mit einer Gleichung, unbeschadet ihrem Wesen, vorgenommen werden dürfen, sind folgende:

1. Man darf auf beiden Seiten einer Gleichung dieselbe Grösse addiren oder subtrahiren, ohne die Wurzeln derselben zu verändern.

Seien A und B zwei Ausdrücke, welche die Unbekannte x enthalten, C eine beliebige Grösse, die x enthalten kann oder nicht, so behaupten wir, die Gleichung

$$A = B \ (1) \text{ könne ersetzt werden}$$

durch

$$A \pm C = B \pm C \ (2).$$

Um das zu beweisen, müssen wir zeigen, dass die Gleichung (2) äquivalent sei mit (1) d. h. dass jede Wurzel der Gleichung (1) auch Wurzel der Gleichung (2) und umgekehrt jede Wurzel der Gleichung (2) auch Wurzel der Gleichung (1) sei. In der That! Wenn α eine Wurzel ist der Gleichung (1), so heisst das: setzt man in (1) α für x, so wird dadurch $A = B$; da nun für $x = \alpha$ $A = B$ wird, C aber unter allen Umständen $= C$ bleibt, so muss auch noch

$$A \pm C = B \pm C \text{ sein ;}$$

denn die Gleichheit zweier Grössen wird nicht gestört, wenn man beide um gleich viel vermehrt oder vermindert. Es ist aber auch umgekehrt jede Wurzel der Gleichung (2) Wurzel der Gleichung (1). Denn sei $x = \beta$ eine Wurzel von (2), so heisst das: wenn man in (2) x ersetzt durch β, so wird

$$A \pm C = B \pm C.$$

Nimmt man nun auf beiden Seiten $\pm C$ weg, so müssen nach demselben Axiom die Reste A und B ebenfalls gleich sein. Also der nämliche Werth von x, welcher $A + C = B + C$ macht, wird auch noch $A = B$ machen.

Mit Hülfe dieses Satzes kann man ohne weiter einzelne Glieder von der einen Seite der Gleichung auf die andere schaffen und Gleichungen auflösen, in welchen keine Brüche vorkommen. Sei z. B. gegeben

$$(\alpha)\quad 27x - 42 = 13x + 56,$$

so können wir auf beiden Seiten $13x$ subtrahiren oder, was dasselbe ist, $-13x$ addiren, wodurch wir erhalten:

$$(\beta)\quad 27x - 13x - 42 = 56.$$

Indem wir noch auf beiden Seiten $+42$ addiren, verwandelt sich (β) in

$$(\gamma)\quad 27x - 13x = 56 + 42.$$

Durch Vergleichung von Gleichung (γ) mit Gleichung (α) finden wir, dass das Glied $13x$ mit entgegengesetztem Zeichen auf die linke, das Glied -42 aber mit entgegengesetztem Zeichen auf die rechte Seite gekommen ist, so dass alle Glieder, welche x enthalten, nunmehr auf der linken, alle bekannten Glieder aber auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens sind. Und so kann man allgemein irgend ein Glied mit verändertem Zeichen auf die andere Seite setzen, ohne die Gleichung zu stören, weil das darauf hinaus läuft, auf beiden Seiten jenes Glied zu subtrahiren oder dasselbe mit verändertem Vorzeichen zu addiren.

Wenn wir nun in Gleichung (γ) noch die gleichartigen Glieder zusammenziehen, so geht sie über in

$$14x = 98$$

und indem wir auf beiden Seiten durch den Coeffizienten von x dividiren, bekommen wir endlich

$$x = \tfrac{98}{14} = 7.$$

2. Man kann auch beide Seiten einer Gleichung mit der nämlichen, von Null verschiedenen und die

Unbekannte x nicht enthaltenden Grösse multipliziren, ohne die Wurzeln zu ändern.

Wir denken uns, um diese Behauptung nachzuweisen, alle Glieder auf die nämliche Seite geschafft, die Gleichung also auf die Form gebracht:

$$A = 0 \quad (1)$$

dann behaupten wir: Wenn $m \lesseqgtr 0$ und überdiess x nicht enthält so ist die Gleichung

$$mA = 0 \quad (2)$$

der Gleichung (1) äquivalent.

Sei wieder $x = \alpha$ eine Wurzel der Gleichung (1), so heisst das: Für $x = \alpha$ wird der Ausdruck $A = 0$. Ist aber $A = 0$, so muss auch $mA = 0$ sein, weil ein Produkt Null wird, sobald ein Faktor desselben gleich Null ist. Jede Wurzel der Gleichung (1) ist somit auch Wurzel der Gleichung (2).

Es ist aber auch umgekehrt jede Wurzel der Gleichung (2) eine Wurzel der Gleichung (1). Denn wenn für $x = \beta$ die Gleichung (2) verifizirt wird, so heisst das: wenn wir in mA für x setzen β, so wird das Produkt $mA = 0$. Nun ist aber m weder an sich gleich Null, noch kann es Null werden dadurch, dass man $x = \beta$ setzt, weil es ja von x ganz unabhängig ist; es muss folglich der andere Faktor $A = 0$ werden d. h. jede Wurzel der Gleichung (2) ist auch Wurzel der Gleichung (1).

Dieser letzte Schluss wäre nicht mehr richtig, wenn $m = 0$ wäre oder die Unbekannte x enthielte.

Denn wäre $m = 0$, so würde die Gleichung $mA = 0$ erfüllt für jeden beliebigen Werth von x, ohne dass desshalb $A = 0$ zu sein brauchte. Enthielte aber m die Unbekannte x, so dürfte man auch nicht mehr aus $mA = 0$ auf $A = 0$ schliessen; denn diejenigen Werthe von x, welche m annulliren, würden Wurzeln der Gleichung (2) sein, ohne desshalb die Gleichung (1) verifiziren zu müssen.

So hat die Gleichung $7x - 21 = 0$ die Wurzel $x = 3$. Multiplizirt man aber beide Seiten derselben der Reihe nach mit $x + 5$, $x^2 - 36$, $x^2 - 7x + 12$, $x^3 - 125$, so erhält man die Gleichungen:

$$(x+5)(7x-21) = 0$$
$$(x^2-36)(7x-21) = 0$$
$$(x^2-7x+12)(7x-21) = 0$$
$$(x^3-125)(7x-21) = 0$$

die ausser der Wurzel $x = 3$ noch zulassen

die erste die Wurzel -5,
die 2te die Wurzeln $+6$ und -6,
die 3te die Wurzeln 3 und 4,
die 4te die Wurzeln 5, $5\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$ und $5\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$.

Es werden somit durch Multiplikation mit einem Ausdruck, der die Unbekannte enthält, so viele fremde Wurzeln eingeführt, als der Grad dieses Ausdruckes in Bezug auf x Einheiten enthält.

Indem wir endlich beide Seiten mit Null multipliziren, bekommen wir eine identische Gleichung, die für jeden Werth von x verifizirt würde. Es wäre demnach die Zahl der hier eingeführten neuen Wurzeln unendlich gross.

94. Beispiele.

$$1.\quad \frac{7}{4}x - \frac{5x}{8} - 16 = \frac{x}{2} - 1.$$

Wir können dieser Gleichung zunächst eine andere Form geben, indem wir auf beiden Seiten mit einem Vielfachen der Nenner multipliziren; natürlich werden wir, um mit den möglichst kleinsten Zahlen zu rechnen, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner 4, 8, 2 wählen, das $= 8$. Wir erhalten dadurch:

$$14x - 5x - 128 = 4x - 8,$$

welche Gleichung nach Nro. 93 ganz die nämlichen Werthe von x zulässt, wie die erste. Indem wir jetzt noch die bekannten Glieder auf die rechte, die unbekannten auf die linke Seite schaffen, erhalten wir

$$14x - 5x - 4x = 128 - 8$$

oder
$$5x = 120$$

woraus
$$x = \tfrac{120}{5} = 24.$$

Verifikation: Wir können die Richtigkeit dieser Lösung prüfen, indem wir den für x gefundenen Werth in die ursprüngliche Gleichung setzen und nachsehen, ob sie dadurch verifizirt wird. Setzen wir den gefundenen Werth 24 an die Stelle von x, so kommt

$$\frac{7}{4}.24 - \frac{5.24}{8} - 16 = \frac{24}{2} - 1$$

oder
$$42 - 15 - 16 = 12 - 1$$
$$42 - 31 = 12 - 1$$

oder
$$11 = 11.$$

Die Gleichung wird also für den speziellen Werth $x = 24$ zur Wahrheit.

2tes Beispiel: $\frac{7x}{12} + \frac{9x}{8} + \frac{x}{3} = \frac{61}{6} - \frac{x}{2}$.

Wenn wir hier mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner d. h. mit 24 beide Seiten multipliziren, so erhalten wir:

$$14x + 27x + 8x = 244 - 12x$$

oder
$$14x + 27x + 8x + 12x = 244$$
$$61x = 244$$

woraus
$$x = \tfrac{244}{61} = 4.$$

Verifikation: $\frac{7 \cdot 4}{12} + \frac{9 \cdot 4}{8} + \frac{4}{3} = \frac{61}{6} - \frac{4}{2}$

oder
$$\tfrac{7}{3} + \tfrac{9}{2} + \tfrac{4}{3} = \tfrac{61}{6} - 2$$
$$\tfrac{11}{3} + \tfrac{9}{2} = \tfrac{61}{6} - 2$$
$$\frac{22+27}{6} = \frac{61-12}{6}$$
$$\tfrac{49}{6} = \tfrac{49}{6}.$$

3tes Beispiel: $\frac{11x-3}{9} - \frac{5}{2} - \frac{18-x}{3} = \frac{2x-3}{18}$

Kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches der Nenner ist 18; daher

$$2(11x-3) - 5 \cdot 9 - 6(18-x) = 2x - 3$$
$$22x - 6 - 45 - 108 + 6x = 2x - 3$$
$$28x - 159 = 2x - 3$$
$$26x = 159 - 3$$
$$26x = 156$$
$$x = \tfrac{156}{26} = 6$$

Verifikation: Führen wir den Werth $x = 6$ in unsere Gleichung ein, so geht sie über in

$$\frac{66-3}{9} - \frac{5}{2} - \frac{18-6}{3} = \frac{12-3}{18}$$
$$\tfrac{63}{9} - \tfrac{5}{2} - \tfrac{12}{3} = \tfrac{9}{18}$$
$$7 - 6\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

4tes Beispiel:

(α) $\frac{1}{2}[\frac{1}{4}(3x - 7) + 4x] + \frac{2}{5}(3x - 10) = \frac{1}{3}[2(6x-7) - 7]$

Um diese Gleichung mit mehrfachen Klammern zu lösen, können wir entweder erst die Klammern öffnen und nachher die Brüche wegschaffen oder dann erst die Brüche wegschaffen und

dann die Klammern öffnen. Bei Lösung der Klammern kann man entweder von aussen nach innen oder umgekehrt gehen. So wenn wir z. B. $\frac{1}{2}[\frac{1}{4}(3x-7)+4x]$ von aussen nach innen öffnen, führen wir erst die Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ aus, wodurch die eckigen Klammern verschwinden und nachher noch die übrigen angedeuteten Operationen. Man bekommt so successive

$$\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{4}(3x-7)+4x]=\tfrac{1}{8}(3x-7)+2x=\tfrac{3}{8}x-\tfrac{7}{8}+2x.$$

Beim umgekehrten Verfahren aber hätte man:

$$\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{4}(3x-7)+4x]=\tfrac{1}{2}[\tfrac{3}{4}x-\tfrac{7}{4}+4x]=\tfrac{3}{8}x-\tfrac{7}{8}+2x.$$

Wir wollen bei unserer Gleichung erst die äusern Klammern öffnen, so bekommen wir:

$$(\beta)\quad \tfrac{1}{8}(3x-7)+2x+\tfrac{2}{5}(3x-10)=\tfrac{2}{3}(6x-7)-\tfrac{7}{3}$$

und wenn wir nun mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner, nämlich mit 120, beide Seiten multipliziren, so kommt

$$15(3x-7)+240x+48(3x-10)=80(6x-7)-280$$
$$45x-105+240x+144x-480=480x-560-280$$
$$45x+240x+144x-480x=105+480-560-280$$
$$429x-480x=585-840$$
$$-51x=-255$$
$$51x=255$$
$$x=\tfrac{255}{51}=5.$$

Verifikation:

$$\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{4}(3\,.\,5-7)+4\,.\,5]+\tfrac{2}{5}(3\,.\,5-10)=\tfrac{1}{3}[2(6\,.\,5-7)-7]$$
$$\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{4}(15-7)+20]+\tfrac{2}{5}(15-10)=\tfrac{1}{3}[2(30-7)-7]$$
$$\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{4}\,.\,8+20]+\tfrac{2}{5}\,.\,5=\tfrac{1}{3}[46-7]$$
$$\tfrac{1}{2}\,.\,22+2=\tfrac{1}{3}\,.\,39$$

$11+2=13$, was wirklich der Fall ist.

5tes Beispiel: $\frac{(a-b)x}{a+b}+5a-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{(3a-b)(x-b)a}{a^2-b^2}-2x$

Da $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, so ist a^2-b^2 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner, und wenn wir mit demselben multipliziren, so erhalten wir zunächst:

$$(a-b)^2x+5a(a^2-b^2)-(a+b)^3=(3a-b)(x-b)a-2(a^2-b^2)x$$

und wenn wir hier die angedeuteten Operationen ausführen, so kommt:

$$(a^2-2ab+b^2)x+5a^3-5ab^2-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)=$$
$$3a^2x-abx-3a^2b+ab^2-2a^2x+2b^2x$$

oder:

$$(a^2-2ab+b^2-3a^2+ab+2a^2-2b^2)x=-5a^3+5ab^2+a^3+3a^2b$$
$$+3ab^2+b^3-3a^2b+ab^2$$
$$(-ab-b^2)x=-4a^3+9ab^2+b^3$$
$$x=\frac{-4a^3+9ab^3+b^3}{-ab-b^2}=\frac{4a^3-9ab^2-b^3}{ab+b^2},$$

indem man Zähler und Nenner noch mit -1 multiplizirt. Statt dessen hätte man auch in der Gleichung

$$(-ab-b^2)x=-4a^3+9ab^2+b^3$$

auf beiden Seiten mit -1 multipliziren können, wodurch sie sich in

$$(ab+b^2)x=4a^3-9ab^2-b^3$$

verwandelt hätte, aus der sich wieder $x=\frac{4a^3-9ab^2-b^3}{ab+b^2}$ ergäbe.

Diese Beispiele genügen, um für die Auflösung einer Gleichung des 1sten Grades mit einer Unbekannten folgende allgemeine Regel abzuleiten: Wir schaffen zuerst die Nenner weg, wenn solche vorkommen, indem wir auf beiden Seiten mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen derselben multipliziren; dann führen wir alle bloss angedeuteten Operationen aus, bringen alle Glieder, die das x enthalten, auf die eine, alle bekannten Glieder auf die andere Seite der Gleichung, ziehen sodann alle unbekannten Glieder in eines zusammen, indem wir das x als gemeinschaftlichen Faktor absondern und dividiren endlich auf beiden Seiten durch den Coeffizienten von x, so erhalten wir auf der einen Seite x und auf der andern Seite dessen Werth.

95. Absolut nothwendig ist die Ausführung der angedeuteten Operation indessen nur da, wo ohne sie eine Trennung der bekannten Glieder von denen, welche die Unbekannten enthalten, nicht möglich wäre. Sonst kann man damit auch warten, bis man den Ausdruck für die Unbekannte gebildet hat. Ja es gibt sogar Fälle, in denen es sehr zweckmässig ist, nach Wegschaffung der Nenner nicht mit Ausführung der angedeuteten Operationen zu beginnen. Diese treten nämlich dann ein, wenn die Glieder mit der Unbekannten oder die bekannten Glieder oder beide zugleich gemeinschaftliche Faktoren enthalten, wie in folgender Gleichung:

$$\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a}$$

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller Nenner ist

$a(a+b)^3$. Indem wir beide Seiten der Gleichung damit multipliziren, bekommen wir

$$3a^2bc(a+b)^2+a^3b^2+(2a+b)b^2(a+b)x=3ac(a+b)^3x+b(a+b)^3x$$

oder

$$3ac(a+b)^3x+b(a+b)^3x-(2a+b)b^2(a+b)x=3a^2bc(a+b)^2+a^3b^2$$

Nun haben die Glieder mit x den Faktor $a+b$ gemein; wir wollen diesen als gemeinschaftlichen Faktor herausheben und ebenso rechts ab absondern, so kommt

$$(a+b)[3ac(a+b)^2+b(a+b)^2-(2a+b)b^2]x=ab[3ac(a+b)^2+a^2b]$$

woraus folgt

$$x=\frac{ab[3ac(a+b)^2+a^2b]}{(a+b)[3ac(a+b)^2+b(a+b)^2-(2a+b)b^2]}$$

In den eckigen Klammern vom Zähler und Nenner kommt $3ac(a+b)^2$ als erstes Glied vor; wir führen daher nur bei den folgenden Gliedern die angedeuteten Operationen aus und bekommen

$$b(a+b)^2-(2a+b)b^2=b(a^2+2ab+b^2)-2ab^2-b^3$$
$$=a^2b+2ab^2+b^3-2ab^2-b^3=a^2b.$$

Somit

$$x=\frac{ab[3ac(a+b)^2+a^2b]}{(a+b)[3ac(a+b)^2+a^2b]}=\frac{ab}{a+b}.$$

95. Definition. Wenn wir ein Vielfaches einer Gleichung mit einem beliebigen Vielfachen einer andern durch Addition oder Subtraktion verbinden, so heisst die resultirende Gleichung eine Combination der beiden frühern. Beichnen X und Y Ausdrücke, welche die Unbekannten x und y enthalten, wäre z. B.

$$X=3x-7y+12$$
$$Y=4x+5y-3z$$

so wären $X=0$ und $Y=0$ zwei Gleichungen 1sten Grades mit 2 Unbekannten und $mX\pm nY=0$ wäre eine Combination derselben.

96. Lehrsatz: *Jede Combination zweier Gleichungen kann an die Stelle einer derselben treten, wofern die Zahlen m und n, mit welchen die Gleichungen multiplizirt wurden, von Null verschieden sind und die Unbekannten nicht enthalten.*

Wenn also (1) $X=0$
(2) $Y=0$

dann muss (3) $mX\pm nY=0$ eine Gleichung sein, welche eine der beiden Gleichungen (1) und (2) ersetzen kann.

Wir haben nur zu zeigen, dass die Wurzeln der Gleichungen (1) und (2) auch die Gleichung (3) verifiziren und dass umgekehrt alle Werthe von x und y, welche der Gleichung (3) und einer der

beiden Gleichungen (1) und (2) Genüge leisten, auch die andere Gleichung verifiziren.

In der That sei $x = \alpha$ und $y = \beta$ eine Auflösung der Gleichungen (1) und (2), so heisst das: wenn man in diesen Gleichungen $x = \alpha$ und $y = \beta$ setzt, so werden X und Y dadurch zu Null. Allein die Werthe von x und y, welche X und Y annulliren, machen offenbar auch die Produkte mX und nY zu Null und daher auch deren Summe oder Differenz $= 0$. Umgekehrt behaupten wir, dass wenn für $x = \alpha$, $y = \beta$ die Gleichungen (3) und (2) verifizirt werden, alsdann $x = \alpha$ und $y = \beta$ auch die Gleichung (1) verifiziren. Denn nach Voraussetzung wird für $x = \alpha$, $y = \beta$ $mX \pm nY = 0$ und zudem $Y = 0$; somit auch das Produkt $nY = 0$. Allein aus

$$mX \pm nY = 0$$
$$\text{und} \quad nY = 0$$

folgt:
$$mX = 0.$$

Diejenigen Werthe von x und y, welche den Gleichungen (3) und (2) genügen, machen also das Produkt $mY = 0$. Allein nach Voraussetzung ist m weder an sich gleich Null, noch kann es — weil von x und y unabhängig — Null werden, wenn man x und y durch α und β ersetzt; somit muss der andere Faktor $X = 0$ werden d. h. die Wurzeln der Gleichungen (3) und (2) sind auch Wurzeln der Gleichung (1). In gleicher Weise wird gezeigt, dass Werthe von x und y, welche (3) und (1) genügen, auch Wurzeln der Gleichung (2) sein müssten, woraus der Satz folgt:

97. Jede Gleichung ersten Grades mit 2 Unbekannten lässt sich auf die Form bringen $ax + by = c$, worin a, b und c beliebige positive oder negative Zahlen vorstellen.

Hat man z. B. die Gleichung

$$\frac{3}{4}x - \frac{2}{5}y + 1 = \frac{8}{5} + y - \frac{x}{2} \quad (1)$$

so bekommt man zunächst

$$\frac{3}{4}x + \frac{x}{2} - \frac{2}{5}y - y = \frac{8}{5} - 1$$

oder
$$\tfrac{5}{4}x - \tfrac{7}{5}y = \tfrac{3}{5}, \quad (2)$$

eine Gleichung von der behaupteten Form und in welcher

$$a = \tfrac{5}{4},\ b = -\tfrac{7}{5} \text{ und } c = \tfrac{3}{5}.$$

Wollte man für die Coeffizienten a, b und c nur ganze Zah-

len haben, so dürfte man nur beide Seiten der Gleichung (2) mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner d. h. mit 20 multipliciren, so bekäme man aus (2) die Gleichung

$$25x-28y=12,$$

also wieder eine Gleichung von der Form $ax+by=c$, in welcher $a=25$, $b=-28$ und $c=12$.

98. Eine Gleichung mit 2 Unbekannten ist immer unbestimmt d. h. es gibt nicht nur **ein**, sondern unendlich viele Werthenpaare für x und y, welche der Gleichung Genüge leisten.

Nehmen wir z. B. die obige Gleichung

$$25x-28y=12$$

so können wir hier einer der beiden Unbekannten ganz beliebige Werthe geben und jedesmal den zugehörigen Werth von y ausrechnen. Wenn wir z. B. dem y der Reihe die Werthe 0, 1, 2, 3, 4 etc. geben, so erhalten wir für x successive die Werthe $\frac{12}{25}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{68}{25}$, $\frac{96}{25}$, $\frac{124}{25}$ u. s. f., so dass die Gleichung durch jedes der folgenden Werthenpaare verifizirt würde:

mit $\begin{array}{c|c|c|c|c} y=0 & y=1 & y=2 & y=3 & y=4 \\ x=\frac{12}{25} & x=\frac{8}{5} & x=\frac{68}{25} & x=\frac{96}{25} & x=\frac{124}{25} \end{array}$ u. s. f.

Statt dessen könnten wir auch die Gleichung nach einer der beiden Unbekannten auflösen d. h. eine derselben durch die andere (in Funktion der andern) ausdrücken. Wir bekämen so

$$x=\frac{12+28y}{25}$$

Wenn wir nun in diesem Ausdruck für x, der sichtbar abhängig ist von y, dem y successive ganz beliebige Werthe geben, so bekommen wir jedesmal einen entsprechenden Werth für x, und da wir in der Wahl der Werthe von y ganz unbeschränkt sind, so gibt es unendlich viele Werthenpaare für x und y, die der Gleichung Genüge leisten. Die Aufgabe ist demnach unbestimmt.

Ganz anders gestaltet sich die Sache, wenn noch eine zweite, von der ersten verschiedene Gleichung gegeben ist d. h. wenn die beiden Unbekannten nicht bloss der einen, in der 1sten Gleichung ausgesprochenen Bedingung genügen, sondern auch noch die Forderungen einer 2ten Gleichung erfüllen sollen. Wir werden später sehen, dass, sobald die beiden Gleichungen wirklich verschiedene Bedingungen ausdrücken, es nur noch ein Werthenpaar für x und y gibt, welches gleichzeitig beide Gleichungen verifizirt, dass die Aufgabe also völlig bestimmt ist. In analoger Weise ergibt sich, dass für 3 Unbekannte 3, für 4 Unbekannte 4,

allgemein für m Unbekannte auch m verschiedene Gleichungen erforderlich sind, wenn die Aufgabe bestimmt sein soll, d. h. wenn ein solches System von m Gleichungen nur durch eine einzige Werthengruppe verifizirt werden soll.

Auflösung von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten.

99. Es seien
$$ax + by = c \quad (1)$$
$$a'x + b'y = c \quad (2)$$
die beiden Gleichungen, in welchen a', b' und c' in Gleichung (2) ganz Aehnliches bedeuten, wie a, b und c in Gleichung (1). Wir können zur Bestimmung der Unbekannten verschiedene Wege einschlagen, die alle dahin zielen, aus den 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten eine Gleichung mit nur einer Unbekannten abzuleiten und so die Aufgabe auf die Lösung einer Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten zurückzuführen.

Erste Methode: Substitutionsmethode.

Aus der 1sten Gleichung folgt: $x = \frac{c - by}{a}$.

Nun soll der Werth von x auch zugleich noch den Bedingungen der 2ten Gleichung genügen, d. h. so beschaffen sein, dass das a'fache desselben $+ b'y = c'$. Wir drücken diess aus, indem wir den Werth $\frac{c - by}{a}$ in die 2te Gleichung an die Stelle von x setzen, wodurch wir erhalten:

$$(3) \quad a'\left(\frac{c-b}{a}\right) + b'y = c'.$$

Das ist nun eine Gleichung, die nur noch y enthält, aus welcher daher diese Unbekannte gefunden werden kann. Wenn wir sie auflösen, so erhalten wir:

$$a'(c - by) + ab'y = ac'$$
$$a'c - a'by + ab'y = ac'$$
$$(ab' - a'b)y = ac' - a'c$$
$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Da die Gleichung (3) durch Substitution des aus Gleichung (1) gezogenen Werthes von x in Gleichung (2) erhalten wurde, so muss der daraus gezogene Werth von y den Bedingungen der beiden Gleichungen (1) und (2) genügen, d. h. sie beide verifiziren.

Den Werth von x erhalten wir nun entweder, indem wir den für y gefundenen Werth in eine der beiden Gleichungen (1 und 2) setzen, wodurch sich dieselbe sofort in eine Gleichung mit nur einer Unbekannten verwandelt; — oder indem wir zuerst aus der 1sten Gleichung das y in Funktion von x berechnen, den so erhaltenen Werth in die 2te Gleichung setzen und daraus x bestimmen. Durch Anwendung des 1sten Verfahrens erhalten wir:

$ax+b\left(\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}\right)=c$, woraus, indem wir mit $ab'-a'b$ multipliziren und dann die Rechnungen ausführen:

$$a(ab'-a'b)x+b(ac'-a'c)=c(ab'-a'b)$$

$$a(ab'-a'b)x+abc'-a'bc=ab'c-a'bc$$

oder $a(ab'-a'b)x=ab'c-abc'$, oder, durch a dividirt:

$$(ab'-a'b)x=b'c-bc' \text{ und } x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}.$$

Durch Anwendung des 2ten Verfahrens aber: Aus Gleichung (1): $y=\frac{c-ax}{b}$, und indem wir diesen Werth in die 2te Gleichung setzen:

$$a'x+b'\left(\frac{c-ax}{b}\right)=c'$$

$$a'bx+b'c-ab'x=bc'$$

$$(a'b-ab')x=bc'-b'c$$

$$x=\frac{bc'-b'c}{a'b-ab'}=\frac{cb'-bc'}{ab'-ab'}.$$

Diese Methode, nach der wir also aus der einen Gleichung die eine Unbekannte x in Funktion der andern Unbekannten y berechnen, dann den dafür gefundenen Werth in die 2te Gleichung setzen und so die 2te Unbekannte y bestimmen, heisst gewöhnlich: Substitutionsmethode.

100. Comparationsmethode. Es seien wieder die Gleichungen

$$(1)\quad ax+by=c \text{ und}$$

$$(2)\quad a'x+b'y=c'$$

gegeben, so lösen wir die 1ste Gleichung auf x und die 2te ebenfalls nach x auf. Nach der 1sten Gleichung muss:

$$x=\frac{c-by}{a};$$

nach der zweiten Gleichung muss aber auch

$$x=\frac{c'-b'y}{a'}.$$

Da nun das x in den beiden Gleichungen den nämlichen Werth haben soll, so muss (3) $\frac{c-by}{a}=\frac{c'-b'y}{a'}$,

und das ist jetzt eine Gleichung, welche nur noch die Unbekannte y enthält. Lösen wir sie auf, so kommt:

$$a'(c-by)=a(c'-b'y) \text{ oder}$$
$$a'c-a'by=ac'-ab'y$$
$$(ab'-a'b)y=ac'-a'c$$
$$y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b'}, \text{ wie früher.}$$

Der Werth von x könnte entweder auf die nämliche Weise oder dann auch dadurch gefunden werden, dass wir den für y gefundenen Werth in eine der gegebenen Gleichungen setzen, die dadurch zu einer Gleichung mit nur einer Unbekannten wird.

Dieses unter dem Namen Comparationsmethode bekannte Verfahren besteht also darin, jede der beiden Gleichungen auf die nämliche Unbekannte aufzulösen und dann die so erhaltenen Werthe derselben einander gleich zu setzen.

101. Eliminationsmethode. Es seien wieder die beiden Gleichungen (1) $ax+by=c$ und

(2) $a'x+b'y=c$

gegeben, so wissen wir aus No. 96, dass jede Combination derselben eine von ihnen vertreten kann, d. h. für x und y ganz die nämlichen Werthe liefert, wie die beiden Gleichungen (1) und (2). Gesetzt nun, der Coeffizient von y wäre in beiden Gleichungen der nämliche, also $b=b'$, so würde man durch blosse Subtraktion der beiden Gleichungen eine neue Gleichung mit der Unbekannten x allein erhalten, und da diese eine der ursprünglichen Gleichungen ersetzen kann, so könnten wir daraus den Werth von x finden. Wäre dagegen der Coeffizient von x in beiden Gleichungen der nämliche, also $a=a'$, so würde man durch Subtraktion sofort eine Gleichung mit der Unbekannten y allein erhalten, aus welcher also y gefunden werden könnte. Nun haben die beiden Gleichungen allerdings weder den Coeffizienten von x, noch den von y gleich; allein wir können sie leicht so transformiren, dass eine der beiden Unbekannten in beiden Gleichungen den nämlichen Coeffizienten erhält. Wir dürften z. B. nur die 1ste Gleichung mit dem Coeffizienten b' von y in den 2ten, die 2te aber mit dem Coeffizienten b von y aus der 1sten multipliziren, wodurch wir erhalten:

$$ab'x+bb'y=b'c$$
$$a'bx+bb'y=bc'.$$

Indem wir hier die 2te von der 1sten subtrahiren, bekommen wir: $(ab'-a'b)x=b'c-bc'$,

woraus: $x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}$.

Ebenso könnten wir das y berechnen, indem wir behufs der Elimination von x die 1ste Gleichung mit a' und die 2te mit a multipliziren und dann das letzte Resultat vom 1sten subtrahiren. Wir erhalten so: $a'ax+a'by=a'c$ und

$$a'ax+ab'y=ac',$$

woraus durch Subtraktion sich ergibt:

$$(a'b-ab')y=a'c-ac' \text{ und}$$

$$y=\frac{a'c-ac'}{a'b-ab'}=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}.$$

Dieses Verfahren heisst Eliminationsmethode und besteht darin, dass wir die 1ste Gleichung mit dem Coeffizienten einer Unbekannten in der 2ten Gleichung, die 2te aber mit dem Coeffizienten der nämlichen Unbekannten aus der 1sten Gleichung multipliziren und dann die so transformirten Gleichungen von einander subtrahiren oder zu einander addiren, je nachdem die Glieder mit der wegzuschaffenden Unbekannten gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

102. Methode von Bezout. Wir können die 1ste Gleichung mit einer noch unbestimmt gelassenen Grösse p multipliziren und das Resultat dann mit der 2ten Gleichung durch Addition oder Subtraktion verbinden.

Aus den Gleichungen (1) $ax+by=c$ und

(2) $a'x+b'y=c'$

erhalten wir so (3) $(ap+a')x+(bp+b')y=cp+c'$, welche Gleichung an die Stelle einer der beiden Gleichungen (1) und (2) treten kann. Hier sind aber die Coeffizienten von x und y Funktionen der noch unbestimmt gelassenen Grösse p, der wir ganz beliebige Werthe geben können, die wir also auch so wählen können, dass der Coeffizient einer der beiden Unbekannten zu Null wird, wodurch diese Unbekannte aus der Gleichung verschwindet. Wollten wir also z. B. das y eliminiren, so dürfte nur der Coeffizient von x, nämlich $bp+b'=0$ oder $p=-\frac{b'}{b}$ gesetzt werden, wodurch man erhielte:

$$\left(a \cdot \frac{-b'}{b} + a'\right)x = c \cdot \frac{-b'}{b} + c', \text{ oder, mit } b \text{ multiplizirt,}$$

$$(-ab' + a'b)x = -b'c + bc', \text{ woraus}$$

$$x = \frac{bc' - b'c}{a'b - ab'} = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}.$$

Wollte man aber das y berechnen, so dürfte man nur $ap + a' = 0$ oder $p = \frac{-a'}{a}$ setzen, wodurch der Coeffizient von $x = 0$ würde und die Gleichung überginge in:

$$\left(b \cdot \frac{-a'}{a} + b'\right)y = c \cdot \frac{-a'}{a} + c', \text{ oder, mit } a \text{ multiplizirt,}$$

$$(-a'b + ab')y = -a'c + ac', \text{ woraus}$$

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Dieses zuerst von Bezout angewandte Verfahren wird auch die Methode der unbestimmten Coeffizienten genannt.

103. Wenn wir diese 4 Auflösungsmethoden zusammenhalten, so sehen wir sogleich, dass sie alle darauf hinzielen, eine der beiden Unbekannten wegzuschaffen oder zu eliminiren, dass sie somit sämmtlich Eliminationsmethoden sind. Allein während in dem 1sten Verfahren die Elimination durch Substitution, im 2ten durch Comparation ausgeführt wird, geschieht sie beim 3ten Verfahren durch Addition oder Subtraktion der beiden gegebenen oder ihrer durch Multiplikation transformirten Gleichungen, und beim 4ten wieder durch Addition oder Subtraktion unter Benutzung eines unbestimmten Coeffizienten. In allen Fällen sucht man aus den beiden gegebenen Gleichungen eine neue abzuleiten, die nur noch eine Unbekannte enthält und so das ursprüngliche System durch ein neues zu ersetzen, das eine der beiden ursprünglichen und die aus beiden abgeleitete neue Gleichung mit nur **einer** Unbekannten enthält.

104. Wir haben aus den beiden Gleichungen $ax + by = c$ und $a'x + b'y = c'$ die Werthe gezogen

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} \text{ und } y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b},$$

oder, indem wir die mit Accents versehenen Buchstaben zuletzt setzen:

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \text{ und } y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Diese beiden Werthe von x und y haben also denselben Nenner $ab' - ba'$, den man bekommen kann, wenn man die Buch-

staben a und b permutirt, dem letzten Buchstaben dann einen Accent gibt und zwischen die beiden Resultate das Zeichen — setzt. Aus dem Nenner von x erhalten wir aber den Zähler $cb' - bc'$, indem wir statt der Coeffizienten a und a' der zu bestimmenden Unbekannten die ganz bekannten Glieder c und c' setzen, und ebenso wird der Zähler von y, nämlich $ac' - ca$, aus dem Nenner $ab' - ba'$ abgeleitet, indem man den Buchstaben b, welcher als Coeffizient der zu suchenden Unbekannten erscheint, durch den Buchstaben c ersetzt, der das ganz bekannte Glied vorstellt.

Ein Polynom heisst symmetrisch in Bezug auf 2 oder mehrere Buchstaben, wenn man diese Buchstaben mit einander vertauschen kann, ohne den Werth desselben zu verändern.

So ist $a^2 + 2ab + b^2$ symmetrisch in Bezug auf a und b; denn durch Vertauschung dieser Buchstaben verwandelt sich dasselbe in $b^2 + 2ba + a^2$, was mit dem ersten ganz identisch ist. Ebenso ist $ax + by$ symmetrisch in Bezug auf a und b, x und y, d. h. es ändert nicht, wenn wir die a in b und die x in y und umgekehrt verwandeln; denn man erhält dann statt desselben $by + ax$, was offenbar $= ax + by$.

Da nun die Gleichungen (1) und (2) in Bezug auf a und b, x und y symmetrisch gebaut sind, so können wir offenbar auch aus dem Werth von x den von y ableiten, indem wir einfach die a in b und umgekehrt verwandeln. Wir hatten $x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$, und wenn wir hier a in b, x in y und umgekehrt verwandeln, so erhalten wir

$$y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'} = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

was wirklich der obige Werth von y war.

105. Wenn wir zwei numerische Gleichungen $3x - 7y = 4$ und $2x + 5y = 22$ zu lösen haben, so können wir die obigen allgemeinen Formeln benutzen; wir dürfen nur $a = 3$, $b = -7$, $c = 4$, $a' = 2$, $b' = 5$ und $c' = 22$ setzen; dann erhalten wir:

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} = \frac{4 \cdot 5 - (-7) \cdot 22}{3 \cdot 5 - (-7) \cdot 2} = \frac{20 + 154}{15 + 14} = \frac{174}{29} = 6$$

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} = \frac{3 \cdot 22 - 4 \cdot 2}{3 \cdot 5 - (-7) \cdot 2} = \frac{66 - 8}{15 + 14} = \frac{58}{29} = 2,$$

Statt indessen bei einer numerischen Gleichung die Werthe von x und y mittelst dieser allgemeinen Formeln zu bestimmen, thut man weit besser, die Gleichungen direkte nach einer der be-

schriebenen Methoden aufzulösen, und wir wollen hier noch die Anwendung der 4 verschiedenen Methoden auf numerische Gleichungen zeigen.

106. Es seien
$$2x - 5y = 17 \quad (1)$$
$$3x - 11y = 22 \quad (2)$$
die beiden gegebenen Gleichungen, so hat man aus Gleichung (1):
$$2x = 17 + 5y$$
$$x = \frac{17 + 5y}{2}.$$

Wenn wir diesen Werth in die 2te Gleichung setzen, so kommt:
$$3 . \left(\frac{17 + 5y}{2}\right) - 11y = 22$$
$$3(17 + 5y) - 2 . 11y = 2 . 22$$
$$51 + 15y - 22y = 44$$
$$- 7y = 44 - 51 = -7$$
$$y — \frac{-7}{-7} = +1.$$

Setzen wir diesen Werth $y = 1$ in eine der beiden Gleichungen, etwa in die 2te, so kommt:
$$3x - 11 . 1 = 22$$
$$3x = 22 + 11 = 33$$
$$x = \tfrac{33}{3} = 11.$$

Also bilden $x = 11$ und $y = 1$ die Auflösung dieser beiden Gleichungen.

Von der Richtigkeit dieser Lösung können wir uns übrigens überzeugen, wenn wir die gefundenen Werthe in die Gleichungen einführen; es gehen dieselben dann über in:
$$\left.\begin{array}{r} 2 . 11 - 5 . 1 = 17 \\ 3 . 11 - 11 . 1 = 22 \end{array}\right\} \text{ oder } \left.\begin{array}{r} 22 - 5 = 17 \\ 33 - 11 = 22 \end{array}\right\} \text{ oder } \begin{array}{r} 17 = 17 \\ 22 = 22. \end{array}$$

107. Wollten wir dieselbe Aufgabe nach der Comparations-Methode lösen, so hätten wir:
$$(1) \quad 2x - 5y = 17$$
$$(2) \quad 3x - 11y = 22.$$

Aus Gleichung (1) folgt nun: $x = \dfrac{17 + 5y}{2}$

Aus Gleichung (2) . . . . . : $x = \dfrac{22 + 11y}{3}$,

und da diese beiden Werthe von x einander gleich sein müssen, so hat man:

$$\frac{17+5y}{2} = \frac{22+11y}{3} \text{ oder}$$

$$3(17+5y) = 2(22+11y)$$

$$51+15y = 44+22y$$

$$-7y = -7$$

$$7y = 7$$

$$y = \tfrac{7}{7} = 1.$$

108. Hätten wir ferner die Gleichungen

$$(1) \quad 12x - 5y = 33$$

$$(2) \quad 7x - 3y = 19,$$

so würden wir, um nach der 3ten Methode zuerst x zu berechnen, das y eliminiren und zu diesem Ende hin die 1ste Gleichung mit 3, die 2te mit 5 multipliziren. Wir bekämen so die Gleichungen:

$$36x - 15y = 99 \text{ und}$$

$$35x - 15y = 95.$$

Indem wir dann hier die letzte von der erstern abziehen, finden wir unmittelbar $x = 4$.

Um aber y zu finden, müssten wir entweder x eliminiren und dann zu diesem Zwecke die erste Gleichung mit 7, die 2te mit 12 multipliziren und dann die beiden Resultate von einander subtrahiren, oder wir könnten den für x gefundenen Werth in eine der beiden Gleichungen (1) und (2) setzen. Wenn wir diesen Werth in die 2te Gleichung brächten, so bekämen wir:

$$7 . 4 - 3y = 19$$

$$28 - 3y = 19$$

$$-3y = 19 - 28 = -9$$

$$3y = 9$$

$$y = \tfrac{9}{3} = 3.$$

109. Hätten wir endlich die Gleichungen

$$(1) \quad 3x - 4y = 10$$

$$(2) \quad 2x + 5y = 22$$

aufzulösen, so könnten wir die 1ste mit einem noch unbestimmten Coeffizienten p multipliziren und zum Resultat die 2te addiren, dann bekämen wir

$$(3) \quad (3p+2)x + (-4p+5)y = 10p+22.$$

Um nun hieraus x zu berechnen, setzen wir

$$-4p + 5 = 0 \text{ oder}$$

$$4p = 5$$

$$p = \tfrac{5}{4};$$

dann verwandelt sich die Gleichung (3) in:

$$(3 \cdot \tfrac{5}{4}+2)x=10 \cdot \tfrac{5}{4}+22, \text{ oder}$$
$$(15+8)x=50+88$$
$$23x=138, \text{ woraus}$$
$$x=\tfrac{138}{23}=6.$$

Wollte man hingegen y berechnen, so würde man p so wählen, dass der Coeffizient $x=0$, d. h. dass

$$3p+2=0, \text{ oder:}$$
$$p=-\tfrac{2}{3}$$

wäre. Dann ginge die Gleichung (3) über in:

$$(-4 \cdot -\tfrac{2}{3}+5)y=10 \cdot -\tfrac{2}{3}+22$$
$$(8+15)y=-20+66$$
$$23y=+46$$
$$y=\tfrac{46}{23}=2.$$

Also ist $x=6$ und $y=2$ die Lösung dieser 2 Gleichungen.

Auflösung dreier und mehrerer allgemeinen Gleichungen des 1sten Grades mit eben so vielen Unbekannten.

110. Um 3 Gleichungen des 1sten Grades mit 3 Unbekannten aufzulösen, können wir eine der 4 Methoden anwenden und so zwischen der 1sten und 2ten, und ebenso zwischen der 1sten und 3ten die nämliche Unbekannte wegschaffen, wodurch wir auf 2 Gleichungen mit nur 2 Unbekannten kommen, aus welchen wieder eine der Unbekannten eliminirt werden kann. Es seien z. B. die Gleichungen gegeben:

$$ax+by+cz=d$$
$$a'x+b'y+c'z=d'$$
$$a''x+b''y+c''z=d''$$

so könnte man zwischen der 1sten und 2ten, ebenso zwischen der 1sten und 3ten die Unbekannte z eliminiren, wodurch man 2 Gleichungen mit den Unbekannten x und y erhielte. Indem man dann zwischen diesen beiden noch y eliminirte, käme man auf eine Gleichung, die bloss noch x enthielte und aus welcher daher x gefunden werden könnte. Wenn wir alsdann den Werth für x in eine der beiden Gleichungen des unmittelbar vorhergehenden Systems (2 Gleichungen mit 2 Unbekannten) setzten, würden wir die 2te Unbekannte y finden, und indem wir die Werthe für x und y in eine der ursprünglichen Gleichungen setzen, erhalten wir auch die 3te Unbekannte z.

Statt dessen können wir nun auch mittelst der Methode der unbestimmten Coeffizienten eine neue Gleichung ableiten, aus der man jede der 3 Unbekannten bestimmen kann. Wenn wir nämlich die 1ste Gleichung mit dem noch unbestimmten Coeffizienten m, die 2te mit n multipliziren, erhalten wir statt der 3 ersten Gleichungen die 3 folgenden:

$$(1)\quad max+mby+mcz=md$$
$$(2)\quad na'x+nb'y+nc'z=nd'$$
$$(3)\quad a''x+b''y+c''z=d''$$

und wenn wir hier (1) und (2) addiren und von der Summe die 3te subtrahiren, so erhalten wir:

$$(4)\quad (ma+na'-a'')x+(mb+nb'-b'')y+(mc+nc'-c'')z= md+nd'-d''.$$

Hier sind nun die Coeffizienten der 3 Unbekannten sämmtlich Funktionen der beiden unbestimmt gelassenen Grössen m und n, über die wir nach Belieben verfügen können. Wenn wir daher diese unbestimmten Coeffizienten so wählen, dass gleichzeitig die Coeffizienten zweier Unbekannten zu Null werden, so erhalten wir dann eine Gleichung, welche nur noch die 3te Unbekannte enthält. Wollen wir also hieraus x berechnen, so müssen m und n so gewählt werden, dass

1) $mb+nb'-b''=0$ und
2) $mc+nc'-c''=0$ oder
(1) $mb+nb'=b''$
und (2) $mc+nc'=c''$ wird.

Das sind aber 2 Gleichungen mit den beiden Unbekannten m und n. Um sie aufzulösen, haben wir:

Aus (1) folgt: $m=\dfrac{b''-nb'}{b}$; und diess in (2) gesetzt, gibt:

$$\left(\frac{b''-nb'}{b}\right)c+nc'=c''$$
$$(b''-nb')c+bc'n=bc''$$
$$b''c-cb'n+bc'n=bc''$$
$$(bc'-cb')n=bc''-cb''$$
$$n=\frac{bc''-cb''}{bc'-cb'}.$$

Ebenso findet man $m=\dfrac{c'b''-b'c''}{bc'-cb'}$.

Da nun, wenn $mb+nb'-b''=0$ und $mc+nc'-c''=0$, aus

Gleichung (4) folgt: $x = \frac{md+nd'-d''}{ma+na'-a''}$, so darf man nur in diesen Werth von x die oben für m und n gefundenen Werthe setzen, wodurch man erhält:

$$x = \frac{\left(\frac{c'b''-b'c''}{bc'-cb'}\right)d + \left(\frac{bc''-cb''}{bc'-cb'}\right)d' - d''}{\left(\frac{c'b''-b'c''}{bc'-cb'}\right)a + \left(\frac{bc''-cb''}{bc'-cb'}\right)a' - a''}$$

oder, Zähler und Nenner mit $bc'-cb'$ multiplizirt,

$$x = \frac{(c'b''-b'c'')d+(bc''-cb'')d'-(bc'-cb')d''}{(c'b''-b'c'')a+(bc''-cb'')a'-(bc'-cb')a''}.$$

Wollten wir y bestimmen, so wären die Coeffizienten m und n so zu wählen, dass

$$ma+na'-a''=0 \text{ und}$$
$$mc+nc'-c''=0, \text{ oder dass}$$
$$m = \frac{c'a''-a'c''}{ac'-ca'} \text{ und } n = \frac{ac''-ca''}{ac'-ca'},$$

woraus man dann für y fände:

$$y = \frac{(c'a''-a'c'')d+(ac''-ca'')d'-(ac'-ca')d''}{(c'a''-a'c'')b+(ac''-ca'')b'-(ac'-ca')b''}$$

Wenn man endlich m und n so wählen würde, dass

$$ma+na'-a''=0 \text{ und}$$
$$mb+nb'-b''=0, \text{ oder dass}$$
$$m = \frac{b'a''-a'b''}{ab'-ba'} \text{ und } n = \frac{ab''-ba''}{ab'-ba'},$$

so fände man für z:

$$z = \frac{(b'a''-a'b'')d+(ab''-ba'')d'-(ab'-ba')d''}{(b'a''-a'b'')c+(ab''-ba'')c'-(ab'-ba')c''}.$$

Wenn wir hier die angedeuteten Multiplikationen ausführen und hiebei zuerst die Produkte mit a, dann die mit a', endlich die mit a'' setzen und in den Werthen für x und z Zähler und Nenner — 1 multipliziren, so erhalten wir:

$$1)\ x = \frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}$$

$$2)\ y = \frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}$$

$$3)\ z = \frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}$$

111. Diese Werthe von x, y und z haben einmal denselben Nenner: $ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''$, den man auf folgende Weise bilden könnte:

Man nimmt die beiden Versetzungen ab und ba der Coeffizienten von x und y und bringt bei jeder derselben den Coeffizienten c der 3ten Unbekannten successive an die 3te, 2te und 1ste Stelle, wodurch man aus ab die 3 Verbindungen: abc, acb und cab und aus ba die 3 Verbindungen: bac, bca und cba erhält. Nun gibt man diesen 6 Verbindungen abwechselnd die Vorzeichen $+$ und $-$, dann hat man

$$abc-acb+cab-bac+bca-cba;$$

und indem man endlich in jeder dieser 6 Verbindungen dem 2ten Buchstaben einen, dem 3ten zwei Accents gibt, erhält man den Nenner $\quad ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''$ für alle 3 Werthe. Um aber aus diesem Nenner die zugehörigen Zähler abzuleiten, darf man nur den Coeffizienten der zu suchenden Unbekannten durch das ganz bekannte Glied ersetzen, ohne an den Accents etwas zu ändern. So, um den Zähler von x zu erhalten, darf man nur die a, a' und a'' im Nenner in d, d' und d'' umwandeln; um den Zähler von y zu erhalten, die b, b' und b'', und um den Zähler von z zu erhalten, die c, c' und c'' durch d, d' und d'' ersetzen.

112. Hat man allgemein m Gleichungen mit m unbekannten Grössen aufzulösen, so eliminirt man etwa die letzte dieser Unbekannten zwischen der 1sten und jeder der $m-1$ übrigen Gleichungen, wodurch man $m-1$ neue Gleichungen mit bloss $m-1$ Unbekannten erhält, indem ja die letzte Unbekannte in keiner dieser Gleichungen mehr vorkommt. Alsdann eliminirt man zwischen der 1sten dieser neu erhaltenen und jeder der $m-2$ übrigen Gleichungen eine 2te Unbekannte, so erhält man ein neues System von $m-2$ Gleichungen mit $m-2$ Unbekannten. Die erste dieser $m-2$ Gleichungen verbindet man auf gleiche Weise mit jeder der $m-3$ übrigen Gleichungen, dann bekommt man ein neues System von $m-3$ Gleichungen mit $m-3$ Unbekannten; und indem man dieses Verfahren fortsetzt, kommt man endlich zu 2 Gleichungen mit zwei uud von diesen zu einer Gleichung mit nur einer Unbekannten. Aus der letzten Gleichung kann der Werth dieser Unbekannten gefunden werden, und wenn man dann denselben in eine der 2 Gleichungen des unmittelbar vorhergehenden Systems (2 Gleichungen mit 2 Unbekannten) setzt, erhält man den

Werth der 2ten Unbekannten. Indem man dann diese beiden gefundenen Werthe in eine der Gleichungen des vorangehenden Systems (3 Gleichungen mit 3 Unbekannten) setzt, findet man die 3te Unbekannte, und kann so rückwärts gehend die Werthe sämmtlicher m Unbekannten ausmitteln.

Beispiele

113. Es seien die Gleichungen gegeben:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 5x-2y+3z=35 \\ (2) & 8x+7y-5z=67 \\ (3) & 9x-3y+2z=58 \end{array}\right\} \text{System I.}$$

so können wir durch irgend eine der genannten Methoden die 3te Unbekannte z zwischen der 1sten und jeder der beiden andern Gleichungen eliminiren. Wenn wir z. B. die Eliminationsmethode anwenden, so erhalten wir die 2 Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} (4) & 49x+11y=376 \\ (5) & 17x-5y=104 \end{array}\right\} \text{System II.}$$

welche nach Nro. 96 ganz die nämlichen Werthe von x und y zulassen, wie die ursprünglichen Gleichungen; und wenn wir auf gleiche Weise das y eliminiren, so erhalten wir als 3tes System die Gleichung:

$$(6) \quad 432x=3024 \quad \text{System III.}$$

woraus $x=\frac{3024}{432}=7$.

So können wir also statt des ursprünglichen Systems dreier Gleichungen mit 3 Unbekannten nehmen:

1) Eine der 3 Gleichungen des 1sten Systems.

2) Eine Gleichung des 2ten Systems mit den beiden Unbekannten x und y.

3) Die Gleichung (6) mit der einzigen Unbekannten x.

Aus Gleichung (6) folgt $x=7$. Wenn wir nun diesen Werth in eine der Gleichungen des 2ten Systems setzen, so finden wir $y=3$; und setzen wir endlich die Werthe $x=7$ und $y=3$ in eine der Gleichungen des Systems (I), so finden wir die 3te Unbekannte $z=2$.

Verifikation. Wollten wir uns noch speziell von der Richtigkeit der Lösung überzeugen, so dürften wir nur die gefundenen Werthe an die Stelle von x, y und z in die ursprünglichen Gleichungen setzen. Wir würden so erhalten:

1) $5.7-2.3+3.2=35$,

2) $8.7+7.3-5.2=67$,

3) $9.7-3.3+2.2=58$, oder

1) $35-6+6=35$ oder $35=35$
2) $56+21-10=67$ oder $67=67$
3) $63-9+4=58$ oder $58=58$.

114. Hätten wir die 4 Gleichungen:

$$\begin{aligned}(1)\quad x+y+z+u&=1\\(2)\quad 16x+8y+4z+2u&=9\\(3)\quad 81x+27y+9z+3u&=36\\(4)\quad 256x+64y+16z+4u&=100,\end{aligned}$$

so haben sämmtliche Glieder der 3ten Gleichung den Faktor 3, sämmtliche Glieder der 4ten Gleichung aber den Faktor 4 gemeinschaftlich, und indem wir daher die 3te Gleichung durch 3, die 4te durch 4 dividiren, erhalten wir die einfachern Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}(1)\quad x+y+z+u&=1\\(2)\quad 16x+8y+4z+2u&=9\\(3)\quad 27x+9y+3z+u&=12\\(4)\quad 64x+16y+4z+u&=25\end{aligned}\right\}\text{ I.}$$

Wir eliminiren nun die 4te Unbekannte u zwischen der 1sten Gleichung und jeder der übrigen, so erhalten wir die 3 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}(5)\quad 14x+6y+2z&=7\\(6)\quad 26x+8y+2z&=11\\(7)\quad 21x+5y+z&=8\end{aligned}\right\}\text{ II.}$$

Indem wir hier zwischen der Gleichung (5) und den Gleichungen (6) und (7) das z eliminiren, erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}(8)\quad 12x+2y&=4\\(9)\quad 28x+4y&=9\end{aligned}\right\}\text{ III.}$$

und wenn wir abermals y zwischen diesen beiden Gleichungen eliminiren, so erhalten wir endlich:

$$(10)\quad 4x=1\quad\text{IV.}$$

Wir können daher statt des 1sten Systems uns etwa folgender vier Gleichungen bedienen:

1) $x+y+z+u=1$
2) $14x+6y+2z=7$
3) $12x+2y=4$
4) $4x=1$

Aus $4x=1$ ergibt sich: $x=\frac{1}{4}$.

Setzen wir den Werth $x=\frac{1}{4}$ in die Gleichung

$12x+2y=4$, so kommt:

$$3+2y=4$$
$$2y=1$$
$$y=\tfrac{1}{2}.$$

Die Werthe $x=\frac{1}{4}$ und $y=\frac{1}{2}$ in die Gleichung

$$14x+6y+2z=7 \text{ gesetzt, verwandeln dieselbe in}$$

$$\frac{14}{4}+\frac{6}{2}+2z=7, \text{ oder}$$

$$3\tfrac{1}{2}+3+2z=7$$

$$2z=\tfrac{1}{2}$$

$$z=\tfrac{1}{4}.$$

Wenn wir endlich $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{2}$ und $z=\frac{1}{4}$ in die Gleichung

$$x+y+z+u=1 \text{ setzen, so kommt:}$$

$$\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+u=1 \text{ oder}$$

$$u=1-\tfrac{4}{4}=0.$$

Also ist $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{4}$ und $u=0$ die Lösung dieser 4 Gleichungen.

115. Wenn endlich nicht alle Unbekannten in jeder der gegebenen Gleichungen vorkommen, so ist die Auflösung nur um so leichter, indem man weniger Eliminationen vorzunehmen braucht.

Gesetzt z. B. man hätte die 3 Gleichungen:

$$1)\quad 3x+2y=34$$

$$2)\quad 6x-4z=36$$

$$3)\quad 9y+6z=63,$$

so können wir, indem wir die 2te Gleichung durch 2, die 3te durch 3 dividiren, statt derselben die einfachern Gleichungen benutzen:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & 3x+2y=34 \\ 2) & 3x-2z=18 \\ 3) & 3y+2z=21 \end{array}\right\} (\text{I.})$$

Nun würden wir, um auf 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten zu gelangen, im Allgemeinen die 3te Unbekannte z zwischen der 1sten und jeder der folgenden eliminiren. Allein die 1ste Gleichung enthält schon kein z; daher bildet sie schon eine Gleichung des 2ten Systems, und wir dürfen nur noch zwischen (2) und (3) das z eliminiren, um eine zweite Gleichung mit x und y zu erhalten. Wenn wir zu diesem Zwecke die Gleichungen (2) und (3) addiren, so erhalten wir sofort:

$$3x+3y=39 \text{ oder}$$

$$x+y=13$$

Die beiden Gleichungen des 2ten Systems wären demnach:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y=34 \\ x+y=13 \end{array}\right\} \text{II.}$$

Indem wir die letzte mit 2 multipliziren und das Resultat von der 1sten abziehen, erhalten wir als Endgleichung $x=34-26=8$.

Wir können daher statt der 3 ursprünglichen Gleichungen folgende 3 nehmen:

$$\alpha)\quad 3y+2z=21$$
$$\beta)\quad x+y=13$$
$$\gamma)\quad x=8.$$

In Gleichung (γ) haben wir unmittelbar den Werth von x; indem wir denselben in die Gleichung (β) setzen, kommt:

$$8+y=13 \text{ oder}$$
$$y=13-8=5.$$

Und wenn wir den Werth $y=5$ in die Gleichung (α) setzen, bekommen wir endlich:

$$3 \,.\, 5+2z=21$$
$$2z=21-15$$
$$2z=6$$
$$z=3.$$

Also $x=7$, $y=5$ und $z=3$ wäre die Anflösung des Systems (I).

Anwendung der Gleichungen des 1sten Grades auf die Auflösung von Aufgaben.

116. Wenn in einer Aufgabe alle Bedingungen genau angegeben sind, welche die Unbekannten erfüllen sollen, so ist es im Allgemeinen immer sehr leicht, zu prüfen, ob beliebig gewählte Zahlenwerthe jenen Bedingungen der Aufgabe genügen oder nicht. Bezeichnet man dann mit x, y, z etc. die unbekannten Grössen und nimmt mit denselben ganz die nämlichen Operationen vor, wie wenn man die Richtigkeit der Lösung prüfen wollte, so wird man stets zu Gleichungen kommen, welche die in der Aufgabe enthaltenen Bedingungen ausdrücken und aus welchen dann die Werthe der Unbekannten abgeleitet werden können. Die Aufstellung dieser Gleichungen ist mehr logischer Natur und bildet meist den schwierigern Theil in der Lösung eines Problems, während die Auflösung der erhaltenen Gleichungen in der Regel sehr einfach ist und jedenfalls nach den früher aufgestellten Regeln stets vollzogen werden kann.

Wir wollen hier die Lösung solcher angewandten Probleme an einer Anzahl spezieller Beispiele zeigen und dabei das Hauptgewicht auf die Erklärung des Ansatzes d. h. auf die Herleitung der zur Lösung erforderlichen Gleichungen legen.

1. Aufgabe. Ein Goldarbeiter will aus 15 löthigem und 8 löthigem Silber eine Mischung von 40 Mark machen, welche im

Gehalte 12 löthig werden soll. Wie viel Mark muss er von jeder Sorte nehmen?

Auflösung: Wir wollen mit x die Anzahl Marke 15 löthiges Silber bezeichnen, das er zur Mischung braucht, so muss er den Rest $40-x$ Marke vom 8 löthigen Silber nehmen. Allein beim 15 löthigen Silber enthält die Mark 15, beim 8 löthigen aber 8 Lothe reines Silber. Die x Marke 15 löthiges Silber werden also $15x$, die $40-x$ Marke 8 löthiges Silber aber $(40-x) . 8$ Lothe reines Silber enthalten. Die aus x Marken 15 löthigem und $(40-x)$ Marken 8 löthigem Silber zusammengesetzte Mischung wird also $15x+(40-x) . 8$ Lothe reines Silber enthalten. Sie soll aber aus 40 Mark 12 löthigem Silber bestehen; daher wird der Silbergehalt der Mischung auch $= 40 . 12$ Lothe sein und wir haben somit die Gleichung:

$$15x+(40-x)8 = 40 . 12$$
$$15x+320-8x = 480.$$
$$7x = 160$$
$$x = \tfrac{160}{7} = 22\tfrac{6}{7}.$$

Daher $40-x = 17\tfrac{1}{7}$.

Er muss also $22\tfrac{6}{7}$ Mark vom 15löthigen und $17\tfrac{1}{7}$ Mark vom 8löthigen Silber nehmen.

Verifikation. Die Mischung setzt sich zusammen aus $22\tfrac{6}{7}$ Mark 15löthigem und $17\tfrac{1}{7}$ Mark 8löthigem Silber. Der erste dieser Bestandtheile enthält $22\tfrac{6}{7} . 15 = 342\tfrac{6}{7}$ Lothe, der 2te $17\tfrac{1}{7} . 8 = 137\tfrac{1}{7}$ Lothe reines Silber. Beide zusammen enthalten also $342\tfrac{6}{7}+137\tfrac{1}{7} = 480$ Lothe reines Silber, was gerade den verlangten Silbergehalt von $40 . 12 = 480$ Lothen ausmacht.

2. Aufgabe: Ein Wirth hat zweierlei Weine, à 73 frcs und à 60 frcs den Saum. Nun möchte er daraus eine Mischung machen, welche er zu 65 frcs pr. Saum verkaufen könnte. In welcher Weise ist die Mischung vorzunehmen und wie viel braucht er von jeder Sorte zu einer Mischung von 15 Saum?

1ste Auflösung (durch Raisonnement).

	1ste Sorte 72	7	5
Mischung 65.			
	2te „ 60	5	7

12 „ 15 S.

1 „ $\tfrac{15}{12} = \tfrac{5}{4}$ Saum.

Von der 1sten Sorte $5 . \tfrac{5}{4} = 6\tfrac{1}{4}$ Saum!

„ „ 2ten „ $7 . \tfrac{5}{4} = 8\tfrac{3}{4}$ „

Die Mischung ist so vorzunehmen, dass er weder in Vortheil, noch in Schaden kommt. So oft er von der 1sten Sorte à 72 frcs einen Saum zur Mischung nimmt, so verliert er, da die Mischung zu 65 frcs pr. Saum verkauft werden soll, gerade 7 frcs; nimmt er aber einen Saum von der 2ten Sorte à 60 frcs zur Mischung, so gewinnt er 5 frcs. Nun ist klar, dass wenn er an 1 Saum der ersten Sorte gerade so viel verlöre, als er an 1 Saum der 2ten Sorte gewänne, er alsdann von beiden Sorten gleich viel zur Mischung nehmen müsste, weil alsdann der Gewinn an der einen Sorte gerade aufgehoben würde durch den Verlust an der andern. Das ist aber hier nicht der Fall; er verliert an einem Saum der 1sten Sorte mehr, als er an einem Saum der 2ten Sorte gewinnt; daher darf er auch nicht von beiden Sorten gleich viel nehmen, sondern es müssen sich die Quantitäten, die er von den beiden Sorten zu nehmen hat, zu einander verhalten, wie umgekehrt ihre Unterschiede vom Mittelpreise. Der Unterschied der 1sten Sorte vom Mittelpreise verhält sich zum Unterschied der 2ten Sorte vom Mittelpreise wie 7 : 5; umgekehrt muss sich die Quantität, die er von der 1sten Soste zu nehmen hat, zur Quantität, die er von der 2ten Sorte braucht, verhalten, wie 5 : 7. In der That, wenn er zu je 5 Saum der 1sten Sorte gleichzeitig 7 Saum von der 2ten Sorte nimmt, so verliert er an jenen $5 . 7 = 35$ frcs, gewinnt aber an diesen $7 . 5 = 35$ frcs. Es wird also bei diesem Mischungsverhältniss der Verlust an der 1sten Sorte aufgehoben durch den Gewinn an der 2ten. Um nun noch zu wissen, wie viel er von jeder Sorte nehmen muss zu einer Mischung von 15 Saum, hat man nur die ganze Mischung von 15 Saum in 2 Theile zu theilen, die sich wie 5 : 7 verhalten. Theilen wir also 15 Saum in $5+7 = 12$ gleiche Theile, so beträgt 1 Theil $\frac{5}{4}$ Saum. Von der ersten Sorte muss er nun 5, von der 2ten 7 solcher Theile nehmen, also von der 1sten $5 . \frac{5}{4} = 6\frac{1}{4}$ und von der 2ten $7 . \frac{5}{4} = 8\frac{3}{4}$ Saum. Wirklich verliert er an den $6\frac{1}{4}$ Saum der ersten Sorte genau soviel, als er an den $8\frac{3}{4}$ Saum der 2ten Sorte gewinnt; denn

$$6\tfrac{1}{4} . 7 = 43\tfrac{3}{4} \text{ und}$$
$$8\tfrac{3}{4} . 5 = 43\tfrac{3}{4}.$$

2te Auflösung (mittelst Gleichungen).

Die Mischung ist in der Weise vorzunehmen, dass wenn er die 15 Saum à 65 frcs verkauft, er genau so viel erhält, als wenn er die von jeder Sorte genommenen Bestandtheile einzeln zu ihren

Preisen verkaufen würde. Bezeichnen wir mit x die Anzahl Saum, die er von der ersten Sorte nimmt, so wird er $15—x$ Saum von der 2ten Sorte brauchen. Allein 1 Saum der 1sten Sorte kostet 72 frcs; die x Saum der 1sten Sorte werden daher $x \cdot 72 = 72x$ frcs kosten. Ein Saum der 2ten Sorte kostet 60 frcs, die $(15—x)$ Saum der 2ten Sorte werden daher $(15—x) \cdot 60$ frcs kosten. Die Summe der beiden Bestandtheile ist somit $= 72x+(15—x)60$ Frkn. Der Preis der ganzen Mischung von 15 Saum à 65 frcs ist aber $= 65 \cdot 15$ frcs. Da nun der Preis der Mischung gleich sein soll der Summe der Preise der einzelnen Bestandtheile, so hat man die Gleichung:

$$72x+(15—x)60 = 15 \cdot 65$$
$$72x+15 \cdot 60—60x = 15 \cdot 65$$
$$12x = 15 \cdot 65—15 \cdot 60 = 15 \cdot (65—60) = 15 \cdot 5$$
$$\text{oder } 12x = 75$$
$$x = \tfrac{75}{12} = 6\tfrac{3}{12} = 6\tfrac{1}{4}.$$

Somit $15—x = 15—6\tfrac{1}{4} = 8\tfrac{3}{4}$, wie oben.

3. Aufgabe: Aus 2 ungleich grossen Röhren eines Behälters strömt Wasser mit verschiedener Geschwindigkeit heraus. Wenn sich nun die Oeffnungen wie $5 : 13$, die Geschwindigkeiten der Wasserströme wie $8 : 7$ verhalten und die eine Oeffnung in einem gewissen Zeitraume 561 Cubikfusse Wasser mehr, als die andere, gibt: wie viel Wasser ist dann während dieser Zeit aus jeder Röhre herausgeflossen?

Auflösung: Bezeichnen wir mit m die in einer bestimmten Zeit aus der Röhre A, mit M die in derselben Zeit aus der Röhre B fliessende Wassermenge, so haben wir zunächst das Verhältniss zwischen den Wassermengen m und M zu bestimmen. Offenbar hängt die aus jeder Röhre fliessende Wassermenge ab: 1. von der Grösse der Oeffnung (dem Querschnitt), 2. von der Geschwindigkeit des Wasserstromes und zwar in der Art, dass bei gleichen Oeffnungen die herausfliessenden Wassermengen den Geschwindigkeiten der Wasserströme, bei gleichen Geschwindigkeiten der letztern aber den Querschnitten der Röhren proportional sind. Nun haben aber die Röhren A und B weder gleiche Querschnitte, noch gleiche Geschwindigkeiten des Wasserstromes. Wir denken uns daher für einen Augenblick noch eine 3te Röhre C, welche mit A gleiche Oeffnung, mit B aber gleiche Geschwindigkeit des Wasserstromes besitzt. Bezeichnet dann m' die aus C fliessende Wassermenge, so können wir sagen: Da A und B gleiche Oeff-

C

nungen haben, so werden sich die aus ihnen fliessenden Wassermengen m und m' wie die Geschwindigkeiten der Wasserströme d. h. wie 8 : 7 verhalten. Weil ferner C und B gleiche Geschwindigkeiten des Wasserstromes besitzen, so verhalten sich die aus ihnen fliessenden Wassermengen m' und M wie die Querschnitte, d. h. wie 5 : 13. Wir haben daher die 2 Proportionen:

$$m : m' = 8 : 7$$
$$m' : M = 5 : 13$$

Da nun das 2te Glied der 1sten Proportion gleich ist dem 1sten der 2ten, so verhält sich

$$m : M = 8 . 5 : 7 . 13$$
$$\text{oder } m : M = 40 : 91$$

Wir erkennen hieraus, dass die aus B fliessende Wassermenge M grösser sein muss, als die Wassermenge m der Röhre A. Nach der Aufgabe haben wir aber nicht einen beliebigen, sondern den Zeitraum in's Auge zu fassen, während dessen aus der Röhre B 561 Cubikfuss Wasser mehr als aus A herausfliesst. Wenn daher x die Anzahl Cubikfusse Wasser bezeichnet, die während dieser Zeit aus der Röhre A herausfliesst, so ist $(x+561)$ Cubikfuss die während derselben Zeit aus B fliessende Wassermenge und man hat daher wieder die Proportion:

$$x : (x+561) = 40 : 91 \text{ oder}$$
$$91x = 40(x+561)$$
$$91x = 40x+40 . 561$$
$$51x = 22440$$
$$\text{und } x = \tfrac{22440}{51} = 440.$$

Aus der Röhre A fliesst demnach während dieser Zeit eine Wassermasse von 440 Cubikfuss; aus der Röhre B aber 440+561 = 1001 Cubikfuss.

4. Aufgabe. Ein Hund verfolgt einen Hasen. Ehe der Hund zu laufen anfängt, hat der Hase schon 50 Sprünge gemacht und diess ist ihre anfängliche Entfernung. Wenn nun der Hase in eben der Zeit 6 Sprünge macht, in welcher der Hund 5 Sprünge thut und 9 Hasensprünge in Ansehung ihrer Grösse 7 Hundesprüngen gleichgerechnet werden: wie viel Sprünge wird der Hase noch machen können, ehe der Hund ihn einholt?

Auflösung. Es sei x die Anzahl Sprünge, die die Hase noch machen kann, ehe er vom Hund eingeholt wird, so hat er im Ganzon 50+x Sprünge gemacht. Nun bewegt sich der Hund bloss während der Zeit, da der Hase seine x Sprünge thut, und

da, wenn der Hase 6 Sprünge macht, der Hund bloss 5 thut, so wird, wenn der Hase 1 Sprung macht, der Hund bloss $\frac{5}{6}$ Sprünge, wenn der Hase aber x Sprünge macht, der Hund $x \cdot \frac{5}{6}$ oder $\frac{5x}{6}$ Sprünge thun. Nun muss der Weg, welchen der Hase in seinen $\frac{5x}{6}$ Sprüngen zurücklegt, gleich sein dem Weg, den der Hase in seinen $50+x$ Sprüngen zurückgelegt hat; wir haben daher schon die Gleichung: $\frac{5x}{6}$ Hundssprünge $=$ $(50+x)$ Hasensprüngen. Um nun aber hieraus eine Gleichung in unbenannten Zahlen abzuleiten, müssen wir die beiden Ausdrücke auf die nämliche Einheit beziehen, d. h. beide etwa in Fussen, oder beide in Hasensprüngen, oder beide in Hundssprüngen ausdrücken. In andern Längenheiten, als Hasen- oder Hundssprüngen, können wir es desshalb nicht ausdrücken, weil in der Aufgabe kein Verhältniss der Hasen- oder Hundssprünge zu einer andern Längeneinheit angegeben ist. Es bleibt daher nichts übrig, als die beiden zurückgelegten Wege in Hundssprüngen oder dann beide in Hasensprüngen auszudrücken. Da 9 Hasensprünge $=$ 7 Hundssprüngen, so wird 1 Hasensprung $= \frac{7}{9}$ Hundssprüngen und die $50+x$ Hasensprünge $= (50+x)\frac{7}{9}$ Hundssprünge sein; man hat also einmal die Gleichung:

$$\frac{5x}{6} = (50+x)\tfrac{7}{9}, \text{ oder, mit 18 multiplizirt:}$$

$$15x = 2(50+x)7$$
$$15x = 700+14x \text{ oder}$$
$$x = 700.$$

Ebenso hätte man beides in Hasensprüngen ausdrücken und zu diesem Ende die $\frac{5x}{6}$ Hundssprünge in Hasensprünge verwandeln können. Da nämlich 7 Hundssprünge $=$ 9 Hasensprüngen, so wird 1 Hundssprung $= \frac{9}{7}$ Hasensprünge und die $\frac{5x}{6}$ Hundssprünge $= \frac{5x}{6} \cdot \frac{9}{7} = \frac{45x}{42}$ Hasensprünge sein. Daher die Gleichung:

$$\frac{45x}{42} = 50 + x$$
$$45x = 50 \cdot 42 + 42x$$
$$3x = 2100$$
$$x = \tfrac{2100}{3} = 700.$$

5. Aufgabe. Es wollte Jemand ein Haus kaufen, und um das dazu erforderliche Capital aufzubringen, jedem seiner Schuldner eine gleiche Summe aufkündigen. Er versuchte zu dem Ende, ob es hinlänglich wäre, wenn er jedem 250 Thlr. aufkündigte, fand aber, dass er alsdann 2000 Thlr. zu wenig erhalten würde. Er versuchte es daher mit 340 Thlr.; diess brachte ihm aber 880 Thlr. mehr, als er brauchte. Wie viele Schuldner hatte er? Wie gross war das herbeizuschaffende Kapital? Und wie viel muss er jedem seiner Schuldner aufkündigen?

Auflösung. Wir wollen mit x die Anzahl seiner Schuldner bezeichnen; wenn er dann jedem 250 Thlr. aufkündigt, so bekommt er $x \, . \, 250$ oder $250x$ Thlr.; diese Summe ist aber nach der Aufgabe noch um 2000 Thlr. geringer, als der Preis des Hauses; daher muss dieser $= (250x+2000)$ Thlr. sein. Kündigt er aber jedem seiner x Schuldner 340 Thlr., also im Ganzen $340x$ Thlr. auf, so hat er 880 Thlr. mehr, als er braucht; folglich ist der Preis des Hauses auch $= (340x-880)$ Thlr. Wir haben folglich die Gleichung;

$$340x - 880 = 250x + 2000$$
$$(340 - 250)x = 2000 + 880$$
$$90x = 2880$$
$$x = \tfrac{2880}{90} = 32.$$

Er hat also 32 Schuldner; das herbeizuschaffende Kapital aber ist $= 32 \, . \, 250 + 2000 = 8000 + 2000 = 10000$ Thlr.; daher dann die jedem aufzukündende Summe $= \frac{10000}{32}$ Thlr. $= 312\frac{1}{2}$ Thlr.

Dieses Beispiel zeigt, wie bisweilen eine Aufgabe mit scheinbar mehrern Unbekannten durch eine Gleichung mit nur einer Unbekannten gelöst werden kann.

5. Aufgabe. Ein Kapitalist nimmt 8000 Thlr. unter vortheilhaften Bedingungen auf, weil er Gelegenheit hat, 23000 Thlr. zu höhern Procenten unterzubringen, und er hat einen Ueberschuss von 905 Thlr. an jährlichen Zinsen. Unter den nämlichen Bedingungen nimmt er einerseits 9400 Thlr. auf und verleiht anderseits 17500 Thlr.; dies bringt ihm einen Ueberschuss von $539\frac{1}{2}$ Thlr. an jährlichen Zinsen. Zu welchen Procenten hat er Geld aufgenommen und ausgeliehen?

Auflösung. Wir wollen annehmen, er leihe sein Geld à x Procent aus, müsse dagegen von dem aufgenommenen Gelde bloss y Proc. Zins zahlen, so tragen ihm die 23000 Thlr. à x Proc.: $230x$ Thlr. Zins; darunter befinden sich aber 8000 Thlr., die er

à $y\frac{0}{0}$ verzinsen oder von denen er also $80y$ Thlr. Zins bezahlen muss; folglich bleiben ihm nur noch übrig $230x—80y$ Thlr., welcher Ueberschuss $= 905$ Thlr. sein muss. Von den 17500 Thlr., die er à $x\frac{0}{0}$ ausgeliehen hat, bezieht er $175x$ Thlr. Zins, muss dagegen für die 9400 Thlr. selber $94y$ Thr. Zins bezahlen, so dass ihm hier nur noch übrig bleibt $175x—94y$ Thlr., was $=$ $539\frac{1}{2}$ Thlr. sein sollte. Wir haben daher die 2 Gleichungen:

$$230x-80y=905$$
$$175x-94y=539\tfrac{1}{2},$$

oder, wenn wir die 1ste Gleichung durch 5 dividiren, die 2te mit 2 multipliziren:

$$46x-16y=181$$
$$350x-188y=1079.$$

Wenn wir hier, um y zu eliminiren, die 1ste Gleichung mit 47, die 2te mit 4 multipliziren, so erhalten wir die Gleichungen:

$$2162x-752y=8507$$
$$1400x-752y=4316,$$

und indem wir die letzte von der erstern abziehen, bekommen wir die Gleichung:

$$762x=4191$$

woraus $x=\frac{4191}{762}=5\frac{381}{762}=5\frac{1}{2}$.

Durch Einsetzung dieses Werthes in eine der ersten Gleichungen finden wir $y=4\frac{1}{2}$; also hat er $5\frac{1}{2}$ Procent genommen und $4\frac{1}{2}$ Procent bezahlt.

Ueber die Symbole $\frac{m}{0}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$

117. Aufgabe. Vor n Tagen ging ein Bote von einem gewissen Orte ab und machte täglich a Meilen. Wenn ihm nun ein anderer vom gleichen Ort aus nachgeschickt wird, der täglich b Meilen macht, wann wird dann dieser zweite den ersten eingeholt haben?

Auflösung. Wenn wir mit x die Anzahl Tage bezeichnen, die der 2te Bote braucht, um den ersten einzuholen, so hat sich der erste $n+x$ Tage bewegt und dabei täglich a Meilen, folglich im Ganzen $(n+x).a$ Meilen zurückgelegt. Der zweite aber, welcher täglich b Meilen macht, wird in x Tagen bx Meilen zurückgelegt haben. Da sie nun von dem nämlichen Orte ausgehen, so werden im Augenblicke ihres Zusammentreffens die zurückgelegten Wege einander gleich sein müssen. Wir haben daher die Gleichung:

$$bx=(n+x)a \text{ oder}$$
$$bx=na+ax$$

$$bx - ax = na$$
$$(b - a)x = na$$
$$x = \frac{na}{b - a}.$$

Also treffen sie nach $\frac{na}{b-a}$ Tagen zusammen.

So lange nun $b > a$, ist $b - a$ positiv und x daher auch positiv, d. h. es gibt wirklich eine bestimmte Anzahl Tage, nach welchen das Zusammentreffen erfolgt.

Wäre dagegen $b = a$, so wäre $b - a = 0$ und man erhielte $x = \frac{na}{0}$. In diesem Fall würde der zweite so schnell als der erste sich bewegen; sie müssten daher immer gleichweit auseinander sein und es könnte ein Zusammentreffen gar nie stattfinden. Diese Unmöglichkeit drückt die Algebra hier dadurch aus, dass sie uns für x ein Symbol $\frac{na}{0}$ oder $\frac{m}{0}$ liefert. Dieses Symbol enthält in der That den Begriff der Unmöglichkeit in sich; denn es gibt keine, wenn auch noch so grosse, endliche Zahl, welche, mit Null multiplizirt, zum Produkt eine endliche Zahl m gäbe.

Wäre $b < a$, so würde $b - a$ negativ und daher x selber negativ. Da eine negative Anzahl Tage hier aber keinen Sinn hat, so ist auch dieser negative Werth von x ein Zeichen für die Unmöglichkeit der Aufgabe. Wirklich ist klar, dass in diesem Fall die beiden Boten nicht bloss sich nie treffen, sondern sogar immer weiter auseinander kommen.

Hätte man endlich $b = a$ und gleichzeitig $n = 0$, so würde $x = \frac{na}{b-a}$ sich in $x = \frac{0}{0}$ verwandeln. Diese Form $\frac{0}{0}$ können wir aber als Symbol der Unbestimmtheit betrachten, indem jede endliche Grösse, mit Null multiplizirt, zum Produkt wieder Null gibt. Auch ist die Aufgabe in der That in diesem Falle unbestimmt. Denn $n = 0$ und $b = a$ heisst: Beide Boten gehen zur nämlichen Stunde mit einander ab und bewegen sich fortwährend mit der nämlichen Geschwindigkeit; folglich sind sie stets bei einander und treffen sich also jeden Augenblick, d. h. es gibt nicht bloss einen, sondern unendlich viele Zeitpunkte des Zusammentreffens.

118. Wir sind hier auf die Symbole $\frac{m}{0}$ und $\frac{0}{0}$ gekommen,

Das erste ist der Quotient aus irgend einer endlichen Zahl durch Null. Dieser Quotient $\frac{m}{0}$ oder $\frac{1}{0}$ ist in der That vollständig unmöglich, existirt also gar nicht, sobald wir unter dem Nenner Null die wirkliche absolute Null uns denken; denn jede beliebige, selbst eine unendlich grosse Zahl gibt, mit der absoluten Null multiplizirt, wieder Null und niemals den Dividenden m oder 1. Wenn man sich jedoch in dem Quotienten $\frac{m}{0}$ oder $\frac{1}{0}$ statt des Divisors Null eine unendlich kleine d. h. eine von der Null um unendlich wenig verschiedene Zahl ω denkt, dann wird der Quotient $\frac{m}{\omega}$ oder $\frac{1}{\omega}$ unendlich gross und in diesem Sinne pflegt man allgemein zu schreiben:

$$\frac{m}{0} = \infty \text{ und } \frac{1}{0} = \infty.$$

Betrachten wir den Bruch $\frac{1}{\alpha}$ und setzen hier successive $\alpha = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10^6}, \frac{1}{10^{12}}, \frac{1}{10^{18}}, \frac{1}{10^{24}}$, so kommt

$$\text{für } \alpha = \frac{1}{10} : \frac{1}{\alpha} = 10$$
$$\text{„ } \alpha = \frac{1}{100} : \frac{1}{\alpha} = 100$$
$$\text{„ } \alpha = \frac{1}{1000} : \frac{1}{\alpha} = 1000$$
$$\text{„ } \alpha = \frac{1}{10^6} : \frac{1}{\alpha} = 10^6$$
$$\text{„ } \alpha = \frac{1}{10^{12}} : \frac{1}{\alpha} = 10^{12}$$
$$\text{„ } \alpha = \frac{1}{10^{18}} : \frac{1}{\alpha} = 10^{18}$$
$$\text{„ } \alpha = \frac{1}{10^{24}} : \frac{1}{\alpha} = 10^{24}.$$

Je kleiner also der Nenner α wird, desto grösser fällt der Quotient $\frac{1}{\alpha}$ aus und für ein unendlich kleines α wird $\frac{1}{\alpha}$ selber unendlich gross.

119. Der Quotient $\frac{0}{0}$ ist das Symbol vollständiger Unbestimmtheit; es kann $\frac{0}{0}$ jede beliebige Zahl vorstellen, weil jede

Zahl, mit dem Divisor Null multiplizirt, zum Produkt wieder den Dividenden Null gibt. Auch wenn in dem Quotienten $\frac{0}{0}$ Zähler und Nenner nicht als absolute Nullen, sondern nur als unendlich kleine Grössen gedacht werden, ist der Quotient $\frac{0}{0}$ doch unbestimmt Das leuchtet sofort ein, wenn man bedenkt, dass von 2 Grössen beide unendlich klein sein und doch zu einander in jedem beliebigen Grössenverhältniss stehen können, also keineswegs einander gleich zu sein brauchen. Nur in diesem letzten Fall wäre ihr Quotient $= 1$. Gerade so verhält es sich mit dem Quotienten $\frac{\infty}{\infty}$.

Uebrigens darf man ja nicht glauben, dass jedesmal Unbestimmtheit vorhanden sei, wenn ein Quotient unter der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ erscheint. Diese Unbestimmtheit ist sehr oft nur scheinbar. So oft nämlich Zähler und Nenner eines Bruches einen gemeinschaftlichen Faktor enthalten, der für einen speziellen Werth eines darin vorkommenden Buchstabens zu Null wird, nimmt der Quotient die Form $\frac{0}{0}$ an, ohne desshalb unbestimmt zu sein. So würde z. B. $\frac{x^3-a^3}{x-a}$ für $x=a$ zu $\frac{0}{0}$, während sein Werth ganz bestimmt und zwar $= 3a^2$ ist. Um das einzusehen, darf man nur den gemeinschaftlichen Faktor durch Division entfernen und erst nachher den Werth $x=a$ einführen. Man hat nämlich

$$\frac{x^3-a^3}{x-a} = \frac{(x^2+ax+a^2)(x-a)}{x-a} = x^2+ax+a^2$$

$$\text{Somit } \left(\frac{x^3-a^3}{x-a}\right)_{x=a} = (x^2+ax+a^2)_{x=a} = a^2+a^2+a^2=3a^2.$$

120. Erhält man bei der Auflösung einer Aufgabe für eine oder mehrere Unbekannte negative Zahlenwerthe, während die Aufgabe selbst nur positive Werthe zulässt, so folgt daraus, dass die Aufgabe unmöglich ist. Da indessen die gefundenen negativen Werthe $x=-a$, $y=-b$ etc. die Gleichungen der Aufgabe verifiziren, so ist klar, dass, wenn man in diesen Gleichungen vorerst x in $-x$ und y in $-y$ verwandeln würde, die so umgestalteten Gleichungen auch durch die Werthe $x=a$, $y=b$ etc. verifizirt werden müssten. Bisweilen ist es dann möglich, die Fassung der Aufgabe so abzuändern, dass die nämlichen Werthe der Unbekannten, positiv genommen, der Aufgabe genügen. Das wäre z. B. in folgender Aufgabe der Fall:

Ein Familienvater ist 52 Jahr alt, indess sein jüngstes Kind 12 Jahre zählt. Nach wie viel Jahren beträgt sein Alter das 6fache von dem Alter seines Kindes?

Wenn wir mit x die zu suchende Anzahl Jahre bezeichnen, so ist alsdann der Vater $52+x$, sein jüngstes Kind aber $12+x$ Jahre alt; und da nach der Forderung der Aufgabe der Vater dann 6 mal so alt, als sein jüngstes Kind sein soll, so hat man die Gleichung:

$$(1) \quad 52+x=6(12+x) \text{ oder}$$
$$52+x=72+6x$$
$$-6x+x=72-52$$
$$-5x=20$$
$$x=\frac{20}{-5}=-4.$$

Da nun eine negative Anzahl Jahre keinen Sinn hat, so ist die Aufgabe unmöglich. Wenn man aber in der Gleichung (1) statt x setzen würde $-x$, so erhielte man: $52-x=6(12-x)$, welche Gleichung durch $x=4$ verifizirt wird. Wenn wir daher die Fassung der Aufgabe so abändern, dass x von 52 und 12 subtrahirt werden muss, so wird sie dann möglich und durch den Werth $x=4$ verifizirt. Da dürfen wir aber nur fragen: Vor wie viel Jahren war das Alter des Vaters 6 mal so gross, als das seines jüngsten Kindes? Dann erhält man als Antwort: Vor 4 Jahren! In der That zählte vor 4 Jahren der Vater 48, sein jüngstes Kind aber 8 Jahre: folglich war jener damals gerade 6 mal so alt, als dieses.

121. Ueberhaupt werden die für die Unbekannten gefundenen Werthe der Aufgabe selber nur d a n n genügen, wenn die aufgestellten Gleichungen s ä m m t l i c h e in der Aufgabe enthaltenen Bedingungen ausdrücken. Sobald aber die Aufgabe so beschaffen ist, dass sich nicht a l l e Bedingungen, welchen die Unbekannten genügen sollen, durch Gleichungen ausdrücken lassen, so ist leicht einzusehen, dass die für dieselben gefundenen Werthe, obgleich sie die Gleichungen verifiziren, doch nicht nothwendig die durch die Aufgabe verlangten Grössen sein müssen. Man hat daher, um diess zu erfahren, erst noch zu prüfen, ob sie auch die ü b r i g e n Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Wenn z. B. die Unbekannten die Ziffern einer dekadischen Zahl sein sollen, so ist klar, dass sie 1) ganze Zahlen und 2) kleiner, als 10 sein müsten. Angenommen ferner, wie würden durch die Aufgabe auf eine

Gleichung mit 2 Unbekannten geführt, z. B. auf $13x+4y=10$, so wäre die Aufgabe scheinbar unbestimmt, indem ja diese Gleichung eine unendliche Anzahl von Lösungen zulässt. Läge aber in der Aufgabe noch gleichzeitig die Forderung, dass die Werthe von x und y ganze positive Zahlen sein müssten, so wäre die Aufgabe trotz ihrer scheinbaren Unbestimmtheit unmöglich!

Diskussion der Gleichungen des ersten Grades.

122. Jede Gleichung ersten Grades mit nur **einer** Unbekannten, in welcher der Coeffizient von x von Null verschieden ist, lässt stets **eine** und nie mehr als **eine** Auflösung zu.

Wir können durch Wegschaffung der Nenner, Ausführung der angedeuteten Operationen und Transposition der Glieder jede solche Gleichung auf die Form bringen

$$Ax=B.$$

Wenn nun der Coeffizient A von x nicht Null ist, so behaupten wir, die Gleichung lasse nur eine Wurzel zu. Denn gesetzt, sie liesse zugleich die beiden Wurzeln x' und x'' zu, so hätten wir die Relationen:

$$(1) \quad Ax'=B$$

$$(2) \quad Ax''=B$$

woraus durch Subtraktion sich ergäbe:

$$(3) \quad A(x'-x'')=0$$

Allein ein Produkt aus 2 Faktoren kann nur $=0$ werden, wenn einer der beiden Faktoren $=0$; da nach Voraussezung A nicht Null $=0$, so muss der andere Faktor $x'-x''=0$ sein, woraus folgt: $x''=x'$. Es gibt also in der That nur eine Wurzel, wenn in der auf die Form $Ax=B$ gebrachten Gleichung der Coeffizient von x nicht $=0$.

Ist dagegen $A=0$, so sind noch 2 Fälle möglich; entweder ist dann auch $B=0$ oder B ist von Null verschieden.

Sei 1. $A=0$ und $B=0$, so hätte man die Gleichung

$$0 \,.\, x=0$$

welche offenbar durch jeden Werth von x verifizirt wird, d. h. eine identische Gleichung ist. Die Gleichung lässt also unendlich viele Auflösungen zu oder mit andern Worten: sie ist unbestimmt. In der That würde man bei der wirklichen Auflösung bekommen: $x=\frac{0}{0}$, was das Symbol der Unbestimmtheit ist.

Ist 2. $A=0$, aber $B \lesseqgtr 0$, dann hätte man die Gleichung

$$0 \,.\, x=B$$

Mag man hier an die Stelle von x setzen, was man nur will, die linke Seite wird stets $= 0$, die rechte ist stets von Null verschieden; folglich kann diese Gleichung durch gar keinen Werth von x verifizirt werden; sie ist unmöglich. Würden wir die Gleichung nach x wirklich auflösen, so bekämen wir $x = \frac{B}{0}$ d. h. das Symbol der Unmöglichkeit. Die Gleiehung ersten Grades lässt also stets eine und nur eine Auflösung zu, sobald der Coeffizient der Unbekannten nicht $= 0$; sie lässt gar keine Auflösung zu, wenn der Coeffizient von $x = 0$, das bekannte Glied aber von Null verschieden; sie lässt endlich unendlich viele Auflösungen zu, wenn sowol der Coeffizient von x als auch das bekannte Glied gleich Null sind.

Fragen wir nach dem innern Grund der Unmöglichkeit im einen, der Unbestimmtheit im andern Fall, so rührt jene daher, dass die Gleichung einen innern Widerspruch, eine unmögliche Forderung enthält, die letzte aber daher, dass die Gleichung keine algebraische, sondern eine identische ist.

123. Das zeigt sich in speciellen Fällen sofort. Sei z. B. gegeben die Gleichung

$$\tfrac{7}{12}x + 60 + \frac{x}{6} - 15 = \tfrac{3}{4}x + 72 \quad (1)$$

so kommt
$$7x + 720 + 2x - 180 = 9x + 864$$
$$9x + 540 = 9x + 864$$
oder
$$(9 - 9)x = 864 - 540$$
$$0 \,.\, x = 324.$$

Die Gleichung ist also unmöglich. Dass ihre Unmöglichkeit von einem innern Widerspruch herrührt, zeigt sich sofort, wenn wir auf jeder Seite die bekannten Glieder zusammenziehen und ebenso die unbekannten. Man erhält dann aus (1):

$$\tfrac{9}{12}x + 45 = \tfrac{3}{4}x + 72$$
oder
$$\tfrac{3}{4}x + 45 = \tfrac{3}{4}x + 72.$$

Allein die Forderung, dass für den nämlichen Werth von x der Ausdruck $\frac{3}{4}x + 45$ gleich derselben Grösse $\frac{3}{4}x$ mehr einer von 45 verschiedenen Zahl werde, ist offenbar eine unmögliche.

Hätte man dagegen die Gleichung

$$\frac{3x+2}{5} + \frac{2x+3}{3} = x + \frac{4x+6}{15} + 1 \quad (2)$$

so ergibt die Auflösung:

$$3(3x+2) + 5(2x+3) = 15x + 4x + 6 + 15$$

oder $$9x+6+10x+15=15x+4x+6+15$$
$$19x+21=19x+21$$
$$0\,.\,x=0$$
eine Gleichung, welche durch *jeden* Werth von x verifizirt wird, also unendlich viele Auflössungen zulässt.

Diese Unbestimmtheit ist aber auch sehr begreiflich. Denn führen wir auf jeder Seite der Gleichung (2) die angedeuteten Operationen aus, so kommt
$$\tfrac{3}{5}x+\tfrac{2}{5}+\tfrac{2}{3}x+1=x+\tfrac{4}{15}x+\tfrac{6}{15}+1$$
oder $$\tfrac{19}{15}x+\tfrac{7}{5}=\tfrac{19}{15}x+\tfrac{21}{15}$$
oder $$\tfrac{19}{15}x+\tfrac{7}{5}=\tfrac{19}{15}x+\tfrac{7}{5}$$
eine Gleichung, welche das x *gar keiner* Bedingung unterwirft, so dass also x jeden beliebigen Werth haben kann.

Man könnte daher den Satz 122 auch so ausdrücken:

Eine Gleichung ersten Grades mit nur einer Unbekannten lässt stets **eine** *und nur* **eine** *Wurzel zu, wofern sie weder identisch, noch unmöglich ist.*

124. *Zwei Gleichungen des ersten Grades mit zwei Unbekannten lassen stets* **eine** *und nur* **eine** *Auflösung zu, sobald in der durch Elimination einer der Unbekannten erhaltenen Endgleichung der Coeffizient der Unbekannten von Null verschieden ist.*

Seien $$ax+by=c \quad (1)$$
$$a'x+b'y=c' \quad (2)$$
so erhält man durch die Elimination von y die Gleichung
$$(ab'-ba')x=cb'-bc' \quad (3),$$
eine Gleichung von der Form $Ax=B$.

Da die Gleichung (3) eine Combination der Gleichungen (1) und (2), so kann sie jede von diesen ersetzen und man kann daher statt (1) und (2) auch eine von diesen und die Gleichung (3) benutzen.

Wenn nun $ab'-ba'$ nicht $=0$, so lässt die Gleichung (3) nur *eine* Auflösung, also nur *einen* Werth von x zu, durch dessen Substituation in eine der beiden Gleichungen (1) und (2) man den zugehörigen Werth von y bekommt.

Durch Elimination von x bekäme man eine Endgleichung in y, in welcher der Coeffizient von y wieder $ab'-ba'$ wäre und die daher, weil $ab'-ba'$ nicht $=0$, auch für y nur *einen* Werth liefern würde. Sobald daher $ab'-ba'\lesseqgtr 0$, so gibt es stets *ein* und

n u r e i n Werthenpaar für x und y, welches den Gleichungen (1) und (2) Genüge leistet.

Wäre dagegen der Coeffizient $ab'-ba'$ der Unbekannten in der Endgleichung $= 0$, so müssten wieder 2 Fälle unterschieden werden. Es könnte nämlich dabei das bekannte Glied $cb'-bc'=0$ oder verschieden von Null sein.

Sei 1. $ab'-ba'=0$, indess $cb'-bc'\lesseqgtr 0$, so wäre die Gleichung (3) unmöglich. Allein (3) ist eine blosse Folge der Gleichungen (1) und (2); es müsste somit auch das System der Gleichungen (1) und (2) unmöglich sein. Nun ist aber jede der beiden Gleichungen an sich immer unmöglich, lässt sogar unendlich viele Auflösungen zu; es kann daher die Unmöglichkeit des Systems nur daher rühren, dass die beiden Gleichungen w i d e r s p r e c h e n d e Bedingungen ausdrücken, also nicht neben einander bestehen können. In der That lässt sich sehr leicht zeigen, dass die 2 Gleichungen sich widersprechen, wenn $ab'-ba'=0$, indess $cb'-bc'\gtrless 0$. Denn multiplizirt man die erste mit b', die 2te mit b, so kommt

$$\left.\begin{array}{l} ab'x+bb'y=cb' \\ a'bx+bb'y=bc' \end{array}\right\} (4)$$

Nun folgt aus $ab'-ba'=0$, dass $ab'=ba'$, während aus $cb'-bc'\gtrless 0$ folgt, dass cb' nicht $= bc'$. Die linken Seiten der beiden Gleichungen (4) sind daher gleich, indes die rechten verschieden sind, was offenbar unmöglich; denn die Grösse $ab'x+bb'y$ kann nicht den 2 verschiedenen Grössen cb' und bc' gleich sein.

Sei 2. $ab'-ba'=0$ und $bc'-cb' = 0$, so nimmt die Gleichung (3) die Form: $0 \,.\, x=0$ an, lässt somit unendlich viele Auflösungen zu. Allein (3) ist eine blosse Combination der Gleichungen (1) und (2); also müssen auch diese unendlich viele Werthe von x zulassen, von welchen jedem ein Werth von y entspricht. Das System der Gleichungen (1) und (2) wäre somit unbestimmt. Wir behaupten nun, das kann nur daher rühren, dass die Gleichungen (1) und (2) nicht wirklich verschieden sind, sondern identische Bedingungen ausdrücken.

In der That folgt aus

$$ab'-ba'=0 \;:\; ab'=ba' \text{ oder } \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$$

und aus $\quad bc'-cb'=0 \;:\; bc'=cb' \text{ oder } \dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$

Also aus den Bedingungen $ab'-ba'=0$ und $bc'-cb'=0$

folgt: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ d. h. die Coeffizienten der 2ten Gleichung sind proportional den Coeffizienten des 1sten, woraus folgt, dass die 2te von der ersten nicht verschieden ist, sondern durch Division mit einer bestimmten Zahl aus derselben hergeleitet werden kann. Wirklich wenn m den gemeinschaftlichen Werth der 3 Quotienten $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$ und $\frac{c}{c'}$ bezeichnet, so ist $\frac{a}{a'} = m$ oder $a = ma'$,

$$\frac{b}{b'} = m \text{ oder } b = mb'$$

$$\text{und } \frac{c}{c'} = m \text{ oder } c = mc'.$$

Die erste Gleichung kann daher auch geschrieben werden: $ma'x + mb'y = mc'$ und durch Division derselben mit m ergibt sich sogleich die 2te Gleichung $a'x + b'y = c'$. Die Werthe von x und y erscheinen in diesem Fall übrigens auch beide in der Form $\frac{0}{0}$. Denn da $cb' - bc' = 0$ und $ab' - ba' = 0$, so ist $x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} = \frac{0}{0}$; ferner folgt aus $\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}$, dass $a'c - ac' = 0$, somit $y = \frac{ac' - ca'}{ab' = ba'} = \frac{0}{0}$.

Wir können daher den Satz 124 auch so aussprechen: Zwei Gleichungen ersten Grades mit 2 Unbekannten lassen stets **eine** und nur **eine** Auflösung zu, wofern sie weder identische Bedingungen enthalten, noch sich widersprechen.

125. Im vorigen Raisonnement wurde implicite vorausgesetzt, dass die Coeffizienten b und b' der Unbekannten y nicht beide $= 0$ seien. Wenn das der Fall wäre, so würden die Produkte cb', bc', ab' und ba' einzeln auf Null reduzirt; daher denn auch die Differenzen $cb' - bc'$ und $ab' - ba' = 0$ werden; dagegen könnte man daraus noch keineswegs schliessen, dass auch $ac' - ca' = 0$ sei; und wenn das Letzte nicht statt findet, so nimmt der allgemeine Werth von y die Form an: $\frac{m}{0}$, indem ja $y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$, wo der Zähler $\gtrless 0$, während der Nenner $= 0$. In diesem Fall ist auch wirklich das System der beiden Gleichungen unmöglich. Dieselben reduziren sich dann nämlich auf die beiden Gleichungen: $ax = c$ und $a'x = c'$, die sich widersprechen, und folglich nicht neben einander bestehen können, wofern nicht $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$ oder $ac' = ca'$ ist.

Findet aber diese letztere Relation statt, dann reduziren sich die beiden Gleichungen auf eine Gleichung $ax=c$, aus welcher man für x den bestimmten Werth $x=\frac{c}{a}$ zieht. Obgleich also hier die allgemeine Formel x unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen lässt, so hat es doch einen einzigen und bestimmten Werth $\frac{c}{a}$, den man übrigens aus der allgemeinen Form $x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$ herleiten könnte. Weil nämlich $ac'=ca'$ vorausgesetzt wird, so ist $a'=\frac{ac'}{c}$, und führen wir in der Formel für x an die Stelle von a' diesen Werth ein, so geht dieselbe über in

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-b\,.\,\frac{ac'}{c}}=\frac{c(cb'-bc')}{cab'-bac'}=\frac{c(cb'-bc')}{a(cb'-bc)}$$

oder, indem wir Zähler und Nenner durch $cb'-bc'$ dividiren, $x=\frac{c}{a}$. So hat also in diesem Fall x einen ganz bestimmten Werth, obgleich es unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, während der ebenfalls unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinende Werth von y in der That als unbestimmt angesehen werden darf, indem diese gar nicht in der Gleichung vorkommende Grösse beliebige Werthe haben kann.

126. Wir wollen die in Nro. 124 allgemein behandelten Fälle noch auf spezielle Gleichungen anwenden. Gesetzt, man hätte die beiden Gleichungen:

$$(1)\ 12x-20y=41$$
$$(2)\ 21x-35y=63,$$

so erhält man, wenn man behufs der Elimination von x die 1ste Gleichung mit 7, die 2te mit 4 multiplizirt, die Gleichungen:

$$(3)\ 84x-140y=287$$
$$(3)\ 84x-140y=252.$$

Da hier nun die linken Seiten gleich, die rechten aber verschieden sind, so kann es gar keine Zahlen geben, welche, an die Stelle von x und y gesetzt, gleichzeitig beiden Gleichungen genügen; die Gleichungen widersprechen sich und haben daher gar keine gemeinschaftliche Auflösung.

Die Unmöglichkeit dieses Systems würde sich bei der wirklichen Ausführung dadurch kund geben, dass wir auf eine absurde

Gleichung, wie $0 \,.\, x = b$ kämen. Aus Gleichung (1) würden wir finden $x = \frac{41+20y}{12}$ und wenn wir diesen Werth in die 2te Gleichung setzen, so kommt:

$$21\left(\frac{41+20y}{12}\right) - 35y = 63$$

$$861 + 420y - 420y = 756$$

$$0 \,.\, y = 756 - 861 = -105$$

$$0 = -105.$$

Hätten wir dagegen die beiden Gleichungen:

$$52x - 65y = 91$$

$$68x - 85y = 119,$$

so multipliziren wir, um x zu eliminiren, die erste mit 68, die zweite mit 52, dann erhalten wir die beiden identischen Gleichungen:

$$68 \,.\, 52x - 4420y = 6188 \text{ und}$$

$$52 \,.\, 68x - 4420y = 6188;$$

es bilden folglich die beiden Gleichungen nicht mehr, als eine Gleichung; daher ist ihr System unbestimmt. Diese Unbestimmtheit würde sich bei der Auflösung dadurch gezeigt haben, dass wir sowol für x, als für y Werthe von der Form $\frac{0}{0}$ erhalten hätten. Uebrigens sieht man sehr leicht, dass die zweite Gleichung eine blosse Folge der ersten, also von dieser nicht wirklich verschieden ist; denn es ist $\frac{52}{68} = \frac{65}{85} = \frac{91}{119} = \frac{13}{17}$; es sind also die Glieder der ersten gerade $\frac{13}{17}$ von den Gliedern der zweiten.

So oft also 2 Gleichungen des ersten Grades mit 2 Unbekannten gegeben sind, so kann nur einer der folgenden 3 Fälle stattfinden:

1) Entweder findet man nur ein einziges System von Werthen, welche den beiden Gleichungen genügen und die Aufgabe ist möglich und bestimmt; oder
2) es gibt gar keine Werthe für x und y, welche gleichzeitig den beiden Gleichungen genügen; die Gleichungen widersprechen sich alsdann und die Aufgabe ist unmöglich; oder
3) es gibt nicht nur einen, sondern unendlich viele Werthe von x und y, welche den Gleichungen Genüge leisten; die Gleichungen drücken alsdann identische Bedingungen aus und die Aufgabe ist unbestimmt.

127. Hat man 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten, so kommt man durch Anwendung des in No. 112 beschriebenen Ver-

fahrens zu einer Gleichung mit einer Unbekannten von der Form $Ax = B$. Da sind nun wieder 3 Fälle möglich:

1. Entweder ist der Coeffizient A von x nicht $= 0$; dann liefert die Endgleichung nach Satz 122 einen einzigen Werth von x und durch Benutzung einer Gleichung des 2ten und einer des 1sten Systems findet man die zugehörigen Werth von y und z.

2. Oder der Coeffizient A ist $= 0$, indess $B \gtrless 0$; alsdann ist die Endgleichung $Ax = B$ unmöglich; da aber die Endgleichung nur eine Folge ist der 3 ursprünglichen Gleichungen, so muss ihr System unmöglich sein d. h. sie müssen widersprechende Bedingungen enthalten.

3. Oder endlich ist $A = 0$ und $B = 0$; dann ist die Endgleichung unbestimmt, lässt also unendlich viele Werthe für x zu. Indem man irgend einen derselben in eine Gleichung des 2ten Systems setzt, erhält man den zugehörigen Werth von y und durch Substitution beider in eine der ursprünglichen Gleichungen findet man den zugehörigen Werth von z. Das ganze System ist somit unbestimmt.

128. Haben wir allgemein m Gleichungen mit eben so vielen Unbekannten, so kommen wir durch successive Elimination schliesslich zu einer Gleichung mit einer Unbekannten von der Form

$$Ax = B.$$

Ist in dieser der Coeffizient $A = 0$, so ist sie bestimmt und möglich und unser System von m Gleichungen lässt dann eine und nur eine Auflösung zu (nur eine Gruppe von Werthen für die m Unbekannten).

Ist dagegen $A = 0$ und $B \gtrless 0$, so ist die Endgleichung unmöglich und damit auch das ganze System unmöglich, was nur daher rühren kann, dass einzelne der Gleichungen sich widersprechen.

Ist endlich $A = 0$ und $B = 0$, so ist die Endgleichung unbestimmt, lässt unendlich viele Auflösungen zu; es ist alsdann auch das ganze System unbestimmt; einzelne der Gleichungen drücken dann identische Bedingungen aus.

Also ein System von m Gleichungen mit m Unbekannten ist im Allgemeinen möglich und bestimmt, lässt eine und nur eine Auflösung zu (sobald nämlich die sämmtlichen Gleichungen wirklich verschieden sind und doch sich nicht widersprechen).

Es kann aber auch vorkommen, dass ein solches System un-

möglich ist, also gar keine Auflösung zulässt, was eintritt, wenn zwischen einzelnen Gleichungen Widerspruch waltet.

Es kann endlich vorkommen, dass ein solches System unendlich viele Auflösungen zulässt (dann nämlich, wenn einzelne Gleichungen identische Bedingungen ausdrücken).

Fälle, in welchen die Anzahl der Gleichungen nicht übereinstimmt mit der Anzahl der Unbekannten.

129. Ein System von m Gleichungen mit $m+n$ Unbekannten ist unbestimmt.

Denken wir uns etwa 3 Gleichungen mit 5 Unbekannten, z. B.

1) $2x+3y+4z-t+3u=26$

2) $x-2y+z+2t-u=21$

3) $3x+2y-3z+t+2u=52$,

so können wir hier etwa die Unbekannten t und u auf die andere Seite schaffen und vorläufig wie bekannte Grössen behandeln; dann bekommen wir:

$$2x+3y+4z=26+t-3u$$
$$x-2y+z=21-2t+u$$
$$3x+2y-3z=52-t-2u.$$

Aus diesen 3 Gleichungen könnten wir x, y und z berechnen und bekämen dadurch Ausdrücke, welche t und u noch enthielten. In diesen Ausdrücken könnten wir dann für t und u successive ganz beliebige Werthe einsetzen; für jedes Werthenpaar von t und u bekämen wir eine Werthengruppe für x, y und z, also eine Auflösung unsers Systems. Da wir nun in der Wahl der Werthe von t und u unbeschränkt sind, so wird die Zahl der möglichen Auflösungen unendlich gross sein.

130. Ein System von mehr Gleichungen als Unbekannten ist im Allgemeinen unmöglich.

Um das einzusehen, denken wir uns z. B. 7 Gleichungen mit 4 Unbekannten, so können wir von diesen 7 Gleichungen irgend 4 wählen und aus denselben die Werthe der 4 Unbekannten bestimmen. Wir finden nach 128 im Allgemeinen ein einziges System von Werthen für die 4 Unbekannten. Um nun zu wissen, ob das gegebene System von 7 Gleichungen mit 4 Unbekannten möglich sei, dürfen wir nur untersuchen, ob die gefundenen Werthe auch noch die 3 übrigen Gleichungen verifiziren. Das wird im Allgemeinen nicht der Fall sein, es wäre denn, dass dieselben blosse Consequenzen der 4 ersten Gleichungen wären, so dass die

7 Gleichungen nicht mehr als 4 wirklich verschiedene Gleichungen bilden würden. Ein System von 7 Gleichungen mit 4 Unbekannten oder allgemein von $m+n$ Gleichungen mit bloss m Unbekannten ist daher im Allgemeinen unmöglich. Es ist in solchem Fall eine Ueberbestimmung vorhanden, d. h. man hat den Unbekannten mehr Bedingungen auferlegt, als sie zu ertragen vermögen.

Sechster Abschnitt.

Gleichungen des 2ten Grades.

Auflösung quadratischer Gleichungen mit einer Unbekannten.

131. Eine quadratische Gleichung kann nur 3 Arten von Gliedern in sich schliessen, nämlich Glieder, welche das Quadrat der Unbekannten, solche, welche die erste Potenz derselben enthalten und endlich noch ganz bekannte Glieder. Denkt man sich die Gleichung von Nennern befreit, die angedeuteten Operationen ausgeführt und endlich nach fallenden Potenzen von x geordnet, so wird sie die Form $ax^2+bx+c=0$ annehmen.

Die Lösung dieser Gleichung ist sehr einfach, wenn einer der Coeffizienten Null wird.

Wäre zunächst $a=0$, so wäre die Gleichung keine quadratische mehr; wir schliessen also diesen Fall von unserer Betrachtung aus.

Ist aber $b=0$, so reducirt sich die Gleichung auf

$$ax^2+c=0, \text{ woraus}$$

$$ax^2=-c$$

$$x^2=-\frac{c}{a}$$

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Sie lässt so viele Wurzeln zu, als die Quadratwurzel an einer Zahl Werthe hat, nämlich zwei. Die Gleichung heisst in diesem Fall eine reine quadratische Gleichung.

Beispiel:

$$5x^2-158=2x^2-11 \quad (1)$$

$$5x^2-2x^2=158-11$$

$$3x^2 = 147$$
$$x^2 = \frac{147}{3} = 49$$
$$x = \pm\sqrt{49} = \pm 7.$$

Die Gleichung (1) muss also sowol durch $+7$, als durch -7 verifizirt werden. Das ist auch der Fall. Denn für $x = 7$ erhält man:

$$5 \,.\, 7^2 - 158 = 2 \,.\, 7^2 - 11$$
$$5 \,.\, 49 - 158 = 2 \,.\, 49 - 11$$
$$245 - 158 = 98 - 11$$
$$87 = 87.$$

Ebenso für -7, da $(-7)^2$ auch $= +49$.

Ist ferner $c = 0$, so reduzirt sich die allgemeine Gleichung auf

$$ax^2 + bx = 0$$

und wenn wir hier x als gemeinschaftlichen Faktor absondern:

$$x(ax + b) = 0$$

welche zerfällt in

1. $x = 0$
2. $ax + b = 0$ oder $x = -\dfrac{b}{a}$

Auch diese Gleichung liefert für x also zwei Werthe.

Beispiel:

$$7x^2 - 4x = 2x^2 + 6x$$
$$5x^2 - 10x = 0$$
$$x(5x - 10) = 0$$

woraus
1. $x = 0$
2. $5x - 10 = 0$ oder $x = 2$.

Also $x = 0$ und $x = 2$ sind die Wurzeln dieser Gleichung.

Ist endlich keiner der Coeffizienten $= 0$, so haben wir die quadratische Gleichung in ihrer allgemeinsten Form, an deren Auflösung wir jetzt gehen.

132. Sei (1) $ax^2 + bx + c = 0$ unsere Gleichung, so können wir zunächst, ohne die Wurzeln zu alteriren, auf beiden Seiten durch den Coeffizienten a des ersten Gliedes dividiren, wodurch wir erhalten:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

oder wenn wir zur Abkürzung $\dfrac{b}{a} = p$ und $\dfrac{c}{a} = q$ setzen:

$$(2) \quad x^2 + px + q = 0$$

auf welche Form jede Gleichung 2ten Grades gebracht werden kann.

Indem wir q auf die rechte Seite schaffen, erhalten wir zunächst
$$x^2+px=-q.$$

Eine Zerlegung der linken Seite in $x(x+p)$, wie im 2ten Fall von No. 131 würde hier nichts nützen. Dagegen bemerken wir leicht, dass diese linke Seite die beiden ersten Glieder des Quadrates einer 2theiligen Grösse enthält. Es ist nämlich x^2 das Quadrat von x und px ist $=2.x.\frac{p}{2}$, d. h. kann als das doppelte Produkt aus x in $\frac{p}{2}$ aufgefasst werden. Wir dürfen daher nur noch das Quadrat von $\frac{p}{2}$, also $\frac{p^2}{4}$ addiren, so haben wir links das vollständige Quadrat $x^2+px+\frac{p^2}{4}$ von $x+\frac{p}{2}$. Damit aber die Wurzeln der Gleichung nicht gestört werden, müssen wir auch auf der rechten Seite $\frac{p^2}{4}$ addiren, wodurch wir erhalten:
$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q$$
oder
$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q.$$
$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$
woraus sich ergibt:
$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Die beiden Werthe von x oder die Wurzeln der quadratischen Gleichung, die wir in der Folge mit x' und x'' bezeichnen wollen, sind demnach:
$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$
$$x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Ausser diesen beiden Werthen x' und x'' gibt es offenbar keine mehr, da die Quadratwurzel aus $\frac{p^2}{4}-q$ nicht mehr, als die zwei durch $\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ bezeichneten Werthe hat, wie wir in No. 90 sahen. Es hat folglich eine Gleichung des zweiten Grades mit e i n e r Unbekannten immer z w e i und nie m e h r, als zwei

Wurzeln, was wir übrigens in der Folge noch auf ähnliche Art nachweisen werden, wie in No. 122 gezeigt wurde, dass eine Gleichung des ersten Grades mit einer Unbekannten nicht mehr, als eine Wurzel haben kann.

133. Dass die oben für x gefundenen Werthe x' und x'' in der That die Gleichung $x^2+px+q=0$ verifiziren, davon überzeugt man sich leicht, wenn man dieselben in die Gleichung einführt. Setzen wir einmal für x den Werth $x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, so kommt:

$$x^2+px+q=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2+p\left(-\frac{p}{4}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)+q \quad (1)$$

Nun ist: $\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2=\frac{p^2}{4}-p\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+\frac{p^2}{4}-q,$

ferner: $p.\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{2}-q}\right)=-\frac{p^2}{2}+p\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$; daher verwandelt sich (1) in:

$$x^2+px+q=\frac{p^2}{4}-p\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+\frac{p^2}{4}-q-\frac{p^2}{2}+p\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+q \quad (2)$$

Hier wird nun $\frac{p^2}{4}+\frac{p^2}{4}$ durch $-\frac{p^2}{2}$ aufgehoben; es ist ferner

$$-p\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+p\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=0$$

und endlich $-q+q=0$; daher heben sich die Glieder auf der rechten Seite von (2) gegenseitig auf und somit wird die Gleichung $x^2+px+q=0$ in der That durch den Werth von x' verifizirt. Aber eben so gut wird sie auch durch $x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ verifizirt; denn man hat alsdann: $x^2+px+q=\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2$ $+p\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)+q$ oder $x^2+px+q=\frac{p^2}{4}+p\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ $+\frac{p^2}{4}-q-\frac{p^2}{2}-p\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+q,$ wo die Glieder auf der rechten Seite sich gegenseitig aufheben. Die Gleichung $x^2+px+q=0$ wird also in der That durch x' und x'' verifizirt, was für Werthe auch p und q haben mögen, ja selbst dann noch, wenn $\frac{p^2}{4}-q$

negativ und folglich $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ imaginär wird, wofern man nur diese imaginären Grössen wie reelle Zahlen behandelt.

134. In No. 132 haben wir aus der Gleichung $x^2+px+q=0$ den Werth gezogen: $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Nun ist p der Coeffizient von x in der obigen Gleichung, daher $-\frac{p}{2}$ die Hälfte des Coeffizienten von x mit entgegengesetztem Zeichen; q ist das ganz bekannte Glied; also $\frac{p^2}{4} - q$ die Summe aus dem Quadrat des halben Coeffizienten von x und dem mit umgekehrtem Zeichen genommenen ganz bekannten Gliede. Daher wird $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ in Worten heissen:

Die Unbekannte einer auf die Form $x^2 + px + q = 0$ gebrachten quadratischen Gleichung ist immer gleich der Hälfte des Coeffizienten von x mit umgekehrtem Zeichen **plus** oder **minus** der Quadratwurzel aus der Summe von dem Quadrat jenes halben Coeffizienten und dem auf die rechte Seite gebrachten ganz bekannten Gliede.

135. Wir sind hiernach im Stande, die Wurzeln einer jeden quadratischen Gleichung anzugeben, ohne die Gleichung wirklich aufzulösen. Es sei als

1stes Beispiel die Gleichung $9x^2+157x-90=0$ gegeben, so bringen wir sie zuerst auf die Form $x^2+px+q=0$, indem wir auf beiden Seiten durch 9 dividiren, wodurch wir die Gleichung erhalten:

$$x^2+\tfrac{157}{9}x-10=0,$$

und hieraus folgt nach obiger Regel sogleich:

$$x = -\tfrac{157}{18} \pm \sqrt{(\tfrac{157}{18})^2 + 10} \text{ oder:}$$

$$x = -\frac{157}{18} \pm \sqrt{\frac{157^2+18^2.10}{18^2}} = -\frac{157}{18} \pm \frac{\sqrt{24649 + 3240}}{18}$$

$$x = \frac{-157 \pm \sqrt{27889}}{18} = \frac{-157 \pm 167}{18}.$$

$$\text{Es ist daher } x' = \frac{-157+167}{18} = +\frac{10}{18} = +\frac{5}{9}$$

$$\text{und } x'' = \frac{-157-167}{18} = \frac{-324}{18} = -18.$$

$x' = \frac{5}{9}$ und $x'' = -18$ sind also die Wurzeln der obigen Gleichung.

V e r i f i c a t i o n. Um die Richtigkeit der Lösung zu prüfen, dürfen wir nur die für x' und x'' gefundenen Werthe in die gegebene Gleichung setzen, welche dann sowol durch $x' = \frac{5}{9}$, als auch durch $x = -18$ auf Null reduzirt werden sollte.

Durch $x = \frac{5}{9}$ geht die Gleichung $9x^2 + 157x - 90 = 0$ über in:

$$9 \cdot (\tfrac{5}{9})^2 + 157 \cdot \tfrac{5}{9} - 90 = 0 \text{ oder:}$$

$$\tfrac{25}{9} + \tfrac{785}{9} - 90 = 0$$

$$\tfrac{810}{9} - 90 \text{ oder } 90 - 90 = 0.$$

Setzen wir aber $x = -18$ in die Gleichung, so verwandelt sie sich in $9 \cdot (-18)^2 + 157 \cdot (-18) - 90 = 0$

$$9 \cdot 324 - 157 \cdot 18 - 90 = 0$$

$$\text{oder } 2916 - 2826 - 90 = 2916 - 2916 = 0.$$

Die Gleichung $9x^2 + 157x - 90 = 0$ wird also durch $x = \frac{5}{9}$ und $x = -18$ verifizirt und daher sind $\frac{5}{9}$ und -18 in der That die Wurzeln derselben.

2 t e s B e i s p i e l. Es sei die Gleichung $x^2 - 14x + 45 = 0$ gegeben, so ist hier $x = +7 \pm \sqrt{49 - 45} = +7 \pm \sqrt{4} = 7 \pm 2$; daher $x' = 7 + 2 = 9$ und $x'' = 7 - 2 = 5$.

Und in der That wird das Trinom $x^2 - 14x + 45$ sowol durch $x = 9$, als auch durch $x = 5$ auf Null reduzirt; denn $x = 9$ gibt: $9^2 - 14 \cdot 9 + 45 = 81 - 126 + 45 = 126 - 126 = 0$; $x = 5$ aber gibt: $5^2 - 14 \cdot 5 + 45 = 25 - 70 + 45 = 70 - 70 = 0$.

3 t e s B e i s p i e l. Es sei ferner die Gleichung aufzulösen:

$$24x^2 + 2x - 15 = 0, \text{ so ist auch}$$

$$x^2 + \frac{x}{12} - \frac{5}{8} = 0, \text{ woraus}$$

$$x = -\frac{1}{24} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{24}\right)^2 + \frac{5}{8}} = -\frac{1}{24} \pm \sqrt{\frac{1 + 72 \cdot 5}{24^2}}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{24} = \frac{-1 \pm 19}{24}$$

Also $x' = \dfrac{-1 + 19}{24} = \dfrac{18}{24} = \dfrac{3}{4}$

und $x'' = \dfrac{-1 - 19}{24} = \dfrac{-20}{24} = -\dfrac{5}{6}$.

V e r i f i c a t i o n: Setzen wir an die Stelle von x den Werth $x' = \frac{3}{4}$, so kommt: $24 \cdot (\frac{3}{4})^2 + 2 \cdot \frac{3}{4} - 15 = 0$,

oder $\dfrac{24 \cdot 9}{16} + \dfrac{6}{4} - 15 = \dfrac{27}{2} + \dfrac{3}{2} - 15 = \dfrac{30}{2} - 15 = 0$.

Wenn wir aber $x''=-\frac{5}{6}$ an die Stelle von x setzen, so erhalten wir: $24\,.\,(-\frac{5}{6})^2+2\,.\,(-\frac{5}{6})-15=0$,

$$\text{oder } \frac{24\,.\,25}{36}-\frac{10}{6}-15=\frac{4\,.\,25}{6}-\frac{10}{6}-15=0$$

$$\text{oder } \frac{100}{6}-\frac{10}{6}-15=\frac{90}{6}-15=15-15=0.$$

4tes Beispiel. Haben wir ferner die Gleichung

$x^2-4x+9=0$, so ist hier

$x=2\pm\sqrt{4-9}=2\pm\sqrt{-5}$; somit

$x'=2+\sqrt{-5}$ und $x''=2-\sqrt{-5}$.

Die beiden Wurzeln dieser Gleichung sind also imaginär, d. h. es gibt weder eine positive, noch negative Zahl, welche, an die Stelle von x gesetzt, das Trinom x^2-4x+9 zu Null machen würde. Wenn wir aber die imaginären Symbole, die wir als Wurzeln dieser Gleichung erhielten, an die Stelle von x setzen und sie den nämlichen Rechnungsregeln, wie die reellen Grössen, unterwerfen, so wird die Gleichung doch verifizirt. Man hat nämlich:

$$x^2-4x+9=(2+\sqrt{-5})^2-4\,.\,(2+\sqrt{-5})+9=0 \text{ oder}$$

$$4+4\sqrt{-5}-5-8-4\sqrt{-5}+9=0 \text{ oder}$$

$$4+4\sqrt{-5}-13-4\sqrt{-5}+9=+4\sqrt{-5}-4\sqrt{-5}-9+9=0,$$

da ja $+4\sqrt{-5}$ und $-4\sqrt{-5}$, ferner -9 und $+9$ sich gegenseitig aufheben.

Ebenso würde die Gleichung durch $x''=2-\sqrt{-5}$ verifizirt.

136. Statt indessen, wie in den vorangehenden Beispielen, bei der Auflösung quadratischer Gleichungen die allgemeine Formel zu benutzen, thun namentlich Anfänger gut, die Gleichungen direkte aufzulösen. Gesetzt, wir hätten die Gleichung $6x^2-x-2=0$, so erhalten wir zunächst, indem wir durch 6 dividiren:

$$x^2-\frac{x}{6}-\frac{1}{3}=0, \text{ oder}$$

$$x^2-\frac{x}{6}=\frac{1}{3}.$$

Nun kann $-\frac{x}{6}$ als das doppelte Produkt aus x in $-\frac{1}{12}$ angesehen werden, weil $-\frac{x}{6}=2.x.-\left(\frac{1}{12}\right)$. Wenn wir daher noch das Quadrat von $-\frac{1}{12}$ oder $\frac{1}{144}$ auf beiden Seiten addiren, so wird die linke Seite ein vollständiges Quadrat und man hat dann:

$$x^2-\frac{x}{6}+\frac{1}{144}=\frac{1}{3}+\frac{1}{144}$$

oder: $(x-\frac{1}{12})^2=\frac{48}{144}+\frac{1}{144}=\frac{49}{144}$

$$x-\frac{1}{12}=\pm\sqrt{\frac{49}{144}}=\pm\frac{7}{12};$$

somit: $x=\frac{1}{12}\pm\frac{7}{12}$; also ist:

$$x'=\frac{1}{12}+\frac{7}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

$$x''=\frac{1}{12}-\frac{7}{12}=-\frac{6}{12}=-\frac{1}{2},$$

$x'=\frac{2}{3}$ und $x''=-\frac{1}{2}$ sind demnach die Wurzeln dieser Gleichung.

Es sei ferner die Gleichung gegeben:

$$x^2+bx+10a^2=7ax+2b^2-ab,$$

so bringen wir zunächst die bekannten Glieder auf die rechte, die unbekannten auf die linke Seite, wodurch wir erhalten:

$$x^2-(7a-b)x=2b^2-10a^2-ab$$

oder indem wir zur Vervollständigung des Quadrates auf beiden Seiten $\left(\frac{7a-b}{2}\right)^2$ addiren:

$$x^2-(7a-b)x+\left(\frac{7a-b}{2}\right)^2=\left(\frac{7a-b}{2}\right)^2+2b^2-10a^2-ab$$

oder $\left[x-\left(\frac{7a-b}{2}\right)\right]^2=\frac{(7a-b)^2+8b^2-40a^2-4ab}{4}$

$$\left[x-\left(\frac{7a-b}{2}\right)\right]^2=\frac{49a^2-14ab+b^2+8b^2-40a^2-4ab}{4}=\frac{9a^2-18ab+9b^2}{4}$$

$$x-\frac{7a-b}{2}=\pm\sqrt{\frac{9a^2-18ab+9b^2}{4}}=\frac{3a-3b}{2}$$

$$x=\frac{7a-b}{2}\pm\frac{3a-3b}{2};\text{ also}$$

$$x'=\frac{7a-b+3a-3b}{2}=\frac{10a-4b}{2}=5a-2b$$

$$x''=\frac{7a-b-3a+3b}{2}=\frac{4a+2b}{2}=2a+b.$$

137. Relationen zwischen den Wurzeln und den Coeffizienten einer quadratischen Gleichung von der Form: $x^2+px+q=0$.

Wir haben als Wurzel dieser Gleichung gefunden:

$$1.\quad x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

$$2.\quad x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen finden wir:

$$x' + x'' = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p,$$

d. h. die Summe der Wurzeln ist gleich dem Coeffizienten von x mit entgegengesetztem Zeichen. Allein statt: $x' + x'' = -p$ könnte man auch schreiben:

$$p = -x' - x''$$

d. h. der Coeffizient von x ist gleich der Summe der mit umgekehrtem Zeichen genommenen Wurzeln.

Wenn wir die beiden Gleichungen (1) und (2) aber mit einander multipliziren und dabei berücksichtigen, dass wir rechts die Summe und die Differenz der beiden Grössen $-\frac{p}{2}$ und $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ haben, so kommt

$$x'x'' = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2$$

$$\text{oder } x'x'' = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q$$

also $x'x'' = q$ d. h. das Produkt der beiden Wurzeln ist gleich dem ganz bekannten Gliede.

Es ist also in jeder quadratischen Gleichung von der Form $x^2 + px + q = 0$ der Coeffizient von x gleich der Summe der mit umgekehrtem Zeichen genommenen Wurzeln und das ganz bekannte Glied gleich dem Produkt derselben.

Diese Relationen lassen uns in vielen Fällen die Wurzeln einer quadratischen Gleichung sofort erkennen, ohne dass wir die Gleichung erst aufzulösen brauchen. Wäre z. B. $x^2 - 9x + 20 = 0$ die Gleichung, so müssten die Wurzeln x' und x'' derselben so beschaffen sein, dass ihre Summe $= 9$ und ihr Produkt $= 20$ wäre. Unter den ganzen Zahlen, deren Summe $= 9$, sind es aber nur 4 und 5, welche zum Produkt 20 geben; die Wurzeln sind also 4 und 5. Hiesse die Gleichung $x^2 + 9x + 20 = 0$, so müsste die Summe der Wurzeln $= -9$ und ihr Produkt wieder $= 20$ sein. Somit wären -4 und -5 die Wurzeln.

Hiesse die Gleichung: $x^2 + x - 20 = 0$, so müsste die Summe der Wurzeln $= -1$, ihr Produkt $= -20$. Weil das Produkt negativ, so haben die Wurzeln entgegengesetztes Zeichen; ihre Summe ist $= -1$; also muss die negative Wurzel dem absoluten Werthe nach um 1 grösser sein, als die positive. Die Wurzeln sind dem-

nach -5 und $+4$. Ebenso fände man endlich, dass die Gleichung $x^2-x-20=0$ zu Wurzeln $+5$ und -4 hätte.

Umgekehrt kann man mit Hülfe dieser Relationen stets quadratische Gleichungen mit vorgeschriebenen Wurzeln bilden. Man darf nur die Summe dieser Wurzeln und deren Produkt bilden, die 1ste mit entgegengesetztem Zeichen zum Coeffizienten von x, das letzte aber zum ganz bekannten (absoluten) Gliede machen. Sollen z. B. 7 und 8 die Wurzeln sein, wie lautet die Gleichung? Die Summe der Wurzeln ist $= 7+8=15$; das Produkt $= 56$; daher ist -15 der Coeffizient von x und 56 das absolute Glied und die Gleichung heisst: $x^2-15x+56=0$. Sollen 9 und (-13) die Wurzeln der zu suchenden Gleichung sein, so ist die Summe der Wurzeln $=9-13=-4$, das Produkt derselben $=9.(-13)=-117$; daher wird $+4$ der Coeffizient von x und -117 das absolute Glied sein und die Gleichung somit heissen: $x^2+4x-117=0$.

138. Auflösung der Gleichung $ax^2+bx+c=0$ ohne vorherige Division durch den Coeffizienten von x^2.

Wir schaffen das absolute Glied c wieder auf die rechte Seite und bekommen:

$$ax^2+bx=-c.$$

Nun ist $ax^2=(x\sqrt{a})^2$ und $bx=2\,.\,x\sqrt{a}\,.\,\frac{b}{2\sqrt{a}}$; somit sind ax^2+bx die beiden ersten Glieder des Quadrats von $x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}$.

Wir dürfen daher nur auf beiden Seiden $\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{b^2}{4a}$ addiren, um links ein vollständiges Quadrat zu bekommen. Wir erhalten so:

$$ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}=\frac{b^2}{4a}-c=\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

$$\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}$$

$$x\sqrt{a}=-\frac{b}{2\sqrt{a}}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}$$

und indem wir noch auf beiden Seiten durch $\sqrt{a}$ dividiren, kommt:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

woraus $$x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

und $$x' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Mit Hülfe dieser Formel können wir die Wurzeln einer quadratischen Gleichung angeben, ohne sie erst durch Division auf die Form $x^2+px+q=0$ zu bringen.

Beispiel. Sei $8x^2+33x-35=0$,

so ist $a=8$, $b=33$ und $c=-35$; daher

$$x = \frac{-33\pm\sqrt{33^2+4.8.35}}{2.8} = \frac{-33\pm\sqrt{1089+1120}}{16}$$

$$x = \frac{-33\pm\sqrt{2209}}{16} = \frac{-33\pm47}{16}$$

daher $$x' = \frac{-33-47}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

$$x'' = \frac{-33-47}{16} = \frac{-80}{16} = -5.$$

Die Rechnung nach dieser Formel ist jedoch durchaus nicht vortheilhafter, als die frühere, die sogar stets einfacher ist, sobald der Coeffizient von x eine gerade Zahl.

139. Untersuchung des Falles, in welchem der Coeffizient von x^2 unendlich klein wird.

Bei der Auflösung der quadratischen Gleichung $ax^2+bx+c=0$ haben wir in Nro. 132 gleich von Anfang durch a, in Nro. 138 aber am Schluss noch durch $\sqrt{a}$ dividirt. Wäre der Coeffizient a von x^2 wirklich $= 0$, so dürfte man überhaupt weder durch a, noch durch $\sqrt{a}$ dividiren, käme übrigens auch nicht in den Fall, es zu thun, weil alsdann das Glied mit x^2 ganz herausfiele und die Gleichung sich auf eine Gleichung 1sten Grades reduzirte.

Wenn dagegen der Coeffizient a von x^2 unendlich klein wird, so werden die beiden Wurzeln

$$x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x'' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

dann, da b^2-4ac sehr wenig von b^2 und $\sqrt{b^2-4ac}$ sehr wenig von

b verschieden ist, die eine von der Form $\frac{0}{0}$, die andere aber von der Form $\frac{-2b}{0}$, wobei jedoch unter 0 nicht die absolute Null, sondern eine unendlich kleine Zahl ω gedacht werden muss. Die letzte x'' wäre dann: $x'' = \frac{-b-b}{2\omega} = \frac{-2b}{2\omega} = \frac{-b}{\omega}$, welcher Quotient $= \infty$. Die Wurzel x'' unserer Gleichung wird also ∞, sobald a unendlich klein. Was die Wurzel x' anbelangt, so erscheint sie unter der Form der Unbestimmtheit; diese Uubestimmtheit ist aber nur scheinbar. Um sie zu entfernen, multipliziren wir Zähler und Nenner mit $-b-\sqrt{b^2-4ac}$, und bekommen dann:

$$x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$$

$$x' = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{-2a(b+\sqrt{b^2-4ac})} = \frac{4ac}{-2a(b+\sqrt{b^2-4ac})}$$

und wenn wir den gemeinschaftlichen Faktor $2a$ weglassen, so kommt

$$x' = -\frac{2c}{b+b} = -\frac{2c}{2b} = -\frac{c}{b}.$$

Die beiden Wurzeln sind also: $x' = -\frac{c}{b}$

und $x'' = \infty$.

140. Zerlegung eines Trinoms vom zweiten Grade in Faktoren des ersten Grades.

1. Fall. Hat das Trinom die Form x^2+px+q d. h. ist der Coeffizient des 1sten Gliedes $= 1$, so suchen wir es so zu transformiren, dass es als Differenz zweier Quadrate erscheint. Nun sind x^2+px bereits die beiden ersten Glieder des Quadrates von $x+\frac{p}{2}$; wir dürfen daher nur noch $\frac{p^2}{4}$ hinzufügen, um ein vollständiges Quadrat zu haben; damit aber der Werth des Trinoms unverändert bleibe, müssen wir $\frac{p^2}{4}$ auch wieder subtrahiren oder mit andern Worten: wir addiren $\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4}$, was $= 0$; dann kommt

$$x^2+px+q = x^2+px+\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q$$

$$= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)$$

$$= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2.$$

Nun haben wir die Differenz zweier Quadrate; diese ist zerlegbar in ein Produkt aus der Summe der Wurzeln in deren Differenz; die Wurzeln dieser Quadrate sind $x+\frac{p}{2}$ und $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$; daher ihre Summe $= x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ und ihre Differenz $= x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$; somit

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)$$

Jeder dieser beiden Faktoren kann als ein Binom ersten Grades aufgefasst werden, dessen erstes Glied $= x$. Vergleichen wir die zweiten Glieder $\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ und $\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ mit den Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2+px+q=0$, nämlich mit

$$x' = -\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

und

$$'' = -\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

so erkennen wir, dass der 2te Theil des ersten Faktors gerade $=-x''$ und der 2te Theil des 2ten Faktors gerade gleich $-x'$ ist. Wir haben daher das Resultat:

Jedes Trinom zweiten Grades von der Form x^2+px+q lässt sich in 2 Faktoren des ersten Grades zerlegen, deren erste Glieder $=x$, deren zweite Glieder aber die mit umgekehrtem Zeichen genommenen Wurzeln der quadratischen Gleichung sind, die sich aus der Annullirung des Trinoms ergibt.

Man könnte daher, um ein Trinom von der Form x^2+px+q in Faktoren des ersten Grades zu zerlegen, dasselbe $=0$ setzen, die Wurzeln der so erhaltenen Gleichung aufsuchen und sie successive von x subtrahiren. Die so erhaltenen Differenzen sind dann die gesuchten Faktoren. So wenn $x^2+12x+35$ in Faktoren des ersten Grades zerlegt werden sollte, so würde man die Gleichung bilden: $x^2+12x+35=0$, woraus folgt $x=-6\pm\sqrt{36-35}=-6\pm\sqrt{1}=-6\pm1$; also $x'=-5$ und $x''=-7$; somit sind $x-x'=x+5$ und $x-x''=x+7$ die beiden Faktoren und daher ist $x^2+12x+35=(x+5)(x+7)$ eine identische Gleichung.

Man könnte indessen eben so gut die Zerlegung direkt vornehmen, wie beim allgemeinen Trinom x^2+px+q. Da würde man die Summe der 2 ersten Glieder d. h. x^2+12x zu einem vollständigen Quadrat zu ergänzen suchen, indem man $6^2=36$ addiren und — um den Werth des Trinoms nicht zu stören, — wieder subtrahiren würde. Man bekäme so:

$$x^2+12x+35 = x^2+12x+36-36+35 = (x+6)^2-1.$$

Hier haben wir nun die Differenz zweier Quadrate, deren Wurzeln $x+6$ und 1 sind; daher

$$(x+6)^2-1 = (x+6+1)(x+6-1) = (x+7)(x+5).$$

Somit
$$x^2+12x+35 = (x+7)(x+5).$$

2. Fall: Ist der Coeffizient des 1sten Gliedes unsers Trinoms nicht $=1$, hat also das Trinom die Form ax^2+bx+c, so können wir zunächst a als gemeinschaftlichen Faktor absondern, also $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ setzen und nun in gleicher Weise, wie früher, den trinomischen Faktor $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ zerlegen. Es ist

$$\begin{aligned}
x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} &= x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a} \\
&= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right) \\
&= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right)^2 \\
&= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 \\
&= \left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)
\end{aligned}$$

Nun sind die beiden Faktoren wieder Binome, deren erste Glieder $=x$, während die 2ten Glieder $\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ und $\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ die mit umgekehrtem Zeichen genommenen Wurzeln der Gleichung $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ oder der mit ihr aequivalenten Gleichung $ax^2+bx+c=0$ sind. Das Produkt dieser beiden Faktoren gibt aber nicht das Trinom ax^2+bx+c, sondern bloss den $a$ten Theil desselben, nämlich $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ und man

hat daher dem Produkt jener beiden binomischen Faktoren noch den Faktor a beizusetzen, um das gegebene Trinom ax^2+bx+c zu erhalten, so dass

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$
$$= a(x-x'')(x-x')$$

wenn wir wieder mit x' und x'' die Wurzeln der Gleichung

$ax^2+bx+c=0$ bezeichnen.

Soll z. B. $12x^2-x-6$ in Faktoren des ersten Grades zerlegt werden, so wissen wir, dass

$12x^2-x-6 = 12(x-x')(x-x'')$, wenn x' und x'' die Wurzeln der Gleichung $12x^2-x-6 = 0$ bedeuten.

Nun $$12x^2-x-6 = 0$$
$$x^2-\tfrac{1}{12}x-\tfrac{1}{2} = 0$$
$$x = \tfrac{1}{24}\pm\sqrt{(\tfrac{1}{24})^2+\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{24}\pm\sqrt{\tfrac{1}{576}+\tfrac{1}{2}}$$
$$x = \frac{1}{24}\pm\sqrt{\frac{1+288}{576}} = \frac{1}{24}\pm\frac{\sqrt{289}}{24}$$
$$x = \tfrac{1}{24}\pm\tfrac{17}{24}.$$

Somit $$x' = \frac{1+17}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$
$$x'' = \frac{1-17}{24} = \frac{-16}{24} = -\frac{2}{3}$$

Somit $$x-x' = x-\tfrac{3}{4}$$
$$x-x'' = x+\tfrac{2}{3} \text{ und daher}$$
$$12x^2-x-6 = 12(x-\tfrac{3}{4})(x+\tfrac{2}{3})$$

oder, wenn wir behufs Entfernung der Brüche die Multiplikation mit $12 = 4 \,.\, 3$ dadurch ausführen, dass wir den ersten binomischen Faktor mit 4, den 2ten mit 3 multipliziren, so kommt

$$12x^2-x-6 = 12(x-\tfrac{3}{4})(x+\tfrac{2}{3}) = (4x-3)(3x+2).$$

Die wirkliche Ausführung der Multiplikation zeigt die Richtigkeit der Zerlegung.

141. Hat man ein Trinom x^2+px+q in seine Faktoren $x-x'$ und $x-x''$ des ersten Grades zerlegt, so ist $x^2+px+q = (x-x')(x-x'')$ eine identische Gleichung, gilt also für jeden Werth von x. Man kann daher die quadratische Gleichung

$x^2+px+q = 0$ auch ersetzen durch

$$(x-x')(x-x'') = 0\,.$$

welche sofort in die beiden Gleichungen ersten Grades

$$x-x' = 0$$
$x-x'' = 0$ zerfällt.

Wie man sich nach No. 140 der Auflösung der quadratischen Gleichungen bedienen kann, um ein Trinom 2ten Grades in Faktoren des ersten Grades zu zerlegen, so könnte man sich umgekehrt der Zerlegung des Trinoms zur Auflösung der quadratischen Gleichung bedienen. Sobald man diese Zerlegung auf irgend einem Wege zu Stande gebracht hat, ist die Lösung der quadratischen Gleichung auf die Auflösung zweier Gleichungen des ersten Grades zurückgeführt.

142. Bei der Auflösung der quadratischen Gleichung in No. 132 und 138 haben wir immer zwei Wurzeln gefunden. Es entsteht die Frage, ob eine solche Gleichung nicht mehr als zwei Wurzeln zulassen könne. Um diese Frage zu entscheiden, wollen wir für einen Augenblick annehmen, die Gleichung liesse ausser den Wurzeln x' und x'' noch eine dritte Wurzel x''' zu. Dann müsste die Gleichung durch jeden der 3 Werthe x', x'' und x''' verifizirt werden und man hätte daher die Relationen:

$$1.,\ x'^2+px'+q=0$$
$$2.,\ x''^2+px''+q=0$$
$$3.,\ x'''^2+px'''+q=0.$$

Indem wir die 2te und 3te Gleichung von der ersten subtrahiren, kommt

$$x'^2-x''^2+p(x'-x'')=0$$

und

$$x'^2-x'''^2+p(x'-x''')=0.$$

Dividiren wir die erste von diesen durch $x'-x''$, die letzte durch $x'-x'''$, so kommt

$$4.,\quad x'+x''+p=0$$
$$5.,\quad x'+x'''+p=0$$

woraus durch Subtraktion sich ergibt

$$x''-x'''=0$$

oder

$$x'''=x''.$$

Hätten wir die Gleichungen (1) und (3) von (2) subtrahirt, so würde man schliesslich gefunden haben

$$x'-x'''=0 \text{ oder } x'''=x'.$$

Jede Zahl x''', welche der Gleichung $x^2+px+q=0$ Genüge leistet, muss somit gleich einer der beiden Wurzeln x' und x'' sein. Die quadratische Gleichung lässt folglich nie mehr als zwei Wurzeln zu.

143. Wenn $x=a$ eine Wurzel ist der Gleichung $x^2+px+q=0$, so muss das Trinom x^2+px+q theilbar sein durch $x-a$. Dieser Satz ist eine unmittelbare Consequenz

von 140, nach welchem das Trinom $x^2+px+q = (x-x')(x-x'')$, wofern x' und x'' die Wurzeln der Gleichung $x^2+px+q=0$ bedeuten. Ein Produkt mehrerer Faktoren ist aber durch jeden seiner Faktoren theilbar; also auch x^2+px+q theilbar durch $x-a$, sobald a eine Wurzel der Gleichung $x^2+p+q=0$.

Uebrigens könnte man diesen Satz selbständig auch so nachweisen: Denken wir uns die Division von x^2+px+q durch $x-a$ ausgeführt, so werden wir einen gewissen Quotienten Q und einen allfälligen Rest R bekommen. Nun muss stets das Produkt aus dem Divisor in den Quotienten gleich dem Dividenden sein; also wäre

$$x^2+px+q = (x-a)Q+R$$

eine identische Gleichung, die für jeden Werth von x gilt. Setzt man nun $x=a$, so hat man

$$a^2+pa+q = R$$

d. h. der Rest ist das, was aus dem Trinom wird für $x=a$. Allein wenn a eine Wurzel, so ist $a^2+pa+q=0$; der Divisionsrest ist also dann = Null und somit x^2+px+q theilbar durch $x-a$.

Diskussion der Wurzeln.

144. Wir haben gesehen, dass die allgemeine Gleichung 2ten Grades stets auf die Form $x^2+px+q=0$ gebracht werden kann, deren Wurzeln sind:

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

wo p und q beliebige positive oder negative Zahlen bedeuten können. Um nun schon äusserlich erkennen zu lassen, ob die Coeffizienten positiv oder negativ seien, wollen wir mit p und q die absoluten Werthe derselben bezeichnen; dann sind folgende Fälle möglich:

1., $x^3+px+q=0$

2., $x^2-px+q=0$

3., $x^2+px-p=0$

4., $x^2-px-q=0$

Es ist nun von vorn herein klar, dass im ersten und zweiten Fall, wo das absolute Glied positiv ist, wir unter dem Wurzelzeichen eine Differenz bekommen, die sowol positiv, als Null, als negativ sein kann, während im 3ten und 4ten Fall das absolute Glied negativ ist, also auf der rechten Seite als positiv erscheint; und da $\frac{p^2}{4}$ als das Quadrat einer reellen Zahl nie nega-

tiv sein kann, so wird in diesen Fällen die Grösse unter dem Wurzelzeichen stets positiv sein, die Wurzeln x' und x'' werden daher immer reell bleiben. Imaginäre Wurzeln können also jedenfalls nur da vorkommen, wo das absolute Glied positiv ist d. h. im 1sten und 2ten Fall. Ob sie dann aber imaginär oder reell ausfallen, hängt von dem Grössenverhältniss zwischen p und q ab, wie wir gleich sehen werden.

1ster Fall. $x^2+px+q=0$, woraus folgt:

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Ueber Realität oder Imaginarität der Wurzeln entscheidet die unter dem Wurzelzeichen vorkommende Differenz $\frac{p^2}{4} - q$. Es kann nun sein

a., $\frac{p^2}{4} > q$

b., $\frac{p^2}{4} = q$

c., $\frac{p^2}{4} < q$.

a. Wenn $\frac{p^2}{4} > q$, so ist $\frac{p^2}{4} - q$ positiv, $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ reell; somit sind die beiden Wurzeln x' und x'' jedenfalls reell und zwar beide negativ; x'' besteht von vorn herein aus zwei negativen Theilen; $x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ aber besteht aus dem negativen Theil $-\frac{p}{2}$ und dem positiven $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, der dem absoluten Werthe nach kleiner ist als der erste; denn offenbar ist $\frac{p^2}{4} - q < \frac{p^2}{4}$ und daher $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ kleiner als $\sqrt{\frac{p^2}{4}}$ oder $\frac{p}{2}$; es ist somit auch die Wurzel x' negativ; die beiden Wurzeln x' und x'' sind also in diesem Fall reell und ungleich, beide negativ.

b. Ist $\frac{p^2}{4} = q$, so ist $\frac{p^2}{4} - q = 0$; somit $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 0$ und $x' = -\frac{p}{2}$, $x'' = -\frac{p}{2}$ d. h. $x' = x''$, beide negativ. Die

beiden Wurzeln werden also in diesem Fall einander gleich. Das ist auch leicht einzusehen; denn wenn $\frac{p^2}{4} = q$, so wird $x^2+px+q = x^2+px+\frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2$, also ein vollständiges Quadrat. Damit dieses Quadrat $= 0$ werde, muss die Wurzel desselben d. h. $x+\frac{p}{2} = 0$ oder $x = -\frac{p}{2}$ sein.

c. Ist endlich $\frac{p^2}{4} < q$, so wird $\frac{p^2}{4} - q$ negativ, $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ daher imaginär; die beiden Wurzeln x' und x'' bestehen dann aus einem reellen und einem imaginären Theil und zwar sind die reellen Theile $\left(-\frac{p}{2}\right)$ gleich, die imaginären gleich bis auf's Vorzeichen, so dass die eine Wurzel die Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, die andere die Form $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ hat. Bezeichnen wir nämlich die negative Differenz $\frac{p^2}{4} - q$ mit $-m^2$, um durch das Quadrat m^2 anzudeuten, dass $-m^2$ eine ausschliesslich negative Grösse bedeutet, so ist

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{-m^2}$$

$$x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{-m^2}.$$

Nun ist aber $\sqrt{-m^2} = \sqrt{m^2 . (-1)} = m\sqrt{-1}$; somit

$$x' = -\frac{p}{2} + m\sqrt{-1}$$

$$x'' = -\frac{p}{2} - m\sqrt{-1}.$$

Die beiden imaginären Wurzeln haben also wirklich die Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta\sqrt{-1}$. Man nennt solche imaginäre Ausdrücke k o n j u g i r t und sie haben die Eigenschaft, dass sowol ihre Summe, als ihr Produkt reell wird. Dass die Wurzeln unserer quadratischen Gleichung, wenn sie imaginär werden, nicht anders als k o n j u g i r t ausfallen können, ist übrigens begreiflich; denn ihre Summe muss gleich dem Coeffizienten von x mit umgekehrtem Zeichen und ihr Produkt gleich dem absoluten Gliede, also Summe und Produkt müssen reell sein, was nur bei solcher Zusammensetzung möglich ist. Bei der Summe nämlich heben sich die imaginären Theile auf; beim Produkt aber hat man:

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha-\beta\sqrt{-1}) = \alpha^2-(\beta\sqrt{-1})^2 = \alpha^2-(-\beta^2)$$
$$= \alpha^2+\beta^2.$$

Die Imaginarität der Wurzeln deutet übrigens auf eine Unmöglichkeit der Aufgabe hin. Man verlangt Werthe von x, für welche das Trinom $x^2+px+q=0$ werde. Wenn nun $\frac{p^2}{4}-q=-m^2$ oder $q=\frac{p^2}{4}+m^2$, so hat man $x^2+px+q=$ $x^2+px+\frac{p^2}{4}+m^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2$ d. h. das Trinom erscheint als Summe zweier Quadrate. Da jedes Quadrat einer reellen Zahl ausschliesslich positiv, so kann eine Summe mehrerer Quadrate anders nicht $=0$ werden, als wenn jedes einzeln $=0$. Da aber m nicht $=0$, so kann $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2$ nie $=0$ werden. Es ist daher nicht möglich, der Forderung $x^2+px+q=0$ bei diesem Grössenverhältniss zwischen p und q durch irgend einen reellen Werth von x zu genügen.

Würde z. B. verlangt, 14 in 2 solche Theile zu zerlegen, dass deren Produkt $=56$, so müsste, wenn wir den einen Theil mit x bezeichnen, der andere $=14-x$ sein und man hätte die Gleichung:

$$x(14-x)=56 \text{ oder}$$
$$-x^2+14x=56 \text{ oder}$$
$$x^2-14x=-56, \text{ woraus}$$
$$x=7\pm\sqrt{49-56}=7\pm\sqrt{-7}.$$

Die Werthe von x sind also imaginär und die Aufgabe selbst ist unmöglich. Wirklich tritt, wie wir in der Folge noch sehen werden, das Maximum für das Produkt der Theile einer Zahl dann ein, wenn die Theile einander gleich, hier also, wenn jeder Theil $=7$ ist, in welchem Fall das Produkt derselben $=49$ ist, also immer noch kleiner, als 56. Es ist daher gar nicht möglich, 14 in 2 solche Theile zu zerlegen, dass ihr Produkt grösser, als 49, etwa $=56$ sei.

2. Fall. $x^2-px+q=0$, woraus folgt:

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$
$$x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Hiebei kann wieder a., $\frac{p^2}{4}>q$

b., $\frac{p^2}{4} = q$

c., $\frac{p^2}{4} < q$ sein.

a. Ist $\frac{p^2}{4} > q$, so wird $\frac{p^2}{4} - q$ positiv, alo $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ reell und daher x' und x'' reell und zwar beide positiv; denn x' besteht aus 2 positiven Theilen, ist daher von vorn herein positiv; bei dem aus einem positiven und einem negativen Theil bestehenden Werth von x'' aber ist — wie oben nachgewiesen — der negative Theil $\left(-\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)$ dem absoluten Werthe nach kleiner als der positive; somit auch x'' positiv.

b. Ist $\frac{p^2}{4} = q$, so werden die beiden Wurzeln x' und x'' reell und gleich, nämlich jede $= \frac{p}{2}$.

c. Ist endlich $\frac{p^2}{4} < q$, so wird $\frac{p^2}{4} - q$ negativ, $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ daher imaginär; somit die beiden Wurzeln x' und x'' imaginär und wieder konjugirt.

3. Fall. Wenn $x^2 + px + q = 0$, so ist:

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \text{ und}$$

$$x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

Man sieht hier sogleich, dass die $\frac{p^2}{4} + q$ unter dem Wurzelzeichen nie weder gleich Null, noch negativ werden und die Gleichung daher weder gleiche reelle, noch imaginäre Wurzeln haben kann. Es ist somit $\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$ immer eine reelle Grösse und folglich müssen die Wurzeln $x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$ und $x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$ immer reell und ungleich sein. Was nun ihr Zeichen anbelangt, so ist ihr Produkt $= -q$, also negativ; folglich müssen sie einmal ungleiche Vorzeichen haben, die eine

positiv, die andere negativ sein; ihre Summe muss überdiess = dem Coeffizienten von x mit umgekehrtem Zeichen, also $= -p$ sein, was nur möglich, wenn die grössere Wurzel negativ ist. Das Gleiche könnten wir übrigens auch aus der Form der Wurzeln x' und x'' erkennen; da nämlich $\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$ gröser als $\sqrt{\frac{p^2}{4}}$ oder als $\frac{p}{2}$, so wird $-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$ einmal positiv sein, und diese positive Wurzel, die gleich dem Ueberschuss von $\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$ über $\frac{p}{2}$, ist dem absoluten Werthe nach offenbar kleiner, als

$$-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}.$$

4ter Fall. $x^2 - px - q = 0$

$$x' = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

$$x'' = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

Da auch hier die Grösse unter dem Wurzelzeichen weder Null, noch negativ werden kann, so wird die Gleichung weder gleiche reelle, noch imaginäre Wurzeln haben. Das Produkt der Wurzeln muss $= -q$, also negativ sein; daher müssen die Wurzeln einmal entgegengesetzte Zeichen haben; überdiess soll ihre Summe $= +p$, also positiv sein; daher wird die positive Wurzel dem absoluten Werthe nach die negative übertreffen. Uebrigens hätten wir das eben so gut aus den allgemeinen Werthen von a erkennen können. Es wird nämlich offenbar $\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{^2}{4}+q}$ grösser, als $\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$, da jene die Summe, diese aber die Differenz von $\frac{p}{2}$ und $\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$, und überdiess letztere negativ sein, da der negative Theil $-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$ dem absoluten Werthe nach grösser, als der positive $\frac{p}{2}$ ist.

145. Bedingung, unter welcher das Trinom ax^2+bx+c ein vollständiges Quadrat wird.

In der Diskussion von Nro. 144 fanden wir, dass x^2+px+q ein vollständiges Quadrat wird, sobald $q = \frac{p^2}{4}$; man hat dann $x^2+px+q=x^2+px+\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$. Die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2+px+q=0$ werden dann reell und jede $=-\frac{p}{2}$. Soll aber ax^2+bx+c ein vollständiges Quadrat werden, so sind ax^2+bx als die beiden ersten Glieder des Quadrats einer zweitheiligen Grösse zu betrachten, nämlich des Quadrates von $x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}$ (siehe Nro. 138). Es muss folglich c das Quadrat von $\frac{b}{2\sqrt{a}}$ sein. Die Bedingung also, unter welcher ax^2+bx+c ein vollständiges Quadrat wird, ist, dass

$$c=\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2=\frac{b^2}{4a} \text{ oder dass}$$
$$4ac=b^2.$$

Wirklich werden in diesem Falle die beiden Wurzeln

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

und

$$x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

der Gleichung $ax^2+bx+c=0$ einander gleich, nämlich jede $=-\frac{b}{2a}$, also die beiden binomischen Faktoren $= x+\frac{b}{2a}$ und somit

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Anwendung der quadratischen Gleichungen auf die Lösung von Aufgaben.

146. Aufgabe. Jemand, der nach seinem Alter gefragt wurde, antwortete: Bei meiner Geburt war meine Mutter 20 Jahre alt; wenn ich nun ihr Alter, in Jahren ausgedrückt, mit dem

meinigen multiplizire, so übertrifft das Produkt unser beider Alter zusammen um 2500 Jahre. Wie alt war er?

Auflösung: Bezeichnet x die Anzahl Jahre, die er zählt, so hat seine Mutter $20+x$ Jahre. Das Produkt $x(20+x)$ übertrifft nun die Summe beider Alter, nämlich $x+x+20$ oder $2x+20$, um 2500; daher die Gleichung:

$$x(20+x)=2x+20+2500$$
$$20x+x^2=2x+2520$$
$$x^2+20x-2x=2520$$
$$x^2+18x=2520$$
$$x=-9\pm\sqrt{81+2520}$$
$$x=-9\pm\sqrt{2601}=-9\pm51.$$

Daher $$x'=-9+51=42$$
$$x''=-9-51=-60.$$

Von diesen beiden Werthen entspricht die erste $x'=42$ unserer Aufgabe. Wenn er nämlich 42 Jahre zählt, so ist seine Mutter $42+20=62$ Jahre; das Produkt beider Alter ist $=62.42=2604$, die Summe aber $=62+42=104$; nun ist 2604 gerade um 2500 grösser als 104, wie es verlangt wird.

2te Aufgabe: Jemand kaufte einige Tücher zu gleichen Preisen für 60 Thlr.; wären der Tücher für eben das Geld 3 mehr gewesen, so wäre das Stück um 1 Thlr. wohlfeiler gekommen; wie viele waren es?

Auflösung: Gesetzt, er habe x Tücher gekauft, so kostet eines $\frac{60}{x}$ Thlr. Hätte er aber um die 60 Thlr. 3 Tücher mehr, also $x+3$ Tücher bekommen, so wäre das einzelne Tuch auf $\frac{60}{x+3}$ Thlr. gekommen und da dieser Preis um 1 Thlr. niedriger, als der vorige, so hat man die Gleichung:

$$\frac{60}{x}=\frac{60}{x+3}+1$$
$$60(x+3)=60x+x(x+3)$$
$$60x+180=60x+x^2+3x$$
$$x^2+3x=180$$
$$x=-\tfrac{3}{2}\pm\sqrt{\tfrac{9}{4}+180}=-\tfrac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9+720}{4}}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{72}}{2} = \frac{-3 \pm 27}{2}$$

$$x' = \frac{-3+27}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$x'' = \frac{-3-27}{2} = \frac{-30}{2} = -15.$$

Anmerkung. Auch hier kann wieder nur der positive Werth von x als Lösung gebraucht werden, indem eine negative Anzahl Tücher keinen Sinn hat. Will man indessen untersuchen, ob der negative Werth von x vielleicht auf eine verwandte Aufgabe hindeute, so darf man nur in der durch die Aufgabe gelieferten Gleichung x in $-x$ verwandeln und nachsehen, ob sich die Fassung der Aufgabe so abändern lasse, dass diese Gleichung ihr entspreche. Wenn das nicht der Fall ist, so muss der negative Werth als zur Aufgabe in gar keiner Beziehung stehend verworfen werden.

Wenn wir z. B. in der vorigen Gleichung

$$\frac{60}{x} = \frac{60}{x+3} + 1$$

x durch $-x$ ersetzen, so kommt

$$\frac{60}{-x} = \frac{60}{-x+3} + 1$$

oder

$$-\frac{60}{x} = -\frac{60}{x-3} + 1$$

oder

$$\frac{60}{x-3} = -\frac{60}{x} + 1$$

und diese Gleichung führt zu folgender Aufgabe:

Jemand kauft einige Tücher zu gleichen Preisen für 60 Thlr. Wären der Tücher 3 weniger gewesen, so hätte das einzelne Stück einen Thlr. mehr gekostet. Wie viele Tücher hat er gekauft?

Antwort: 15. In der That! Denn dann kostet ein Stück $\frac{60}{15} = 4$ Thlr.; hätte er aber 3 Tücher weniger, also bloss 12 bekommen um 60 Thlr., so würde jedes Stück $\frac{60}{12} = 5$ Thlr. d. h. einen Thaler mehr gekostet haben.

3. Aufgabe. Eine Zahl a so in zwei Theile zu zerlegen, dass ihr Produkt eine vorgeschriebene Grösse b habe.

Auflösung: Es sei x der eine dieser Theile, dann ist der

andere $= a - x$; ihr Produkt also $= x(a-x)$. Dieses Produkt soll nun $= b$ sein; wir haben also die Gleichung

$$x(a-x)=b$$
$$ax-x^2=b$$
$$x^2-ax=-b$$
$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$$
$$x'=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b} \text{ und } x''=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}.$$

Nehmen wir x' als den einen Theil, so ist der andere $=$

$$a-x'=a-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}, \text{also gerade} = x''$$

d. h. die beiden Wurzeln x' und x'' sind gerade die gesuchten Theile der Zahl a.

Aus der Form der Werthe von x erkennt man sogleich, dass die Aufgabe nur so lange möglich ist, als die Zahl b, der das Produkt der beiden Theile gleich sein soll, kleiner ist als $\frac{a^2}{4}$ oder höchstens $= \frac{a^2}{4}$. Sobald $b > \frac{a^2}{4}$, werden die Theile imaginär, die Aufgabe also unmöglich.

Wir haben also den Satz: Der höchste Werth, welchen das Produkt der beiden Theile einer Zahl haben kann, ist gleich dem Quadrat der Hälfte dieser Zahl.

147. Wir können diesen Satz auch unabhängig von der vorigen Aufgabe so nachweisen: Wenn a die zu theilende Zahl, so sind die beiden Theile entweder einander gleich oder nicht. Sind sie gleich, so ist jeder $= \frac{a}{2}$; sind sie ungleich, so ist der eine Theil grösser als die Hälfte, während der andere Theil um eben so viel kleiner ist als die Hälfte. Gesetzt also, der erste Theil wäre um x grösser als die Hälfte, also $= \frac{a}{2}+x$, so müsste der andere $= \frac{a}{2}-x$ sein; das Produkt der beiden Theile aber wäre $=\left(\frac{a}{2}+x\right)\left(\frac{a}{2}-x\right)=\frac{a^2}{4}-x^2$.

Dieses Produkt erscheint nun hier unter der Form einer

Differenz, deren Minuend $\frac{a^2}{4}$ konstant ist. Sie wird um so kleiner, je grösser x d. h. je mehr der eine Theil über und der andere unter der Hälfte liegt; je kleiner dagegen x, desto grösser wird das Produkt $\frac{a^2}{4} - x^2$ und sein Maximum erreicht dasselbe, wenn x am kleinsten, nämlich $= 0$ geworden. Dann ist jenes Produkt $= \frac{a^2}{4}$ d. h. $=$ dem Quadrat von der Hälfte der Zahl a. Je weniger also die beiden Theile von einander abstehen, desto grösser wird ihr Produkt und am grössten dann, wenn sie einander gleich und jeder also gleich der Hälfte der Zahl ist.

Wenn wir z. B. 15 zerlegen in 1 und 14, 2 und 13, 3 und 12, 4 und 11, 5 und 10, 6 und 9, 7 und 8, $7\frac{1}{2}$ und $7\frac{1}{2}$, so werden die Produkte der beiden Theile, nämlich $1 . 14$, $2 . 13$, $3 . 12$, $4 . 11$, $5 . 10$, $6 . 9$, $7 . 8$ und $7\frac{1}{2} . 7\frac{1}{2}$ immer grösser und das grösste ist $7\frac{1}{2} . 7\frac{1}{2} = 56\frac{1}{4}$.

Eben so kann man 20 in 2 Theile zerlegen, wie man will, nie wird ihr Produkt grösser als 10^2 oder 100 ausfallen können.

Gleichungen höherer Grade, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen.

148. Wenn eine Gleichung höheren Grades nur drei Arten von Gliedern hat, deren erstes die Unbekannte auf einer doppelt so hohen Potenz enthält als das zweite, während das 3te Glied ganz bekannt ist, so muss die Gleichung auf eine der beiden folgenden Formen sich bringen lassen:

$$1. \quad x^{2m} + px^m + q = 0$$

$$2. \quad ax^{2m} + bx^m + c = 0$$

die auch so geschrieben werden können:

$$1. \quad (x^m)^2 + p . x^m + q = 0$$

$$2. \quad a(x^m)^2 + b . x^m + c = 0.$$

Wenn wir daher x^m als Unbekannte betrachten und $= y$ setzen, so haben wir statt der Gleichung (1) die folgende:

$$y^2 + py + q = 0$$

woraus folgt: $$y = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

somit $$y' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

und $$y'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Nun ist $y = x^m$; daher hat man

1. $x^m = y'$ und $x = \sqrt[m]{y'} = \sqrt[m]{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$

2. $x^m = y''$ und $x = \sqrt[m]{y''} = \sqrt[m]{-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$

Die Gleichung (2) aber geht über in

$$ay^2 + by + c = 0,$$

woraus $$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

somit $$y' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Da nun wieder $x^m = y$, so hat man

1. $x^m = y'$ und $x = \sqrt[m]{y'} = \sqrt[m]{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

2. $x^m = y''$ und $x = \sqrt[m]{y''} = \sqrt[m]{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

Die Auflösung solcher Gleichungen ist also auf die Lösung einer quadratischen Gleichung und die Ausziehung der $m$ten Wurzel zurückgeführt. Da nun die $m$te Wurzel aus einer Grösse m Werthe hat, so wird die obige Gleichung selber $2m$ Wurzeln zulassen.

1. Beispiel: $x^4 - 89x^2 + 1600 = 0$

Wir setzen $x^2 = y$ und bekommen:

$$y^2 - 89y + 1600 = 0$$

Daher $$y = \frac{89}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{89}{2}\right)^2 - 1600} = \frac{89}{2} \pm \sqrt{\frac{89^2 - 6400}{4}}$$

$$y = \frac{89 \pm \sqrt{7921 - 6400}}{2} = \frac{89 \pm \sqrt{1521}}{2}$$

$$y = \frac{89 \pm 39}{2}.$$

Daher $y' = \frac{89+39}{2} = \frac{128}{2} = 64$

$y'' = \frac{89-39}{2} = \frac{50}{2} = 25$

Nun $x^2 = y'$; $x = \pm\sqrt{y'} = \pm\sqrt{64} = \pm 8$

$x^2 = y''$; $x = \pm\sqrt{y''} = \pm\sqrt{25} = + 5$

Also $+8, -8, +5$ und -5 sind die Wurzeln dieser Gleichung.

Es lässt sich nun $y^2-89y+1600$ zunächst in die Faktoren $y-64$ und $y-25$ zerlegen; also

$y^2-89y+1600 = (y-64)(y-25)$ oder

$x^4-89x^2+1600 = (x^2-64)(x^2-25)$

Allein $x^2-64 = (x+8)(x-8)$ und $x^2-25 = (x+5)(x-5)$

somit $x^4-89x^2+1600 = (x+8)(x-8)(x+5)(x-5)$.

2. Beispiel. $x^6-152x^3+3375 = 0$

Wir setzen $x^3 = y$, dann geht die Gleichung über in:

$y^2-152y+3375 = 0$, woraus folgt:

$y = 76\pm\sqrt{76^2-3375} = 76\pm\sqrt{5776-3375}$

oder $y = 76\pm\sqrt{2401} = 76\pm49$.

Daher $y' = 76+49 = 125$

$y'' = 76-49 = 27$.

Da nun $x^3 = y$, so wird

1. $x = \sqrt[3]{y'} = \sqrt[3]{125} = 5$

2. $x = \sqrt[3]{y''} = \sqrt[3]{27} = 3$

Es sind also einmal 5 und 3 zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung, die aber ausserdem noch 4 andere Wurzeln haben muss, weil jede der beiden Grössen $\sqrt[3]{125}$ und $\sqrt[3]{27}$ nicht bloss eine, sondern drei Werthe hat.

3. Beispiel. Sei $16x^8-1297a^4x^4+81a^8 = 0$ die gegebene Gleichung. Wir setzen $x^4 = y$, dann kommt:

$16y^2-1297a^4y+81a^8 = 0$

Daher $y = \frac{1297a^4 \pm\sqrt{(1297a^4)^2-4 \cdot 16 \cdot 81a^8}}{2 \cdot 16}$

$y = \frac{1297a^4\pm\sqrt{1682209a^8-5184a^8}}{32}$

$y = \frac{1297a^4\pm\sqrt{1677025a^8}}{32}$

$y = \frac{1297a^4\pm1295a^4}{32}$

Daher $y' = \frac{1297a^4 + 1292a^4}{32} = \frac{2592a^4}{32} = \frac{1296a^4}{16}$

$y'' = \frac{1297a^4 - 1295a^4}{32} = \frac{2a^4}{32} = \frac{a^4}{16}.$

Nun ist $x^4 = y$. Daher

$$x = \sqrt[4]{y'} = \sqrt[4]{\frac{1296\,a^4}{16}} = \pm\sqrt{\pm\sqrt{\frac{1296a^4}{16}}} = \pm\sqrt{\pm\frac{36a^2}{4}}$$

$= \pm\sqrt{\pm 9a^2}$; somit

1. $x = \pm\sqrt{+9a^2} = \pm 3a$
2. $x = \pm\sqrt{-9a^2} = \pm 3a\sqrt{-1}$.

Ferner ist $x = \sqrt[4]{y''} = \sqrt[4]{\frac{a^4}{16}} = \pm\sqrt{\pm\sqrt{\frac{a^4}{16}}} = \pm\sqrt{\pm\frac{a^2}{4}}$;

somit

1. $x = \pm\sqrt{+\frac{a^2}{4}} = \pm\frac{a}{2}$
2. $x = \pm\sqrt{-\frac{a^2}{4}} = \pm\frac{a}{2}\sqrt{-1}$.

Wir haben also für x folgende 8 Werthe gefunden:

1. $x = +3a$
2. $x = -3a$
3. $x = +3a\sqrt{-1}$
4. $x = -3a\sqrt{-1}$
5. $x = +\frac{1}{2}a$
6. $x = -\frac{1}{2}a$
7. $x = +\frac{1}{2}a\sqrt{-1}$
8. $x = -\frac{1}{2}a\sqrt{-1}$.

4tes Beispiel: $16x^{\frac{4}{3}} - 13a^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} + \frac{9}{4}a^{\frac{4}{3}} = 0$.

Wir können diese Gleichung zunächst schreiben:

$$16(x^{\frac{2}{3}})^2 - 13a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + \frac{9}{4}a^{\frac{4}{3}} = 0$$

und wenn wir nun $x^{\frac{2}{3}} = y$ setzen:

$$16y^2 - 13a^{\frac{2}{3}}y + \frac{9}{4}a^{\frac{4}{3}} = 0$$

woraus: $y = \frac{13a^{\frac{2}{3}} \pm \sqrt{(13a^{\frac{2}{3}})^2 - 4 \cdot 16 \cdot \frac{9}{4}a^{\frac{4}{3}}}}{2 \cdot 16}$

oder $y = \frac{13a^{\frac{2}{3}} \pm \sqrt{169a^{\frac{4}{3}} - 144a^{\frac{4}{3}}}}{32}$

$$y = \frac{13a^{\frac{2}{3}} \pm \sqrt{25a^{\frac{4}{3}}}}{32} = \frac{13a^{\frac{2}{3}} \pm 5a^{\frac{2}{3}}}{32}$$

Daher $y' = \frac{13a^{\frac{2}{3}} + 5a^{\frac{2}{3}}}{32} = \frac{18a^{\frac{2}{3}}}{32} = \frac{9a^{\frac{2}{3}}}{16}$

$y'' = \frac{13a^{\frac{2}{3}} - 5a^{\frac{2}{3}}}{32} = \frac{8a^{\frac{2}{3}}}{32} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{4}$

Nun war $x^{\frac{2}{3}} = y$; daher

$$x^{\frac{1}{3}} = \sqrt{y'} = \pm\sqrt{\frac{9a^{\frac{2}{3}}}{16}} = \pm\frac{3a^{\frac{1}{3}}}{4}$$

$$x^{\frac{1}{3}} = \sqrt{y''} = \pm\sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{4}} = \pm\frac{a^{\frac{1}{3}}}{2}.$$

Aus $x^{\frac{1}{3}} = \pm\frac{3}{4}a^{\frac{1}{3}}$ folgt: $x = (\pm\frac{3}{4}a^{\frac{1}{3}})^3 = \pm\frac{27}{64}a$

und aus $x^{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{2}a^{\frac{1}{3}}$ folgt: $x = (\pm\frac{1}{2}a^{\frac{1}{3}})^3 = \pm\frac{1}{8}a$.

Daher hat x die 4 Werthe:

$$x = \frac{27}{64}a \qquad x = +\frac{1}{8}a$$
$$x = -\frac{27}{64}a \qquad x = -\frac{1}{8}a.$$

Gleichungen des zweiten Grades mit zwei Unbekannten.

149. Haben wir zwei Gleichungen des 2ten Grades mit 2 Unbekannten, so können wir eine der beiden Unbekannten zwischen beiden Gleichungen eliminiren und kommen so auf eine Gleichung mit nur einer Unbekannten, die aber im Allgemeinen eine vollständige Gleichung 4ten Grades sein wird und welche wir daher mit den bisher uns bekannten Mitteln noch nicht zu lösen im Stande sind. Wir müssen uns also bei Auflösung zweier Gleichungen des 2ten Grades mit 2 Unbekannten auf diejenigen Fälle beschränken, in welchen die Endgleichung eine quadratische Form hat. Dass wirklich im Allgemeinen die durch Elimination erhaltene Gleichung mit einer Unbekannten eine vollständige Gleichung des 2ten Grades ist, wollen wir hier gleich nachweisen. Seien

$$1)\quad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$
$$2)\quad A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' = 0$$

unsere beiden Gleichungen, so könnten wir etwa die erste nach y auflösen und den so erhaltenen Werth in die 2te einsetzen. Indem wir die 1ste nach y ordnen, kommt

$$Ay^2 + (Bx + D)y + Cx^2 + Ex + F = 0$$

oder
$$y^2 + \left(\frac{Bx+D}{A}\right)y + \frac{Cx^2+Ex+F}{A} = 0,$$

woraus
$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm\sqrt{\left(\frac{Bx+D}{2A}\right)^2 - \frac{Cx^2+Ex+F}{A}}.$$

Wir erkennen hieraus, dass in dem Werth für y noch ein irrationaler Bestandtheil vorkommt, so dass die Substitution dieses Ausdruckes in die 2te Gleichung unbequem ausfiele. Wir können aber diese Schwierigkeit leicht umgehen, wenn wir aus den beiden Gleichungen (1) und (2) zuerst eine Gleichung ableiten, die in

Bezug auf eine der beiden Unbekannten nur vom 1sten Grade ist, indem wir entweder das Glied mit y^2 oder das mit x^2 eliminiren. Aus der so erhaltenen Combinationsgleichung lässt sich dann der Werth einer der beiden Unbekannten rational durch die andere ausdrücken. Um z. B. y^2 zu eliminiren, multipliziren wir die 1ste Gleichung mit A', die 2te mit A und subtrahiren die Resultate. Wir bekommen so:

$$(A'B - AB')xy + (A'C - AC')x^2 + (A'D - AD')y + (A'E - AE')x + A'F - AF' = 0$$

oder, indem wir zur Abkürzung $A'B - AB' = M$, $A'C - AC' = N$, $A'D - AD' = P$, $A'E - AE' = Q$, $A'F - AF' = R$ setzen:

$$(3) \quad Mxy + Nx^2 + Py + Qx + R = 0$$

hieraus berechnen wir y und finden:

$$(Mx + P)y + Nx^2 + Qx + R = 0$$

oder
$$y = -\frac{Nx^2 + Qx + R}{Mx + P}.$$

Diese Combinationsgleichung (3) darf an die Stelle einer der Gleichungen (1) und (2) treten; wir können daher statt (1) und (2) z. B. (1) und (3) benutzen. Setzen wir den aus (3) gezogenen Werth von y in die Gleichung (1), so kommt:

$$A\left(-\frac{Nx^2 + Qx + R}{Mx + P}\right)^2 + (Bx + D)\left(-\frac{Nx^2 + Qx + R}{Mx + P}\right) + Cx^2 + Ex + F = 0$$

oder, wenn wir die Nenner wegschaffen:

$$(4) \quad A(Nx^2 + Qx + R)^2 - (Bx + D)(Mx + P)(Nx^2 + Qx + R) + (Mx + P)^2(Cx^2 + Ex + F) = 0.$$

Bei Ausführung der hier angedeuteten Operationen liefert offenbar jeder der 3 Theile Glieder mit x^4, x^3, x^2, x und ohne x. Wenn wir daher schliesslich ordnen nach fallenden Potenzen von x, so erhalten wir eine Gleichung von der Form:

$$Sx^4 + S_1x^3 + S_2x^2 + S_3x + S_4 = 0 \text{ d. h.}$$

eine vollständige Gleichung 4ten Grades.

Wir müssen uns nun auf diejenigen Fälle beschränken, in welchen die Endgleichung entweder vom 2ten Grade (was immer der Fall, wenn von den beiden Gleichungen nur eine vom 2ten, die andere aber vom 1sten Grade ist) oder dann eine unvollständige Gleichung 4ten Grades von quadratischer Form ist.

1stes Beispiel: (1) $2x + 7y = 23a$
(2) $4x^2 + 3y^2 = 31a^2$.

Aus (1) folgt: $x = \frac{23a - 7y}{2}$

Diess in (2) gesetzt, gibt:

$$4\left(\frac{23a-7y}{2}\right)^2+3y^2=31a^2$$

$$4\left(\frac{529a^2-322ay+49y^2}{4}\right)+3y^2=31a^2$$

$$529a^2-322ay+49y^2+3y^2=31a^2$$

$$52y^2-322ay+498a^2=0$$

$$y^2-\frac{322a}{52}y+\frac{498a^2}{52}=0$$

$$y=\frac{161a}{52}\pm\sqrt{\left(\frac{161a}{52}\right)^2-\frac{498}{52}a^2}$$

$$y=\frac{161a}{52}\pm\sqrt{\frac{(161a)^2-52\,.\,498a^2}{52^2}}$$

$$y=\frac{161a\pm\sqrt{25921a^2-25896a^2}}{52}$$

$$y=\frac{161a\pm\sqrt{25a^2}}{52}=\frac{161a\pm5a}{52}$$

$$y'=\frac{161a+5a}{52}=\frac{166a}{52}=\frac{83a}{26}$$

$$y''=\frac{161a-5a}{52}=\frac{156a}{52}=3a$$

Nun ist $x=\frac{23a-7y}{2}$; daher

$$x'=\frac{23a-7y'}{2}=\frac{23a-7\,.\,\frac{83a}{26}}{2}=\frac{26\,.\,23a-7\,.\,83a}{2}$$

$$x'=\frac{598a-581a}{52}=\frac{17a}{52}$$

$$x''=\frac{23a-7y''}{2}=\frac{23a-7\,.\,3a}{2}=\frac{2a}{2}=a.$$

Wir haben somit für unsere 2 Gleichungen die 2 Auflösungen:

$$x'=\frac{17}{52}a \text{ und } x''=a$$

$$y'=\frac{83}{26}a \quad „ \quad y''=3a.$$

2tes Beispiel. Seien gegeben die 2 Gleichungen:

1) $10x^2+5xy+7y^2=232a^2$

2) $16x^2-3xy+9y^2=424a^2.$

Um x^2 zu eliminiren, multipliziren wir die erste Gleichung mit 8, die 2te mit 5 und bekommen:

$$80x^2+40xy+56y^2=1856a^2$$
$$80x^2-15xy+45y^2=2120a^2.$$

Durch Subtraktion: $55xy+11y^2=-264a^2$

oder $5xy+\ y^2=-\ 24a^2.$

Hieraus folgt $x = \frac{-24a^2-y^2}{5y} = -\frac{24a^2+y^2}{5y}$ (3).

Setzen wir diesen Werth in Gleichung (1), so kommt:

$$10\left(\frac{24a^2+y^2}{5y}\right)^2 - 5y\cdot\left(\frac{24a^2+y^2}{5y}\right)+7y^2 = 232a^2$$

oder $\frac{10(576a^4+48a^2y^2+y^4)}{25y^2} - (24a^2+y^2) + 7y^2 = 232a^2$

$$\frac{2(576a^4+48a^2y^2+y^4)}{5y^2} - (24a^2+y^2) + 7y^2 = 232a^2$$

$$1152a^4+96a^2y^2+2y^4-120a^2y^2-5y^4+35y^4 = 1160a^2y^2$$
$$32y^4-1184a^2y^2+1152a^4=0$$
$$8y^4-\ 296a^2y^2+\ 288a^4=0$$
$$y^4-\ 37a^2y^2+\ 36a^4=0\ (4).$$

Diese Endgleichung ist von quadratischer Form. Setzen wir nämlich $y^2=z$, so geht sie über in

$$z^2-37a^2z+36a^4=0,\ \text{woraus}$$

$$z = \frac{37a^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{37a^2}{2}\right)^2-36a^4}$$

$$z = \frac{37a^2\pm\sqrt{1369a^4-144a^4}}{2} = \frac{37a^2\pm\sqrt{1225a^4}}{2}$$

$$z = \frac{37a^2\pm35a^2}{2}.$$

Daher $z' = \frac{37a^2+35a^2}{2} = \frac{72a^2}{2} = 36a^2$

$$z'' = \frac{37a^2-35a^2}{2} = \frac{2a^2}{2} = a^2.$$

Also $y = \pm\sqrt{z'} = \pm\sqrt{36a^2} = \pm 6a$

und $y = \pm\sqrt{z''} = \pm\sqrt{a^2} = \pm a.$

Wir haben also für y folgende 4 Werthe gefunden:

1) $y_1=+6a$ 3) $y_3=+a$

2) $y_2=-6a$ 4) $y_4=-a.$

Jedem dieser 4 Werthe von y entspricht ein Werth von x,

den wir am einfachsten erhalten, wenn wir die Gleichung (3) benutzen.

$$x = -\frac{24a^2 + y^2}{5y}.$$

Wir bekommen so:

1) $y_1 = +6a$ gibt $x_1 = -\frac{24a^2+y_1^2}{5y_1} = -\frac{24a^2+36a^2}{5.6a} = -\frac{60a^2}{30a}$
$= -2a.$

2) $y_2 = -6a$ gibt $x_2 = -\frac{24a^2+y_2^2}{5y_2} = -\frac{24a^2+36a^2}{-30a} = +\frac{60a^2}{30a}$
$= +2a.$

3) $y_3 = +a$ gibt $x_3 = -\frac{24a^2+y_3^2}{5y_3} = -\frac{24a^2+a^2}{5a} = -\frac{25a^2}{5a}$
$= -5a.$

4) $y_4 = -a$ gibt $x_4 = -\frac{24a^2+y_4^2}{5y_4} = -\frac{24a^2+a^2}{-5a} = +\frac{25a^2}{5a}$
$= +5a.$

Wir haben daher folgende Lösungen:

1) $x_1 = -2a$ 2) $x_2 = +2a$ 3) $x_3 = -5a$ 4) $x_4 = +5a.$
$y_1 = +6a$ $y_2 = -6a$ $y_3 = +a$ $y_4 = -a.$

Quadratwurzel aus einem Binom von der Form $A \pm \sqrt{B}$.

150. Es ist

$$(\sqrt{11} \pm \sqrt{3})^2 = 11 + 3 \pm 2\sqrt{33} = 14 \pm 2\sqrt{33}$$
$$(7 \pm \sqrt{13})^2 = 49 + 13 \pm 14\sqrt{13} = 62 \pm 14\sqrt{13}$$
$$(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = a + b \pm 2\sqrt{ab}.$$

Wir haben hier durch Quadrirung eines Binoms, das zum Theil oder auch ganz aus Wurzelgrössen zweiten Grades zusammengesetzt ist, Ausdrücke erhalten, welche aus einem rationalen und einem irrationalen Theil bestehen und allgemein von der Form sind: $A \pm \sqrt{B}$. Umgekehrt können wir einen Ausdruck von der Form $A \pm \sqrt{B}$ als das Quadrat eines ganz oder wenigstens zum Theil irrationalen Binoms ansehen und es wird daher, so oft derselbe wirklich durch Quadrirung entstanden ist, auch wieder möglich sein, die Quadratwurzel aus einem solchen Ausdruck in die Summe oder Differenz zweier Wurzelgrössen zu zerlegen. Bezeichnen wir die zu suchenden Wurzelgrössen, deren Summe $= \sqrt{A+\sqrt{B}}$ oder deren Differenz $= \sqrt{A-\sqrt{B}}$ sein soll, mit $\sqrt{x}$ und $\sqrt{y}$, wo x und y als rational gedacht werden, so hat man:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

oder $$A \pm \sqrt{B} = x + y \pm 2\sqrt{xy}.$$

Soll diese Gleichung bestehen, so müssen die rationalen Theile auf beiden Seiten gleich und ebenso die irrationalen unter sich gleich sein. Da wir x und y als rational vorausgesetzt haben, so zerfällt die obige Gleichung in die zwei folgenden:

$$1) \quad A = x + y,$$
$$2) \quad \sqrt{B} = 2\sqrt{xy}.$$

Durch Quadrirung erhalten wir:

$$A^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$
$$B = 4xy.$$

Daher $$A^2 - B = x^2 + y^2 - 2xy$$

oder $$A^2 - B = (x - y)^2;$$

somit $$\sqrt{A^2 - B} = x - y.$$

Wir kennen nun die Summe und die Differenz der beiden Grössen x und y; daraus finden sich x und y selbst; denn wenn

$$x + y = A$$
$$x - y = \sqrt{A^2 - B}$$

so folgt $$2x = A + \sqrt{A^2 - B}$$

oder $$x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2};$$

ferner $$2y = A - \sqrt{A^2 - B};$$

folglich $$y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}; \text{ somit}$$

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \quad \text{(I)}$$

Die Ausdrücke für x und y fallen hier nur rational aus, wenn $A^2 - B$ ein vollständiges Quadrat, etwa $= C^2$; dann ist $\sqrt{A^2 - B} = \sqrt{C^2} = C$ und man hat dann $x = \frac{A + C}{2}$ und $y = \frac{A - C}{2}$; somit $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - C}{2}}$, wo es noch geschehen kann, dass die eine oder andere der Grössen unter dem Wurzelzeichen ein vollständiges Quadrat ist.

Ist dagegen $A^2 - B$ kein vollständiges Quadrat, so ist auch $A \pm \sqrt{B}$ nicht durch Quadrirung entstanden und die Gleichung (I) bleibt zwar noch richtig, bietet aber keine Vereinfachung, weil

alsdann $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ in zwei Ausdrücke von derselben Form zerlegt wird.

Beispiele.

1. $$\sqrt{17 + 2\sqrt{70}} = ?$$

Es ist $$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Hier ist nun $A = 17$

$\sqrt{B} = 2\sqrt{70};$

daher $A^2 = 289$

$B = 280,$

somit $A^2 - B = 9$

und $\sqrt{A^2 - B} = \sqrt{9} = 3$; daher

$$\sqrt{17 + 2\sqrt{70}} = \sqrt{\frac{17 + \sqrt{9}}{2}} + \sqrt{\frac{17 - \sqrt{9}}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{17 + 3}{2}} + \sqrt{\frac{17 - 3}{2}} = \sqrt{\frac{20}{2}} + \sqrt{\frac{14}{2}}$$
$$= \sqrt{10} + \sqrt{7}.$$

2tes Beispiel.

$$\sqrt{9x^2y^2 - 2xy^3 + 5y^4 + 4(3xy^2 - y^3)\sqrt{xy + y^2}} = ?$$

Hier ist $A = 9x^2y^2 - 2xy^3 + 5y^4$

$\sqrt{B} = 4(3xy^2 - y^3)\sqrt{xy + y^2}$

Daher $A^2 = 81x^4y^4 - 36x^3y^5 + 94x^2y^6 - 20xy^7 + 25y^8$

$B = 144x^3y^5 + 48x^2y^6 - 80xy^7 + 16y^8$

$A^2 - B = 81x^4y^4 - 180x^3y^5 + 46x^2y^6 + 60xy^7 + 9y^8$

$\sqrt{A^2 - B} = 9x^2y^2 - 10xy^3 - 3y^4.$

Daher $A + \sqrt{A^2 - B} = 9x^2y^2 - 2xy^3 + 5y^4 + 9x^2y^2 - 10xy^3 - 3y^4$

$= 18x^2y^2 - 12xy^3 + 2y^4,$

$$\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2} = \frac{18x^2y^2 - 12xy^3 + 2y}{2} = 9x^2y^2 - 6xy^3 + y^4$$

ferner $A - \sqrt{A^2 - B} = 9x^2y^2 - 2xy^3 + 5y^4 - (9x^2y^2 - 10xy^3 - 3y^4)$

$A - \sqrt{A^2 - B} = 8xy^3 + 8y^4$ und

$$\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2} = \frac{8xy^3 + 8y^4}{2} = 4xy^3 + 4y^4$$

Somit $\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{9x^2y^2 - 6xy^3 + y^4} + \sqrt{2xy^3 + 4y^4}$

$= \sqrt{(3xy - y^2)^2} + \sqrt{4y + yy^2(x^2)}$

$= 3xy - y^2 + 2y\sqrt{xy + y^2}.$

Wir haben somit :

$$\sqrt{9x^2y^2-2xy^3+5y^4+4(3xy^2-y^3)\sqrt{xy+y^2}} = 3xy-y^2+2y\sqrt{xy+y^2}.$$

Beispiele zur Uebung!

1) $47\frac{3}{4} + \frac{16-10x}{11} - \frac{6x-27}{5} = \frac{31+4x}{3} - \frac{5x+13}{8} - \frac{40-2x}{3}$

Lösung: $x = 17$.

2) $\frac{x}{8} + 7x - \frac{2x+5}{3} - \frac{3x+4}{14} = \frac{15+3x}{3} - \frac{12x-5}{7} + \frac{25x-8}{4}$

Lösung : $x = 8$.

3) $\frac{x}{4} + \frac{3x-16}{5x-9} = \frac{9x+11}{36}$

Lösung : $x = 9$.

4) 1. $2x+4y-3z+5t+u = 36$,
   2. $7x+5y+2z-3t+2u = 15$,
   3. $9x-2y+5z+t-3u = 29$,
   4. $5x+12y+3z+2t-4u = 62$,
   5. $x+2y+3z+4t+5u = 60$.

Lösung: $x=1$, $y=3$, $z=5$, $t=7$ und $u=2$.

5) 1. $x+y+z = 10$,
   2. $2x+3y+u = 24$,
   3. $3x+2z-t = 20$,
   4. $y+z+2t = 9$,
   5. $4z+2t-u = 6$.

Lösung: $x=7$, $y=2$ | $z=1$, $t=3$ und $u=4$.

6) $36x^2-47x+15=0$; Lösung: $x=\frac{5}{9}$, $x=\frac{3}{4}$.

7) $8x^2+33x=35$; Lösung: $x=\frac{7}{8}$, $x=-5$.

8) $84x^2+13x-21=0$; Lösung: $x=\frac{3}{7}$, $x=-\frac{7}{12}$.

9) $x^2-13x-264=0$; Lösung: $x - 24$, $x=-11$.

10) $10bcx^2+6b^2x = 5acx+3ab$; Lösung: $x = \frac{a}{2b}$ und $x = -\frac{3b}{5c}$.

11) $x^2+\frac{17}{18}x = \frac{5}{6}x+\frac{85}{108}$; Lösung: $x=\frac{5}{6}$ und $x=-\frac{17}{18}$.

12) Das Trinom $28x^2+x-15$ in Faktoren des ersten Grades zu zerlegen. Lösung: $(7x-5)(4x+3)$.

13) Ebenso das Trinom: $132x^2+139x+35$. Lösung: $12x+5$ und $11x+7$ sind die Faktoren.

14) Die 2 Gleichungen: $5x^2+2xy+y^2 = 41$
$25x^2-7xy+4y^2 = 94$ aufzulösen:

$x_1 = 2$	$x_2 = -2$	$x_3 = \frac{7}{\sqrt{52}}$	$x_4 = -\frac{7}{\sqrt{52}}$
$y_1 = 3$	$y_2 = -3$	$y_3 = \frac{37}{\sqrt{52}}$	$y_4 = -\frac{37}{\sqrt{52}}$

15) $\sqrt{a^4-4a^3b+5a^2b^2+b^4+2(a^2b-2ab^2)\sqrt{a^2+b^2}} = ?$

Antwort: $a^2-2ab+b\sqrt{a^2+b^2}$!

Siebenter Abschnitt.

Sätze über Zahlen und Wurzelgrössen.

151. Betrachten wir die Reihe der positiven ganzen Zahlen, so finden wir darin

1) solche, welche, wie z. B. 7, 11, 19 etc., nur durch die Einheit und durch sich selbst theilbar, daher auch nicht weiter in Faktoren zerlegbar sind und die absolute Primzahlen genannt werden,

2) solche, welche als Produkte von Primzahlen aufgefasst werden können, wie z. B. 8, 12, 15 etc. und die man zusammengesetzte Zahlen nennt.

Vergleicht man zwei beliebige ganze Zahlen unter sich, so sind entweder die Primfaktoren der einen sämmtlich verschieden von denen der andern, wie z. B. 35 und 18; sie heissen dann prim unter sich oder relativ prim; — oder es kommen einzelne Primfaktoren der einen auch in der andern vor, wie z. B. bei 18 und 30, welchen die Primfaktoren 2 und 3 gemeinschaftlich zukommen und die daher ausser 2 und 3 auch noch das Produkt 2 . 3 = 6 als gemeinschaftlichen Faktor enthalten.

Da jede ganze Zahl zu Divisoren die Einheit und sich selbst hat, bei einer einzigen Zahl diese beiden Divisoren aber zusammenfallen, nämlich bei der Einheit, so ist es nicht unpassend, die Einheit aus der Reihe der übrigen Zahlen auszuschliessen, wodurch man 3 Arten von Zahlen (ganzen) erhält:

1) die Einheit, welche nur einen Divisor hat,

2) die Primzahlen, die genau zwei Divisoren enthalten,

3) die zusammengesetzten Zahlen, welche mehr als zwei Divisoren zulassen.

152. Aufgabe: Die Primzahlen von 1 bis zu einer bestimmten Grenze, z. B. bis 100, zu finden.

Auflösung: Wir schreiben erst alle Zahlen von 1 bis 100 an:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.

Wir streichen nun zunächst alle Vielfachen von 2 als Nichtprimzahlen, also von 2 ausgehend je die 2te Zahl.

Die erste nicht gestrichene Zahl 3 muss eine Primzahl sein, da sie durch die vorangehende Primzahl 2 nicht theilbar ist. Wir streichen nun wieder die Vielfachen von 3, welche wir durch einfaches Abzählen finden können; wir dürfen nur, von 3 ausgehend, je die 3te Zahl streichen.

Die erste nicht gestrichene Zahl 5 ist, weil weder durch 2, noch durch 3 theilbar, eine Primzahl und wir streichen nun die sämmtlichen Vielfachen von 5, welche wieder durch blosses Abzählen gefunden werden können.

Die nächste nicht gestrichene Zahl 7 ist wieder eine Primzahl. Wir streichen ihre sämmtlichen Vielfachen, die wir erhalten, wenn wir, von 7 ausgehend, je um 7 fortschreiten. Ich behaupte nun: man braucht bei diesem Verfahren nur bis zu derjenigen Primzahl zu gehen, welche zunächst unter der Quadratwurzel aus der obern Grenze liegt. Wenn wir also die Primzahlen bis zu 400 aufsuchen wollten, so wäre $\sqrt{400} = 20$, die zunächst unter 20 liegende Primzahl ist 19; man müsste also noch die Vielfachen von 19 streichen. In unserm Fall sollen bloss die Primzahlen von 1 bis 100 bestimmt werden; die Quadratwurzel aus der obern Grenze 100 ist = 10 und die zunächst unter 10 liegende Primzahl ist 7. Wir müssen also noch die Vielfachen von 7 streichen und sind dann sicher, dass alle nicht gestrichenen Zahlen Primzahlen sind. In der That: wollte man z. B. noch die Vielfachen der nächsten Primzahl 11 in's Auge fassen, so wären diese bereits gestrichen als Vielfache von frühern Primzahlen, nämlich:

22 als Vielfaches von 2
33 „ „ „ 3
44 „ „ „ 2
55 „ „ „ 5
66 „ „ „ 2
77 „ „ „ 7
88 „ „ „ 2
99 „ „ „ 3

und ebenso sind die Vielfachen aller spätern Primzahlen, wie 17, 19 etc. bereits gestrichen.

Die gesuchten Primzahlen bis 100 sind demnach: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 73, 79, 83, 89 und 97.

153. Zerlegung einer Zahl in ihre Primfaktoren.

Um eine Zahl in Primfaktoren zu zerlegen, dividiren wir sie zunächst durch die kleinste Primzahl 2, den Quotienten wieder durch 2 und so fort, bis wir zu einem Quotienten kommen, der nicht mehr durch 2 theilbar ist. Diesen Quotienten dividiren wir durch die nächste Primzahl 3, den Quotienten wieder durch 3 u. s. f., bis wir zu einem Quotienten kommen, der nicht mehr durch 3 theilbar ist. Diesen neuen Quotienten dividiren wir dann durch die folgende Primzahl 5, den Quotienten wieder durch 5 und fahren in gleicher Weise fort, bis wir zu einem Quotienten kommen, der kleiner ist als die als Divisor verwendete Primzahl. Die verschiedenen Divisoren und der letzte nicht mehr theilbare Quotient bilden dann die Primfaktoren der gegebenen Zahl.

Sollte z. B. 151 in Primfaktoren zerlegt werden, so geht von den Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11 und 13 keine in 151 auf; der Quotient von 151 durch 13 fällt überdiess kleiner als 13 aus; daraus schliessen wir, dass 151 selber eine Primzahl sein muss. Denn gesetzt für einen Augenblick, es könnte eine der folgenden Primzahlen, wie 17, 19, 23 etc., in 151 aufgehen, so müsste der Quotient jedenfalls eine ganze Zahl, kleiner als der bei der Division durch 13 erhaltene Quotient $11\frac{8}{13}$; daher müsste er entweder eine der vorangehenden Primzahlen oder ein Produkt von solchen sein. Allein alle Primfaktoren unter 11 sind nach der Rechnung in 151 nicht enthalten; es ist folglich die Annahme, dass eine Primzahl grösser als 13 in 151 enthalten sein könnte, unzulässig d. h. 151 muss selber eine Primzahl sein.

Beispiel. Die Zahl 47880 in Primfaktoren zu zerlegen.

Wir scheiden durch einen vertikalen Strich die als Divisoren verwendeten Primzahlen von den Quotienten und bekommen so:

	47880
2	23940
2	11970
2	5985
3	1995
3	665
5	133
7	19

Die Primfaktoren von 47880 sind somit 2, 2, 2, 3, 3, 5, 7 und 19, so dass

$$47880 = 2.2.2.3.3.5.7.19 = 2^3.3^2.5.7.19.$$

2tes Beispiel. 5502 in Primfaktoren zu zerlegen.

	5502
2	2751
3	917
7	131

Also $5502 = 2.3.7.131$.

Der Quotient von 131 durch 11 wird noch etwas grösser, als 11, der von 131 durch 13 aber kleiner als der Divisor 13 und doch nicht ganz; somit ist 131 nicht weiter zerlegbar, also eine Primzahl.

154. Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Divisors zweier Zahlen.

Um den grössten gemeinschaftlichen Divisor zweier Zahlen zu bestimmen, dividiren wir die grössere der beiden Zahlen durch die kleinere, den Divisor durch den erhaltenen Rest, diesen Divisor wieder durch den neuen Rest, und fahren so lange fort, bis wir endlich zu einer Division kommen, die aufgeht. Alsdann ist der Divisor der letzten Division der grösste gemeinschaftliche Divisor.

Wenn z. B. zwischen 1275 und 345 der grösste gemeinschaftliche Divisor bestimmt werden sollte, so bekäme man folgende Divisionen:

1ste Division:	1275	:	345
	1035		3
	240		
2te „	345	:	240
	240		1
	105		
3te „	240	:	105
	210		2
	30		
4te „	105	:	30
	90		3
	15		
5te „	30	:	15
	30		2
	0		

Der Divisor 15 der letzten Division ist der gesuchte grösste gemeinschaftliche Divisor der beiden Zahlen 345 und 1275.

Um das nachzuweisen, schreiben wir so viele Gleichungen an, als Divisionen vorkommen, indem wir bei jeder dieser Divisionen den Dividenden gleich dem Produkt aus dem Divisor in den Quotienten mehr dem Rest setzen. Wir bekommen so:

1. $1275 = 345 \,.\, 3 + 240$
2. $345 = 240 \,.\, 1 + 105$
3. $240 = 105 \,.\, 2 + 30$
4. $105 = 30 \,.\, 3 + 15$
5. $30 = 15 \,.\, 2$

Die letzte Gleichung zeigt unmittelbar, dass 15 Divisor ist von 30. Betrachten wir Gleichung (4), so ist 30 und somit auch jedes Vielfache von 30 theilbar durch 15; ebenso ist 15 durch 15 theilbar; somit auch die Summe $30 \,.\, 3 + 15$ oder 105; denn wäre das nicht, so dürfte man nur beide Seiten der Gleichung durch 15 dividiren, wodurch man auf den Schluss käme, dass die Summe zweier Zahlen ($\frac{30 \cdot 3}{15}$ und $\frac{15}{15}$) gleich einem Bruch ($\frac{105}{15}$) sein müsste, was unmöglich. Es ist also 105 theilbar durch 15; also auch $105 \,.\, 2$ theilbar durch 15; ebenso ist 30 theilbar durch 15; daher jedes Glied der rechten Seite von Gleichung (3) theilbar durch 15; somit auch die linke Seite 240. Ist aber 240 durch 15 theilbar, so ist, da nach dem Vorangehenden auch 105 es ist, jedes Glied der rechten Seite von Gleichung (2) theilbar durch 15; somit auch die linke Seite 345. Hieraus folgt wieder, dass $345 \,.\, 3$ durch 15 theilbar sein muss und da auch 240 theilbar durch 15, so ist jedes Glied der rechten Seite von Gleichung (1) theilbar durch 15; also auch die linke Seite 1275. Es ist somit 15 jedenfalls gemeinschaftlicher Divisor von 1275 und 345.

Um noch zu zeigen, dass 15 auch der grösste gemeinschaftliche Divisor zwischen 1245 und 345 sei, nehmen wir für einen Augenblick an, es wäre d in 1275 und 345 als Faktor enthalten und zugleich $d > 15$; dann wäre in Gleichung (1) die linke Seite 1275, sowie das erste Glied der rechten Seite ($345 \,.\, 3$) unmittelbar nach dieser Annahme theilbar durch d; daraus würde folgen, dass auch das 2te Glied 240 durch d theilbar sein müsste. Denn wäre 240 nicht theilbar durch d, so bekäme man durch Division der Gleichung (1) durch d die Gleichung:

$$\frac{1275}{d} = \frac{345 \,.\, 3}{d} + \frac{240}{d} \quad \text{d. h.}$$

eine ganze Zahl $\left(\frac{1275}{d}\right)$ müsste gleich sein einer andern ganzen Zahl $\left(\frac{345 \cdot 3}{d}\right)$ mehr einem Bruch $\left(\frac{240}{d}\right)$, was unmöglich. Es würde also aus der Theilbarkeit von 1275 und 345 durch d die Theilbarkeit von 240 durch d sich ergeben. Ebenso geht aus Gleichung (2) hervor, dass wenn 345 und 240 durch d theilbar wären, auch 105 dadurch theilbar sein müsste. Ebenso würde mit Hülfe der Gleichung (3) aus der Theilbarkeit von 240 und 105 durch d die Theilbarkeit von 30 durch d und endlich mit Hülfe von Gleichung (4) aus der Theilbarkeit von 105 und 30 durch d diejenige von 15 durch d sich ergeben. Die Annahme, dass 1275 und 345 noch einen gemeinschaftlichen Faktor grösser als 15 haben könnten, würden uns also auf das unsinnige Resultat führen, dass 15 durch eine Zahl grösser als 15 theilbar sein müsste; sie ist daher unzulässig d. h. es kann kein grösserer gemeinschaftlicher Divisor zwischen 1275 und 345 existiren, als der Divisor 15 der letzten Division.

Zusatz. Ist in der obigen Kette von Divisionen der letzte Divisor $= 1$, so ist der grösste gemeinschaftliche Divisor beider Zahlen $= 1$; es sind folglich die Primfaktoren der einen sämmtlich verschieden von den Primfaktoren der andern d. h. die beiden Zahlen sind prim unter sich. Wir können daher auch sagen: Zwei Zahlen heissen relativ prim, sobald ihr grösster gemeinschaftlicher Divisor die Einheit ist.

155. Hat man den grössten gemeinschaftlichen Divisor mehrerer Zahlen a, b und c zu suchen, so bestimmt man erst den grössten gemeinschaftlichen Divisor δ zwischen a und b, sucht alsdann den grössten gemeinschaftlichen Divisor zwischen δ und der 3ten Zahl c. Wenn dieser $= \delta'$, so enthält δ' alle den beiden Zahlen δ und c gemeinschaftlichen Primfaktoren und da δ selber das Produkt ist der den 2 ersten Zahlen a und b gemeinschaftlichen Primfaktoren, so wird δ' nichts anders als das Produkt der den 3 ersten Zahlen a, b und c gemeinschaftlichen Primfaktoren sein.

In analoger Weise würde man den grössten gemeinschaftlichen Divisor von 4 und noch mehr Zahlen bestimmen.

Beispiel. Sei zwischen den Zahlen 1008, 264 und 104 der grösste gemeinschaftliche Divisor zu suchen.

Man findet: grösster gemeinschaftlicher Divisor zwischen 1008 und 264 ist = 24;
der grösste gemeinschaftliche Divisor zwischen 24 und 104 aber ist = 8; somit 8 der grösste gemeinschaftliche Divisor zwischen 1008, 264 und 104.

156. Ist ein Produkt ab zweier Faktoren theilbar durch eine Zahl d, die prim ist zu dem einen Faktor a, so muss nothwendig der andere Faktor b durch d theilbar sein.

Um das nachzuweisen, wollen wir mit dem Divisor d des Produktes und demjenigen Faktor desselben, zu welchem dieser Divisor als prim vorausgesetzt wurde, gerade so verfahren, als wenn wir deren grössten gemeinschaftlichen Divisor aufsuchen wollten d. h zuerst a durch d oder d durch a dividiren, je nachdem $a > d$ oder $d > a$, dann den Divisor durch den erhaltenen Rest r, diesen wieder durch den neuen Rest r' u. s. f., bis wir endlich zu dem Rest 1 gelangen. Gesetzt z. B. es geschehe diess schon nach der 4ten Division, und es seien q, q', q'' und q''' die Quotienten, r r', r'' und $r'''=1$ die entsprechenden Reste, so muss bei jeder dieser Divisionen das Produkt aus dem Divisor in den Quotienten mehr dem Rest gleich dem Dividenden sein. Wir haben daher:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & a = d \cdot q + r \\ 2) & d = r \cdot q' + r' \\ 3) & r = r' \cdot q'' + r'' \\ 4) & r' = r'' \cdot q''' + 1 \end{array}\right\} \text{I.}$$

Könnten wir nun zeigen, dass wenn ab durch d theilbar ist, auch die Produkte aus b in die successiven Reste r, r', r'' etc. durch d theilbar sein müssen, so wäre dann das Produkt aus dem letzten Rest 1 in b, d. h. b selber durch d theilbar. Indem wir nun die Gleichungen I mit b multipliziren, kommen die Produkte rb, $r'b$, $r''b$, $1 \cdot b$ oder b auf der rechten Seite zum Vorschein und wir haben dann:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & ab = dqb + rb \\ 2) & db = r'q'b + r'b \\ 3) & rb = r'q''b + r''b \\ 4) & r'b = r''q'''b + 1 \cdot b \end{array}\right\} \text{II.}$$

Nun ist nach der Voraussetzung die linke Seite (ab) der ersten Gleichung unter (II) durch d theilbar, ebenso das erste Glied dqb auf der rechten Seite; daher muss auch das 2te Glied rb

durch d theilbar sein, weil sonst die ganze Zahl $\left(\frac{ab}{d}\right)$ gleich sein müsste einer andern ganzen Zahl $\left(\frac{dqb}{d}\text{ oder } qb\right)$ mehr einem Bruch $\left(\frac{rb}{d}\right)$, was unmöglich ist. Wie aber rb durch d theilbar ist, so wird auch rbq' durch d theilbar sein, und da db es ebenfalls ist, so muss nach (2) auch $r'b$ durch d theilbar sein. Ebenso folgt aus Gleichung (3), dass $r''b$, und endlich aus Gleichung (4), dass $1 . b$ oder b durch d theilbar sein muss. Wenn daher ab durch d theilbar, während d zu a prim ist, so muss nothwendig der andere Faktor b durch d theilbar sein.

So ist z. B. $15 . 35$ theilbar durch die Zahl 7, welche prim ist zu dem einen Faktor 15, daher muss der andere Faktor 35 theilbar sein durch 7. Dagegen darf man keineswegs aus der Theilbarkeit eines Produktes zweier Zahlen durch eine dritte d ohne weiteres auf die Theilbarkeit eines Faktors durch d schliessen. So ist z. B. $18 . 35$ theilbar durch 15, ohne dass weder der eine, noch der andere Faktor durch 15 theilbar wäre; allein 15 ist auch weder zu 18, noch zu 35 prim, sondern hat mit dem ersten den Faktor 3, mit dem 2ten aber den Faktor 5 gemein.

157. Wir ziehen nun aus dem eben bewiesenen Satze folgende Consequenzen:

a. Wenn ein Produkt $abcd$ mehrerer Faktoren theilbar ist durch eine Primzahl p, so muss wenigstens einer der Faktoren durch diese Primzahl theilbar sein. Denn man kann $abcd$ zunächst als ein Produkt der beiden Faktoren abc und d auffassen. Wäre nun der eine Faktor d nicht theilbar durch die Primzahl p, so könnte er mit ihr auch keinen Faktor gemein haben, müsste also prim sein zu p; folglich müsste nach dem vorigen Satze der andere Faktor abc theilbar sein durch p. Allein es ist $abc = ab . c$ und wenn nun auch c nicht theilbar sein sollte durch die Primzahl p, so müsste wieder c prim sein zu p und folglich der andere Faktor ab theilbar durch d. Wenn endlich in dem Produkt ab auch b nicht theilbar wäre durch p, so müsste der Faktor a es sein. Also einer der Faktoren des Produktes $abcd$ muss jedenfalls theilbar sein durch die Primzahl p, sobald das Produkt dadurch theilbar

ist. Damit ist natürlich nicht gesagt, dass nicht gleichzeitig mehrere Faktoren des Produktes durch p theilbar sein könnten.

Es ergibt sich hieraus unmittelbar, dass eine Potenz durch eine Primzahl p nur theilbar sein kann, wenn die Basis derselben theilbar ist durch p; denn $a^m = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \ldots$ und wenn daher a^m theilbar durch die Primzahl p, so muss einer der Faktoren und somit a selber theilbar sein durch p.

b. *Soll ein Produkt mehrerer Primzahlen theilbar sein durch eine Primzahl p, so muss einer der Faktoren gleich sein dieser Primzahl.*

Denn nach a., kann ein Produkt $abcd$ mehrerer Faktoren durch eine Primzahl p nur dann theilbar sein, wenn ein Faktor durch p theilbar ist. Sind nun die Faktoren des Produktes $abcd$ selber Primzahlen, so kann irgend einer derselben durch die Primzahl p nicht anders theilbar sein, als wenn er gleich p ist.

c. *Ist eine Zahl N durch mehrere Zahlen a, b und c theilbar, die prim unter sich sind, so muss sie auch theilbar sein durch ihr Produkt.*

Denn da N theilbar ist durch a, so muss der Quotient $\frac{N}{a}$ ganz sein. Sei $\frac{N}{a} = Q$, so wird $N = aQ$. Nun ist ferner N theilbar durch b, also wird auch $a \,.\, Q$ theilbar sein durch b. Allein nach Voraussetzung ist b prim zu a, somit muss der andere Faktor Q theilbar sein durch b und daher $\frac{Q}{b}$ = einer ganzen Zahl Q' oder $Q = bQ'$. Ersetzen wir nun der Gleichung $N = aQ$ den Faktor Q durch $b \,.\, Q'$, so kommt:

$$N = ab \,.\, Q.$$

Nun ist endlich N theilbar durch c, folglich auch abQ' theilbar durch c. Allein c ist prim zu a und prim zu b, somit natürlich auch prim zu ihrem Produkt ab. Wir haben also in abQ' ein Produkt aus 2 Faktoren ab und Q', theilbar durch eine Zahl c, die prim ist zu dem einen Faktor ab; somit muss der andere Faktor Q' theilbar sein durch c d. h. $\frac{Q'}{c}$ wird = einer ganzen Zahl Q'' oder $Q' = cQ''$ sein. Führen wir das in die obige Gleichung ein, so kommt

$$N = abcQ''$$

d. h. N ist das Produkt aus abc und einer ganzen Zahl Q'', ist folglich theilbar durch abc, was zu beweisen war.

158. Eine Zahl N kann nur auf eine einzige Art in Primfaktoren zerlegt werden, oder mit andern Worten: Zwei Produkte aus Primfaktoren können einander nicht gleich sein, ohne dass die Faktoren des einen einzeln gleich sind den Faktoren des andern.

Es seien a, b, c und d die Primfaktoren von N. Gesetzt nun, es gäbe noch ein anderes Produkt $a'b'c'd'$ von Primfaktoren, das ebenfalls $= N$ wäre, so müsste also $abcd = a'b'c'd'$ sein. Nun ist $abcd$ theilbar durch a; daher muss das ihm gleiche Produkt $a'b'c'd'$ auch durch a theilbar sein. Da aber a', b', c' und d' sämmtlich Primzahlen, so kann ihr Produkt $a'b'c'd'$ nur dann durch a theilbar sein, wenn einer seiner Faktoren $= a$ ist. Wir wollen annehmen, es sei $a' = a$ und dann auf beiden Seiten durch a dividiren, so erhält man: $bcd = b'c'd'$. Da nun der Faktor b im ersten Produkt bcd enthalten ist, so muss auch das zweite Produkt $b'c'd'$ durch b theilbar sein, was wieder nur dann möglich, wenn einer seiner Faktoren $= b$; es sei $b' = b$. Indem wir dann die Gleichung $bcd = b'c'd'$ durch b dividiren, so erhalten wir $cd = c'd'$ und da das erste Produkt cd durch c theilbar ist, so muss auch $c'd'$ durch c theilbar und somit einer seiner Faktoren z. B. $c' = c$ sein, und wenn wir jetzt noch $cd = c'd'$ auf beiden Seiten durch c dividiren, finden wir endlich auch $d = d'$. Wir sehen also, dass wenn $abcd$ und $a'b'c'd'$ beides Produkte von Primfaktoren und einander gleich sind, nothwendig die Faktoren des einen einzelnen gleich den Faktoren des andern sein müssen.

159. Wenn eine Zahl N einmal in Primfaktoren zerlegt ist, so kann man auch leicht die Anzahl aller ihrer Divisoren, d. h. aller derjenigen Zahlen bestimmen, welche ohne Rest in N enthalten sind. Gesetzt, der Primfaktor a komme in N gerade m mal, der Primfaktor b gerade n mal, der Primfaktor c endlich gerade r mal vor, und es enthalte die Zahl N ausser den genannten keine andern Primfaktoren mehr, so ist $N = a^m b^n c^r$. Nun leuchtet jedenfalls ein, dass N nicht bloss theilbar ist durch

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4 \ldots a^m$$
$$b^0,\ b^1,\ b^2,\ b^3,\ b^4 \ldots b^n$$
$$c^0,\ c^1,\ c^2,\ c^3,\ c^4 \ldots c^r,$$

sondern überhaupt durch sämmtliche Produkte, die man er-

hält, wenn man successive die nullte, 1ste, 2te, 3te . . . bis *m*te Potenz von a mit der nullten, 1sten, 2ten, 3ten. . . bis *n*ten Potenz von b und diese noch mit der nullten, 1sten, 2ten. . . bis *r*ten Potenz von c multiplizirt; aber ebenso ist klar, dass ausser diesen Produkten die Zahl N keine andern Faktoren mehr haben kann, es wäre denn, dass sie sich noch auf eine andere Art in Primfaktoren zerlegen liesse, was nach Nro. 158 unmöglich ist. Somit sind die Divisoren von N nichts anderes, als die Glieder des Produktes $(1+a+a^2+a^3+\ldots a^m)(1+b+b^2+b^3+\ldots b^n)(1+c+c^2+c^3+\ldots c^r)$ und da die Glieder des zweiten Faktors andere Buchstabenfaktoren, als die Glieder des ersten enthalten, die Glieder des dritten wieder andere, als die Glieder der zwei ersten, so können im Produkt auch nicht zwei Glieder vorkommen, welche die nämlichen Primfaktoren mit den nämlichen Exponenten enthalten; folglich sind sämmtliche Glieder des Produktes verschieden und die Zahl N hat folglich gerade so viele verschiedene Divisoren, als jenes Produkt Glieder enthält. Der erste Faktor $(1+a+a^2+a^3+\ldots a^m)$ hat nun $m+1$, der zweite Faktor $(1+b+b^2+b^3+\ldots b^n)$ aber $n+1$ Glieder, folglich das Produkt der zwei ersten Faktoren $(m+1)(n+1)$ Glieder; indem man dieses Produkt noch mit dem $r+1$ Glieder haltenden dritten Faktor multiplizirt, erhält man ein Totalprodukt mit $(m+1)(n+1)(r+1)$ Gliedern, welche alle Divisoren von N sind. Es hat somit die Zahl N, welche $= a^m b^n c^r$, gerade $(m+1)(n+1)(r+1)$ verschiedene Divisoren.

Aber auch das Produkt

$$(1+a+a^2+a^3+\ldots a^m)(1+b+b^2+b^3+\ldots b^n)(1+c+c^2+\ldots c^r)$$

selber oder die Summe sämmtlicher Divisoren von N lässt sich durch direkte Ausführung dieser Multiplikation leicht bestimmen. Wir können sie aber auch durch eine kürzere Formel ausdrücken.

Es ist nämlich $\frac{a^m - b^m}{a-b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots . b^{m-1}$, woraus für $b = 1$ folgt

$\frac{a^m - 1}{a-1} = a^{m-1} + a^{m-2} + \ldots a + 1$. Ersetzt man m durch $m+1$, so kommt

$\frac{a^{m+1} - 1}{a-1} = a^m + a^{m-1} + a^{m-2} + \ldots a^2 + a + 1$. Ebenso ist der zweite Faktor $1+b+b^2+b^3+\ldots b^n = \frac{b^{n+1}-1}{b-1}$ und der dritte Faktor

$1+c+c^2+\ldots c^r = \frac{c^{r+1}-1}{b-1}$. Es ist folglich:

$$(1+a+a^2+\ldots a^m)(1+b+b^2+\ldots b^n)(1+c+c^2+\ldots c^r) = \left(\frac{a^{m+1}-1}{a-1}\right)\left(\frac{b^{n+1}-1}{b-1}\right)\left(\frac{c^{r+1}-1}{c-1}\right).$$

Wenn also $N = a^m b^n c^r$, so ist die Anzahl aller Divisoren von $N = (m+1)(n+1)(r+1)$, die Summe derselben aber

$$= \left(\frac{a^{m+1}-1}{a-1}\right)\left(\frac{b^{n+1}-1}{b-1}\right)\left(\frac{c^{r+1}-1}{c-1}\right).$$

1stes Beispiel. Die Zahl 600, in Primfaktoren zerlegt, ist $= 2^3 \,.\, 5^2 \,.\, 3^1 = 8 \,.\, 25 \,.\, 3$.
Die Divisoren von 600 werden daher die Glieder des Produktes sein: $(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2)(1+3) = (1+2+4+8)(1+5+25)(1+3)$.

Ihre Zahl ist

$$= (m+1)(n+1)(r+1) = (3+1)(2+1)(1+1) = 4 \,.\, 3 \,.\, 2 = 24.$$

Ihre Summe aber oder das obige Produkt selber ist gleich:

$$\left(\frac{2^{3+1}-1}{2-1}\right).\left(\frac{5^{2+1}-1}{5-1}\right).\left(\frac{3^{1+1}-1}{3-1}\right) = \left(\frac{2^4-1}{1}\right).\left(\frac{5^3-1}{4}\right).\left(\frac{3^2-1}{2}\right) = \left(\frac{16-1}{1}\right).\left(\frac{125-1}{4}\right).\left(\frac{9-1}{2}\right) = \frac{15}{1}.\frac{124}{4}.\frac{8}{2} =$$

$15 \,.\, 31 \,.\, 4 = 1860$. Dieses Resultat hätten wir auch durch direkte Multiplikation erhalten; denn $(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2)(1+3) = (1+2+4+8)(1+5+25)(1+3) = 15 \,.\, 31 \,.\, 4 = 1860$.

2tes Beispiel. Es ist $4667544 = 3^5 \,.\, 7^4 \,.\, 2^3$; daher die Zahl sämmtlicher Divisoren von $4667544 = (5+1)(4+1)(3+1) = 6 \,.\, 5 \,.\, 4 = 120$.

Die Summe dieser 120 Divisoren aber ist gleich:

$$\left(\frac{3^{5+1}-1}{3-1}\right).\left(\frac{7^{4+1}-1}{7-1}\right).\left(\frac{2^{3+1}-1}{2-1}\right) = \left(\frac{3^6-1}{2}\right).\left(\frac{7^5-1}{6}\right).\left(\frac{2^4-1}{1}\right)$$

$$= \frac{729-1}{2}.\frac{16807-1}{6}.\frac{16-1}{1} = \frac{728}{2}.\frac{16806}{6}.\frac{15}{1} =$$

$$364 \,.\, 2801 \,.\, 15 = 15293460.$$

Die Divisoren von 4667544 sind nämlich die Glieder des Produktes $(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5)(1+7+7^2+7^3+7^4)(1+2+2^2+2^3)$ $= (1+3+9+27+81+243)(1+7+49+343+2401)(1+2+4+8)$, welches 120 Glieder enthält und gleich 15293460 ist.

160. Wenn Zähler und Nenner eines Bruches $\frac{a}{b}$ prim unter sich sind, so lässt sich der Bruch nicht einfacher ausdrücken d. h. es gibt keinen mit klei-

nern Zahlen geschriebenen Bruch, der an Werth gleich $\frac{a}{b}$ sein könnte.

Denn gesetzt, $\frac{a}{b}$ könnte $= \frac{\alpha}{\beta}$ sein, wo $\alpha < a$ und $\beta < b$, so hätte man die Gleichung: $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$, woraus folgen würde $\frac{a\beta}{b} = \alpha$. Es müsste also $a\beta$ theilbar sein durch b. Nun ist aber nach Voraussetzung b prim zu dem einen Faktor a; folglich müsste nach Satz 156 der andere Faktor β theilbar sein durch b. Wir kämen also durch die Annahme, dass der Bruch $\frac{a}{b}$ noch durch kleinere Zahlen ausdrückbar wäre, auf den Schluss, dass die kleinere Zahl β durch die grössere b theilbar wäre, was unmöglich ist. Die Annahme, $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$, ist daher unzulässig.

So können die Brüche $\frac{18}{35}$, $\frac{39}{40}$, $\frac{27}{50}$ nie durch einfachere Zahlen ausgedrückt d. h. nicht weiter reduzirt werden.

161. Ein Bruch $\frac{a}{b}$ kann einem nicht reduzirbaren Bruche $\frac{\alpha}{\beta}$ nur dann gleich sein, wenn Zähler und Nenner des ersten Gleichvielfache der entsprechenden Theile des 2ten sind.

Sei also $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$, worin α prim zu β; dann folgt hieraus unmittelbar $a = \frac{\alpha b}{\beta}$ d. h. es muss αb theilbar sein durch β. Nun ist aber β prim zu α; somit muss b theilbar sein durch β. Sei $b = m\beta$; führen wir diess in die Gleichung $a = \frac{\alpha b}{\beta}$, so kommt: $a = \frac{\alpha m\beta}{\beta} = \alpha m = m\alpha$. Also wenn $b = m\beta$, so muss $a = m\alpha$ sein d. h. Zähler und Nenner des ersten Bruches $\frac{a}{b}$ sind $m$fache der entsprechenden Theile von $\frac{a}{b}$.

Zusatz: Sollen zwei nicht reduzirbare Brüche einander gleich sein, so müssen ihre Zähler und ihre Nenner einzeln gleich sein.

In der That! Eben haben wir gesehen, dass wenn $\frac{\alpha}{\beta}$ ein nicht reduzirbarer Bruch ist, die Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$ nach sich zieht: $a = m\alpha$ und $b = m\beta$. Ist nun auch a noch prim zu b, so ist ihr grösster gemeinschaftlicher Divisor $m = 1$ und die Gleichungen $a = m\alpha$, $b = m\beta$ gehen über in $a = \alpha$ und $b = \beta$, was z. b. w.

162. Die *m*te Wurzel aus einer ganzen Zahl kann nie ein Bruch sein, sondern ist entweder eine ganze Zahl oder dann inkommensurabel.

Gesetzt für einen Augenblick, die *m*te Wurzel aus einer ganzen Zahl A könnte gleich einem Bruch sein, so können wir diesen stets auf die einfachste Form $\frac{a}{b}$ uns zurückgeführt denken, wo a prim zu b. Es müsste dann $\left(\frac{a}{b}\right)^m = A$ oder $\frac{a^m}{b^m} = A$ sein. Da aber a prim zu b, so wird auch noch a^m prim zu b^m d. h. $\frac{a^m}{b^m}$ ein nicht reduzirbarer Bruch sein. Ein solcher kann aber nie gleich sein einer ganzen Zahl. Die Gleichung $\frac{a^m}{b^m} = A$ oder $\sqrt[m]{A} = \frac{a}{b}$ ist daher unmöglich, ausser wenn $b = 1$ und $A = a^m$ ist. Wenn also eine ganze Zahl A keine vollkommene *m*te Potenz ist, so kann $\sqrt[m]{A}$ weder eine ganze, noch eine gebrochene Zahl sein; sie ist folglich inkommensurabel.

163. Die *m*te Wurzel eines nicht reduzirbaren arithmetischen Bruches $\frac{A}{B}$ ist immer inkommensurabel, wenn nicht Zähler und Nenner vollkommene *m*te Potenzen sind.

Gesetzt, der nicht reduzirbare Bruch $\frac{a}{b}$ wäre die *m*te Wurzel von $\frac{A}{B}$, so wäre also $\sqrt[m]{\frac{A}{B}} = \frac{a}{b}$ und daher $\frac{A}{B} = \frac{a^m}{b^m}$. Da nun a und b unter sich prim sind, so müssen auch a^m und b^m prim sein, folglich ist $\frac{a^m}{b^m}$ ein nicht reduzirbarer Bruch. Allein nach der Voraussetzung ist auch $\frac{A}{B}$ ein nicht reduzirbarer Bruch;

folglich muss nach No. 161, Zusatz, $A = a^m$ und $B = b^m$ d. h. A und B selber müssen vollständige *m*te Potenzen sein; sind sie das nicht, so kann auch $\sqrt[m]{\frac{A}{B}}$ nicht gleich dem Bruch $\frac{a}{b}$ sein, sondern ist dann inkommensurabel.

So ist z. B. $\sqrt[5]{\frac{1024}{3125}}$ kommensurabel; denn 1024 und 3125 sind vollständige 5te Potenzen; man hat also: $\sqrt[5]{\frac{1024}{3125}} = \frac{\sqrt[5]{1024}}{\sqrt[5]{3125}}$ $= \frac{4}{5}$; dagegen sind $\sqrt[3]{\frac{27}{44}}$, $\sqrt{\frac{35}{64}}$, $\sqrt[3]{\frac{61}{85}}$ inkommensurabel, weil beim ersten der Nenner, beim zweiten der Zähler, beim dritten Zähler und Nenner keine vollständigen Potenzen sind.

164. Die ganzen positiven Potenzen einer Zahl a, die grösser als 1, nehmen mit den Exponenten fortwährend zu und können grösser gemacht werden, als jede noch so grosse Zahl.

Da $a > 1$, so wird $a \,.\, a$ oder $a^2 > 1 \,.\, a$, $a^3 > a^2$, $a^4 > a^3$ u. s. f. und allgemein $a^{m+1} > a^m$ sein. Um aber noch einzusehen, dass a^m grösser werden kann, als jede noch so grosse angebbare Zahl k, wollen wir den positiven Ueberschuss der Zahl a über die Einheit mit b bezeichnen, so dass also $a = 1 + b$ oder $a - 1 = b$, dann leuchtet jedenfalls ein, dass wenn wir die linke Seite dieser Gleichung mit einer Zahl $a > 1$ multipliziren, das Resultat grösser sein wird, als die unverändert gebliebene rechte Seite; es wird also $a^2 - a > b$, ebenso $a^3 - a^2 > b$, $a^4 - a^3 > b$ etc. sein, wobei jede Ungleichheit aus der vorhergehenden sich ergibt, indem man die linke Seite mit der Zahl a, die grösser als 1, multiplizirt. Wir haben also die Relationen:

$$\begin{aligned} a - 1 &= b \\ a^2 - a &> b \\ a^3 - a^2 &> b \\ a^4 - a^3 &> b \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ a^{m-1} - a^{m-2} &> b \\ a^m - a^{m-1} &> b. \end{aligned}$$

Es wird daher auch die Summe aller Glieder auf der linken Seite grösser sein, als die Summe der Glieder auf der rechten

Seite oder $a^m - 1 > b+b+b+\ldots$, wobei b gerade m mal vorkommt, also $a^m - 1 > mb$ oder $a^m > 1 + mb$.

Mag nun k noch so gross sein, so kann doch m immer so gewählt werden, dass $a^m > k$; man darf z. B. nur $mb = k$ oder $m = \frac{b}{k}$ setzen, so wird der Forderung schon mehr als Genüge gethan. Denn da $a^m - 1$ schon grösser als mb oder k, so wird a^m selber um so mehr grösser sein, als k.

165. Die ganzen positiven Potenzen einer Zahl a, die kleiner als 1, nehmen mit wachsenden Exponenten fortwährend ab und können der Null beliebig nahe gebracht werden.

Denn wenn $a < 1$, so ist $a^2 < a$, $a^3 < a^2$ u. s. f., allgemein $a^{m+1} < a^m$ d. h. die Potenzen von a werden um so kleiner, je grösser ihre Exponenten sind. Um nun noch zu zeigen, dass man sie so klein machen kann, als man nur will, denken wir uns Zähler und Nenner des als ächt vorausgesetzten Bruches a durch den Zähler dividirt, so nimmt er die Form $\frac{1}{a'}$ an, wo $a' < 1$. Es wird daher $a^m = \frac{1}{a'^m}$. Da nun $a' < 1$, so wird nach dem vorigen Satze a'^m mit wachsendem m immer grösser und man kann m so wählen, dass a'^m grösser wird als jede noch so grosse Zahl k. Ist aber $a'^m > k$, so wird $\frac{1}{a'^m}$ oder a^m dann **kleiner** sein als $\frac{1}{k}$, wie klein auch $\frac{1}{k}$ sein mag.

166. Die Wurzeln aus Zahlen grösser als 1 nehmen mit wachsenden Indices fortwährend ab und können der Einheit beliebig nahe gebracht, nie aber ihr gleich oder kleiner als sie gemacht werden.

Sei $a > 1$, so wird behauptet:

1. $\sqrt[3]{a} < \sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a} < \sqrt[3]{a}$, ... $\sqrt[m+1]{a} < \sqrt[m]{a}$.
2. $\sqrt[m]{a}$ könne nie $= 1$ und nie kleiner als 1 werden.
3. Die Differenz $\sqrt[m]{a} - 1$ könne kleiner gemacht werden, als jede noch so kleine Zahl.

Um die erste Behauptung zu erweisen, verwandeln wir $\sqrt[m+1]{a}$ und $\sqrt[m]{a}$ in Wurzelgrössen mit gleichen Indices. Es ist

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m(m+1)]{a^{m+1}} \text{ und}$$
$$\sqrt[m+1]{a} = \sqrt[m(m+1)]{a^m}$$

Da nun $a > 1$, so wird $a^{m+1} > a^m$ und somit $\sqrt[m(m+1)]{a^{m+1}}$ oder $\sqrt[m]{a}$ grösser sein, als $\sqrt[m(m+1)]{a^m}$ oder als $\sqrt[m+1]{a}$.

Dass, wenn $a > 1$, $\sqrt[m]{a}$ nie $= 1$ und nie kleiner als 1 werden kann, ist ebenfalls leicht zu erkennen. Denn wäre $\sqrt[m]{a} = 1$, so müsste auch $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = 1$ d. h. $a = 1$, was gegen die Voraussetzung. Wäre aber $\sqrt[m]{a} < 1$, so müsste auch $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m$ oder a kleiner als 1 sein, was der Voraussetzung noch mehr widerspricht. Es kann also, wenn $a > 1$, $\sqrt[m]{a}$ weder $= 1$, noch kleiner als 1 werden.

Um endlich zu zeigen, dass man es stets in seiner Gewalt hat, m so zu wählen, dass $\sqrt[m]{a}$ beliebig wenig von 1 verschieden ausfällt, bezeichnen wir mit β eine sehr kleine Zahl, dann wird $1 + \beta$ eine sehr wenig von 1 verschiedene Zahl bedeuten, die aber doch grösser ist als 1. Nach 164 kann man aber m stets so wählen, dass $(1 + \beta)^m$ grösser wird, als jede noch so grosse Zahl k; also kann, was auch a sein mag, jedenfalls m so gewählt werden, dass $(1+\beta)^m > a$ oder $1+\beta > \sqrt[m]{a}$. Es liegt somit $\sqrt[m]{a}$ noch **unter** $1 + \beta$ und doch **über** 1, ist daher von 1 um weniger als um β verschieden.

167. **Die Wurzeln aus Zahlen kleiner als 1 nehmen mit wachsenden Indices fortwährend zu, bleiben jedoch stets unter der Einheit, der sie beliebig nahe gebracht werden können.**

Sei $a < 1$, so behaupten wir zunächst, $\sqrt[5]{a} > \sqrt[4]{a}$, $\sqrt[7]{a} > \sqrt[6]{a}$, allgemein : $\sqrt[m+1]{a} > \sqrt[m]{a}$. Bringen wir $\sqrt[m+1]{a}$ und $\sqrt[m]{a}$ wieder auf den gleichen Index, so ist $\sqrt[m+1]{a} = \sqrt[m(m+1)]{a^m}$ und $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m(m+1)]{a^{m+1}}$. Da nun $a < 1$, so ist $a^m > a^{m+1}$; somit auch $\sqrt[m(m+1)]{a^m}$ oder $\sqrt[m+1]{a}$ grösser als $\sqrt[m(m+1)]{a^{m+1}}$ oder als $\sqrt[m]{a}$. Es

werden also die Wurzeln aus a mit wachsenden Indices immer grösser. Sie bleiben jedoch stets kleiner als 1. Denn gesetzt, es könnte $\sqrt[m]{a} = 1$ oder grösser als 1 werden, so müsste $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m =$ oder $> 1^m$ d. h. gleich 1 oder grösser als 1 werden, was der Voraussetzung widerspricht. Dagegen kann man, wenn a noch so klein sein sollte, doch stets m so wählen, dass $\sqrt[m]{a}$ beliebig nahe an 1 kommt. Denn wenn wieder β eine sehr kleine Zahl, so ist $1 - \beta < 1$; daher kann man m stets so wählen, dass $(1-\beta)^m$ kleiner wird als jede noch so kleine Zahl, also auch so, dass $(1-\beta)^m < a$ und somit $1 - \beta < \sqrt[m]{a}$. Es ist daher dann $\sqrt[m]{a} > 1 - \beta$, zugleich aber auch $\sqrt[m]{a} < 1$; somit liegt $\sqrt[m]{a}$ dann zwischen 1 und $1 - \beta$, ist somit von der Einheit um weniger als um β verschieden, wie klein auch β sein mag.

Zusatz. Aus den Sätzen 166 und 167 folgt, dass die Einheit die Grenze bildet, welche die Wurzeln aus Zahlen grösser als 1 von den Wurzeln aus Zahlen kleiner als 1 scheidet, und der sich die ersten von oben, die letzten von unten mit wachsenden Indices ohne Ende nähern, ohne sie jemals zu erreichen.

168. Bezeichnet a irgend eine positive, von der Einheit verschiedene Zahl und lässt man x in ununterbrochener Aufeinanderfolge die Reihe der rationalen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so muss a^x von Null an bis zu $+\infty$ in der Art sich ändern, dass die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Werthe von a^x kleiner wird, als jede noch so kleine Zahl.

Wir unterscheiden hier 2 Fälle. Es kann $a > 1$ oder $a < 1$ sein.

1. Fall: $a > 1$.

Bezeichne m eine sehr grosse positive Zahl, so wollen wir dem x successive die Werthe geben:

$$0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \ldots \frac{m}{m}, \frac{m+1}{m}, \frac{m+2}{m}, \ldots 2, \frac{2m+1}{m} \ldots 3, \frac{3m+1}{m} \ldots (1)$$

bis $+\infty$. Dann nimmt a^x successive die Werthe an:

$$a^0, a^{\frac{1}{m}}, a^{\frac{2}{m}}, a^{\frac{3}{m}} \ldots a^{\frac{m}{m}}, a^{\frac{m+1}{m}}, a^{\frac{m+2}{m}} \ldots\ldots\ldots a^{+\infty} \quad (2).$$

Die Exponenten von a sind hier wachsende positive gebrochene Zahlen. Wenn wir aber $a^{\frac{1}{m}}$ als Basis betrachten, so können wir Reihe (2) auch so schreiben:

$$\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^0, \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^1, \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^2, \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^3 \ldots \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^m, \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{m+1} \ldots \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{m.\infty} \quad (3)$$

Da nun $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$ für $a > 1$ stets grösser als 1 bleibt, wie gross auch m sein mag (Satz 166), so haben wir jetzt positive ganze Potenzen einer Zahl, die grösser als 1; sie nehmen also nach Satz 164 mit wachsenden Exponenten fortwährend zu und können jede Grenze überschreiten; für $x = m.\infty = \infty$ wird auch $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{m.\infty}$ oder a^{∞} unendlich gross. Es nimmt somit a^x mit positiv wachsendem x beständig zu und wird ∞, sobald $x = \infty$. Daher bleibt nur noch zu zeigen, dass die Differenz zweier aufeinander folgenden Werthe von a^x kleiner gemacht werden kann, als jede noch so kleine Zahl. Bezeichnet $a^{\frac{n}{m}}$ irgend einen der Werthe von a^x, so wird der darauf folgende $= a^{\frac{n+1}{m}}$, ihre Differenz daher

$$a^{\frac{n+1}{m}} - a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n}{m}}\left(a^{\frac{1}{m}} - 1\right) = a^{\frac{n}{m}}\left(\sqrt[m]{a} - 1\right) \text{ sein.}$$

Nun bleibt für $a > 1$ $\sqrt[m]{a}$ stets grösser als 1 und man kann m so wählen, dass $\sqrt[m]{a}$ beliebig nahe an 1 kommt. Denken wir uns m so gewählt, dass $\sqrt[m]{a} - 1$ kleiner wird als $\frac{\omega}{a^{\frac{n}{m}}}$, so wird $a^{\frac{1}{m}}\left(\sqrt[m]{a} - 1\right)$ kleiner als $a^{\frac{n}{m}} \cdot \frac{\omega}{a^{\frac{n}{m}}}$ d. h. kleiner als ω. Man hat es also schon, wenn x die Reihe der kommensurabeln Werthe durchläuft, in seiner Gewalt, die Aenderuug des a^x beliebig klein zu machen.

Geben wir nun dem x die Werthe:

$$0, -\frac{1}{m}, -\frac{2}{m}, -\frac{3}{m} \ldots -\frac{m}{m}, -\frac{m+1}{m} \text{ etc. } \ldots\ldots -\infty,$$

so nimmt a^x die Werthe an:

$$a^0, a^{-\frac{1}{m}}, a^{-\frac{2}{m}}, a^{-\frac{3}{m}}, a^{-\frac{4}{m}} \ldots a^{-\frac{m}{m}}, a^{-\frac{m+1}{m}} \ldots\ldots a^{-\infty}$$

oder

$$1, \frac{1}{a^{\frac{1}{m}}}, \frac{1}{a^{\frac{2}{m}}}, \frac{1}{a^{\frac{3}{m}}}, \ldots \frac{1}{a^{\frac{m}{m}}}, \frac{1}{a^{\frac{m+1}{m}}} \ldots\ldots \frac{1}{a^{\infty}}$$

Die Nenner dieser Brüche nehmen in stetiger Folge zu von

1 an bis zu $+\infty$; daher werden die Brüche selber, welche die reziproken Werthe ihrer Nenner sind, beständig abnehmen von $\frac{1}{1}$ an bis zu $\frac{1}{a^\infty}$. Wenn man also x variiren lässt von 0 an bis zu $+\infty$, so geht a^x von 1 bis $+\infty$, und wenn x von 0 an bis zu $-\infty$ läuft, so ändert sich a^x von 1 an bis zu Null, welch' letztere Grenze jedoch nicht erreicht wird. Lässt man daher x in stetiger Folge die Grössenzustände von $-\infty$ bis 0 und von 0 bis $+\infty$ durchlaufen, so läuft a^x von 0 bis 1 und von 1 bis $+\infty$.

2ter Fall: $a < 1$.

Wir denken uns Zähler und Nenner des ächten Bruches a durch den Zähler dividirt, so nimmt a die Form $\frac{1}{a'}$ an, wo $a' > 1$; dann ist $a^x = \left(\frac{1}{a'}\right)^x = \frac{1}{a'^x}$.

Lässt man nun hier x von $-\infty$ bis $+\infty$ wachsen, so nimmt a'^x nach dem eben behandelten 1sten Fall beständig zu von 0 bis zu $+\infty$, somit wird $\frac{1}{a'^x}$ variiren von $\frac{1}{0}$ bis $\frac{1}{+\infty}$ d. h. von ∞ an bis zu Null, welch letzte Grenze nicht erreicht wird. Dass auch hier die Aenderung des a^x beliebig klein gemacht werden kann, geht unmittelbar aus dem Vorigen hervor.

Von den inkommensurabeln Zahlen.

169. Nimmt man mit positiven ganzen Zahlen irgend eine der direkten Operationen (Addition, Multiplikation oder Potenzirung) vor, so ist das Resultat immer wieder eine positive ganze Zahl; man bleibt also stets in der Reihe der positiven ganzen Zahlen. Dagegen führen uns die indirekten Operationen bei Aufhebung gewisser Beschränkungen auf neue Zahlformen und zwar die Subtraktion auf die negativen, die Division auf die gebrochenen und die Wurzelausziehung auf die inkommensurabeln und die imaginären Zahlen.

In der That liefert uns die Gleichung $c - b = a$ in der Differenz a nur so lange eine positive ganze Zahl, als die Gleichung $c - b = a$ aus der Gleichung $c = a + b$ abgeleitet, d. h. c grösser als b gedacht wird. Hebt man diese Beschränkung auf d. h. gestattet man, dass der Subtrahend b auch grösser als der Minuend c werde, so kommen wir auf die negativen Zahlen. Ebenso führt uns

die aus $ab=c$ abgeleitete Gleichung $\frac{c}{b} = a$ auf gebrochene Zahlen, sobald man die Beschränkung aufhebt, dass die 2te Gleichung aus der ersten entstanden d. h. c ein Vielfaches von b sein müsse.

Endlich folgt aus der Gleichung $a^b=c$ die 2te: $a = \sqrt[b]{c}$ und auch hier bleibt das Resultat $\sqrt[b]{c}$ oder a so lange eine positive ganze Zahl, als die 2te Gleichung wirklich aus der ersten entstanden d. h. c als ganze Potenz der positiven ganzen Zahl a gedacht wird. Lässt man dagegen diese Beschränkung fallen, wählt also für c eine beliebige positive ganze Zahl, so wird $\sqrt[b]{c}$ nicht mehr ausdrückbar durch eine positive ganze oder gebrochene Zahl (No. 162) und heisst dann inkommensurabel. Wir werden daher in der Folge inkommensurabel jede Zahl nennen, welche sich weder durch die Einheit, noch durch Theile der Einheit genau ausdrücken lässt, während umgekehrt jede durch die Einheit oder durch Theile der Einheit ausdrückbare Zahl kommensurabel genannt wird und stets als Quotient zweier ganzen Zahlen darstellbar ist.

Geben wir endlich in $\sqrt[b]{c}$ dem c auch negative Werthe, so kommen wir, so oft der Wurzelindex b eine gerade Zahl ist, auf imaginäre Grössen.

170. Es ist ohne weiteres einleuchtend, dass eine inkommensurable Zahl α mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit ausgedrückt werden kann. Denken wir uns dieselbe nämlich in einen Decimalbruch verwandelt, so können wir diesen, der in's Unendliche fortgeht, irgendwo abbrechen. Wir bekommen dann, wenn wir z. B. bei der 12ten Decimale abbrechen d. h. die darauf folgenden Stellen einfach weglassen, einen Näherungswerth, der unter α liegt, indem wir die 12te Decimale um 1 erhöhen, aber einen Näherungswerth über α und da die Differenz dieser beiden Näherungswerthe $= \frac{1}{10^{12}}$, so wird α selber von jedem dieser beiden Näherungswerthe um weniger als um $\frac{1}{10^{12}}$ verschieden sein.

So ist $\sqrt{5} = 2{,}23606797 \ldots$

Es liegt daher $\sqrt{5}$ z. B. zwischen 2,236067 und 2,236068, die selber bloss um $\frac{1}{10^6}$ verschieden sind, so dass man $\sqrt{5}$ durch

einen dieser beiden Decimalbrüche eesetzt, der begangene Fehler kleiner ist als $\frac{1}{10^6}$. $\sqrt{5}$ liegt ferner zwischen 2,23606797 und 2,23606798, die um $\frac{1}{10^8}$ verschieden sind; folglich drückt jede dieser beiden Zahlen den Werth von $\sqrt{5}$ mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{10^8}$ aus d. h. wenn wir $\sqrt{5}$ durch eine dieser beiden Zahlen ersetzen, so ist der begangene Fehler kleiner als $\frac{1}{10^8}$, und so könnte man offenbar die Annäherung so weit treiben, als man nur wollte. Bezeichnet allgemein α eine solche inkommensurable Grösse, α' einen Näherungswerth unter, α'' einen solchen über α, so wäre $\alpha' < \alpha < \alpha''$, somit die Differenzen $\alpha - \alpha'$ und $\alpha'' - \alpha$ beide kleiner als $\alpha'' - \alpha'$, die selber beliebig klein gemacht werden kann.

Es erhellt hieraus unmittelbar, was man unter Summe, Differenz, Produkt, Quotient und unter einer Potenz mit inkommensurabelm Exponenten zu verstehen hat.

Sind α und β zwei inkommensurable Zahlen, wie z. B. $\sqrt{7}$ und $\sqrt{11}$, bezeichnen α' und β' kommensurable Näherungswerthe unter, α'' und β'' zwei solche Näherungswerthe über α und β, so können die Differenzen $\alpha'' - \alpha'$ und $\beta'' - \beta'$ beliebig klein gemacht werden. Die Summe $\alpha' + \beta'$ wird dann unter, $\alpha'' + \beta''$ dagegen über der Summe $\alpha + \beta$ liegen, und da man es in seiner Gewalt hat, die Differenzen $\alpha'' - \alpha'$ und $\beta'' - \beta'$ und somit auch die Differenz der beiden Summen $\alpha'' + \beta''$ und $\alpha' + \beta'$ unter jede beliebige Kleinheit herabzudrücken, so muss es zwischen $\alpha' + \beta'$ und $\alpha'' + \beta''$ eine feste Zahl geben, der sich diese beiden Summen $\alpha' + \beta'$ und $\alpha'' + \beta''$, die erste von unten, die letzte von oben nähern, und diese feste Grenze ist das, was man unter der Summe der beiden inkommensurabeln Zahlen α und β zu verstehen hat.

Ganz analog ist die Bedeutung der Differenz $\alpha - \beta$.

Betrachten wir ferner zunächst das Produkt aus einer kommensurabeln Zahl 10 in eine inkommensurable α, so nehmen wir wieder einen Näherungswerth α' unter, einen zweiten α'' über α an, so dass $\alpha' < \alpha < \alpha''$, dann wird das Produkt $10\alpha'$ immer kleiner, $10\alpha''$ aber immer grösser sein als 10α. Lässt man nun α' und α'' der zwischen ihnen liegenden Zahl α immer näher rücken, so werden auch die Produkte $10\alpha'$ und $10\alpha''$ sich immer näher kommen, das erste dabei beständig kleiner, das zweite

beständig grösser sein als das zu bestimmende Produkt 10α. Es muss daher zwischen $10\alpha'$ und $10\alpha''$ eine feste Grenze geben, der sich die Produkte $10\alpha'$ und $10\alpha''$, das eine von unten, das andere von oben, unbegrenzt nähern und diese Grenze ist das, was man unter dem Produkt 10α versteht.

Hat man aber das Produkt zweier inkommensurablen Zahlen α und β, so sollen wieder α' und β' zwei unter α und β, α'' und β'' aber zwei darüber liegende kommensurable Näherungswerthe bedeuten; alsdann wird das Produkt $\alpha'\beta'$ unter, $\alpha''\beta''$ aber über $\alpha\beta$ liegen. Wenn nun α' und α'' immer näher an α, β' und β'' immer näher an β rücken, so werden auch die kommensurablen Produkte $\alpha'\beta'$ und $\alpha''\beta''$ immer näher zusammenrücken, hiebei aber das erste immer kleiner, das 2te immer grösser als $\alpha\beta$ bleiben. Es muss somit eine bestimmte Grenze geben, der sich die beiden Produkte $\alpha'\beta'$ und $\alpha''\beta''$ ohne Ende nähern und diese Grenze ist das, was man unter dem Produkt $\alpha\beta$ versteht.

Quotient $\frac{\alpha}{\beta}$. Seien wieder α' und β' zwei Näherungswerthe unter, α'' und β'' aber zwei solche über α und β, so wollen wir, um ein dem vorigen analoges Raisonnement anwenden zu können, den Näherungswerth unter α mit dem über β und umgekehrt verbinden, also die Quotienten $\frac{\alpha'}{\beta''}$ und $\frac{\alpha''}{\beta'}$ betrachten. Da nun $\alpha' < \alpha$, $\beta'' > \beta$, so wird sicher $\frac{\alpha'}{\beta''}$ stets unter $\frac{\alpha}{\beta}$, dagegen $\frac{\alpha''}{\beta'}$ stets über $\frac{\alpha}{\beta}$ bleiben. Wenn nun α' und α'' näher an α, β' und β'' immer näher an β rücken, so werden die Quotienten $\frac{\alpha'}{\beta''}$ und $\frac{\alpha''}{\beta'}$ ebenfalls immer näher zusammen kommen, dabei aber der erste stets kleiner, der 2te stets grösser als $\frac{\alpha}{\beta}$ bleiben. Es muss somit eine feste Grenze geben, der sich die beiden Quotienten $\frac{\alpha'}{\beta''}$ und $\frac{\alpha''}{\beta'}$ immer mehr nähern und diese Grenze ist's, was man unter dem Quotienten der beiden inkommensurablen Zahlen α und β versteht.

Potenz. Ist die Basis inkommensurabel, der Exponent aber

kommensurabel, so ist die Bedeutung aus dem Vorhergehenden unmittelbar klar.

Um uns aber eine Vorstellung zu machen von einer Potenz mit inkommensurabelm Exponenten, beachten wir zunächst, dass wenn α' und α'' zwei kommensurable Näherungswerthe von α bedeuten so dass $\alpha' < \alpha < \alpha''$, alsdann für $a > 1$ man stets hat:

$$a^{\alpha'} < a^{\alpha}$$

und

$$a^{\alpha''} > a^{\alpha}$$

Wenn nun α' und α'' der zwischen ihnen liegenden inkommensurabeln Zahl α immer näher rücken, so werden auch die Potenzen $a^{\alpha'}$ und $a^{\alpha''}$ ebenfalls sich immer ändern und zwar die erste immer wachsen, die zweite immer abnehmen, dabei aber die erste stets unter a^{α}, die zweite stets über a^{α} bleiben. Es muss daher zwischen $a^{\alpha'}$ und $a^{\alpha''}$ eine feste Zahl geben, der sich jene beiden Grössen ohne Ende nähern und diese Grenze ist das, was man unter a^{α} versteht, sobald α inkommensurabel. Es bedeutet also für ein inkommensurables α das a^{α} den festen Werth, dem sich die Potenzen $a^{\alpha'}$ und $a^{\alpha''}$ immer mehr nähern, wenn die kommensurabeln Zahlen α' und α'' der zwischen ihnen liegenden Zahl α sich unbegrenzt nähern.

Es ist also a^x ein Ausdruck, welcher für ein kommensurables x mit der Potenz a^x übereinstimmt, für ein inkommensurables x aber die eben entwickelte Bedeutung hat.

171. Die für kommensurable Zahlen entwickelten Operationsgesetze gelten unverändert auch für inkommensurable Zahlen.

So wird z. B. für kommensurable Faktoren bewiesen, dass $ab = ba$. Wir behaupten, das ist auch dann noch der Fall, wenn a und b inkommensurabel. Denn seien a' und b' zwei kommensurable Näherungswerthe unter, a'' und b'' zwei solche über a und b, so dass die Differenzen $a'' - a'$ und $b'' - b'$ verschwindend klein werden, dann sind auch die kommensurabeln Produkte $a'b'$ und $a''b''$ unendlich wenig von einander verschieden, das erste unter, das 2te über ab. Ebenso wird das Produkt ba zwischen $b'a'$ und $b''a''$ liegen. Da aber a', b', a'' und b'' kommensurabel, so ist, $b'a' = a'b'$ und $b''a'' = a''b''$. Somit liegen die beiden Produkte ab und ba zwischen den zwei Produkten $a'b'$ und $a''b''$, deren Differenz kleiner gemacht werden kann, als jede noch so kleine Zahl; sie müssen daher selber einander gleich sein d. h. $ab = ba$.

Man könnte den Nachweis eben so gut indirekt führen.

Gesetzt nämlich, ab wäre nicht $= ba$, so müsste das eine dieser Produkte das grössere sein. Angenommen, ba wäre um k grösser als ab, so hätte man:

$$ba = ab + k \quad (1)$$

Nun denken wir uns zwei kommensurable Näherungswerthe α und β über a und b, dabei aber die Annäherung so weit getrieben, dass ihr Produkt $\alpha\beta$ um weniger als k von ab verschieden ist, dass etwa

$$\alpha\beta = ab + k' \quad (2), \text{ wo } k' < k.$$

Da nun α und β kommensurabel, so ist $\alpha\beta = \beta\alpha$ und somit auch

$$\beta\alpha = ab + k' \quad (3).$$

Da nun $k' < k$, so folgt aus der Gleichung (3) und (1), dass $\beta\alpha < ba$ sein müsste, d. h. das das Produkt $\beta\alpha$ kleiner wäre als das Produkt zweier andern Faktoren, deren jeder kleiner ist, als der entsprechende Faktor des ersten. Das ist aber unmöglich, folglich die Annahme unzulässig, dass ab verschieden von ba sein könnte.

Hat man ferner ein Polynom $a + b - c$ mit einer inkommensurabeln Zahl d zu multipliziren, so behaupten wir, dass wieder $(a + b - c)d = ad + bd - cd$ sei.

In der That wenn d' und d'' zwei dem d unendlich nahe gelegene Näherungswerthe bedeuten, so dass $d' < d < d''$, so wird das Produkt $(a + b - c)d$ liegen zwischen den beiden Produkten $(a + b - c)d'$ und $(a + b - c)d''$.

Da aber d' und d'' kommensurabel, so hat man

$$(a + b - c)d' = ad' + bd' - cd'$$
$$(a + b - c)d'' = ad'' + bd'' - cd''.$$

Allein da offenbar auch ad zwischen ad' und ad'', bd zwischen bd' und bd'', cd zwischen cd' und cd'' liegt, so wird die Summe $ad + bd - cd$ zwischen den beiden Summen $ad' + bd' - cd'$ und $ad'' + bd'' - cd''$ oder zwischen $(a + b - c)d'$ und $(a + b - c)d''$ liegen. Die beiden Ausdrücke $(a + b - c)d$ und $ad + bd - cd$ liegen somit zwischen den Produkten $(a + b - c)d'$ und $(a + b - c)d''$, deren Differenz verschwindend klein wird, sobald d' unendlich nahe an d'' gebracht wird; daher müssen die zwischen ihnen liegenden Grössen einander gleich sein und man hat daher: $(a + b - c)d = ad + ad - cd$ auch dann noch, wenn d inkommensurabel.

Bezeichnen ferner α und β zwei inkommensurable Zahlen, so behaupten wir, dass wieder $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha + \beta}$. Denn wenn α' und

β' zwei Näherungswerthe unter α und β, α'' und β'' aber zwei solche über α und β bedeuten, so ist offenbar $a^{\alpha'}a^{\beta'}$ kleiner, $a^{\alpha''}a^{\beta''}$ aber grösser als $a^{\alpha}a^{\beta}$ oder umgekehrt, je nachdem a grösser oder kleiner ist als 1. Unter allen Umständen liegt also das Produkt $a^{\alpha}a^{\beta}$ zwischen $a^{\alpha'}a^{\beta'}$ und $a^{\alpha''}a^{\beta''}$ oder zwischen $a^{\alpha'+\beta'}$ und $a^{\alpha''+\beta''}$, indem nämlich, weil α', β', α'' und β'' kommensurabel sind,

$$a^{\alpha'}a^{\beta'}=a^{\alpha'+\beta'}$$

und

$$a^{\alpha''}a^{\beta''}=a^{\alpha''+\beta''}.$$

Da aber $\alpha'+\beta'<\alpha+\beta<\alpha''+\beta''$, so muss $a^{\alpha+\beta}$ auch zwischen $a^{\alpha'+\beta'}$ und $a^{\alpha''+\beta''}$ liegen. Es liegen somit die beiden Grössen $a^{\alpha}a^{\beta}$ und $a^{\alpha+\beta}$ zwischen $a^{\alpha'+\beta'}$ und $a^{\alpha''+\beta''}$ und da die Differenz dieser beiden verschwindend klein gemacht werden kann, so müssen die zwischen ihnen liegenden Grössen $a^{\alpha}a^{\beta}$ und $a^{\alpha+\beta}$ selber einander gleich sein.

In analoger Weise lässt sich die Gültigkeit der bisher aufgestellten Operationsregeln auch für inkommensurable Zahlen in allen übrigen Fällen nachweisen. Sie ergibt sich indessen ganz allgemein, wenn man die allerdings nicht hieher gehörigen unendlich kleinen Grössen zu Hülfe nimmt, aus deren Natur unmittelbar folgt, dass jede noch so grosse endliche Anzahl derselben stets wieder eine unendlich kleine Grösse bleibt, also gegenüber jeder endlichen Zahl verschwindet. Denn es folgt hieraus unmittelbar, dass das Resultat einer jeden Verbindung inkommensurabler Grössen unter sich oder mit kommensurabeln nur um unendlich wenig sich von dem unterscheidet, das man erhält, wenn man statt derselben ihre ihnen unendlich nahe gelegenen kommensurabeln Näherungswerthe setzt. Man ist daher berechtigt, die für kommensurable Grössen abgeleiteten Operationsregeln auch auf inkommensurable überzutragen.

172. Nach dieser Betrachtung über inkommensurable Zahlen kommen wir noch einmal auf Satz 168 zurück. Wir haben dort die Variable x nur die rationalen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lassen und gefunden, dass a^x von 0 bis $+\infty$ variirt in der Art, dass jeder folgende Grössenzustand dem vorangehenden beliebig nahe gebracht werden kann.

Lassen wir nun x in ununterbrochener Reihenfolge die sämmtlichen (nicht bloss die rationalen) Zahlwerthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen und denken wir uns die Werthe von x als Abscissen, die zugehörigen Werthe von a^x aber als Ordinaten ei-

nes rechtwinkligen Achsensystems aufgetragen, so bilden die Endpunkte dieser Ordinaten eine ununterbrochene (zusammenhängende) Curve. Würden von dieser Curve diejenigen Punkte ausgelöscht, welche den inkommensurabeln Werthen von x entsprechen, so hätte man noch die Reihe derjenigen Punkte, welche bei der in 168 vorgeschriebenen Aenderung des x aus der Gleichung $y=a^x$ hervorgehen. Eine ununterbrochene oder zusammenhängende Curve liefert die Gleichung $y=a^x$ also nur dann, wenn x in ununterbrochener (stetiger) Folge sämmtliche Grössenzustände von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft.

Achter Abschnitt.

Theorie der Logarithmen.

173. In den §. 168 und 172 wurde gezeigt, dass wenn a eine positive von 1 verschiedene Zahl und x eine variable Grösse bezeichnet, alsdann a^x alle reellen Grössenzustände von 0 bis $+\infty$ durchläuft, wenn man x in stetiger Weise von $-\infty$ bis $+\infty$ sich ändern lässt. Man kann sich daher die sämmtlichen zwischen 0 und $+\infty$ liegenden d. h. alle positiven Zahlen entstanden denken durch Potenzirung einer von 1 verschiedenen positiven Zahl. Wenn also N irgend eine positive Zahl bedeutet und a positiv und verschieden von 1 ist, so existirt stets ein reeller Werth von x, für welchen $a^x=N$ wird. Man nennt nun diesen Werth von x, für welchen $a^x=N$, den Logarithmus von N in Bezug auf die Basis a und bezeichnet das schriftlich durch

$$x = \log{}^a N$$

So wäre $x=\log{}^{10} N$, wofern $10^x=N$ wäre.

Man versteht somit unter dem Logarithmus einer Zahl N für die Basis a eine solche Zahl, mit der man a potenziren muss, um N zu bekommen. So wäre z. B. 5 der Logarithmus von 32 für die Basis 2, weil $2^5=32$; ebenso 3 der Logarithmus von 125 für die Basis 5, da $5^3=125$.

174. Setzt man in der Gleichung $a^x=N$ für N successive verschiedene positive Zahlen N_1, N_2, N_3 etc., so wird bei der nämlichen Basis a zu jeder dieser Zahlen N_1, N_2, N_3 ein anderer

Werth von x gehören d. h. jede positive Zahl hat in Bezug auf eine bestimmte positive Basis nur einen reellen Logarithmus. Gibt man aber in der obigen Gleichung dem N einen ganz bestimmten Werth und ersetzt dann a successive durch 10, 3, 11, 19, so hat x in jeder der Gleichungen

$$10^x = N$$
$$3^x = N$$
$$11^x = N$$
$$19^x = N$$

einen andern Werth d. h. die **nämliche** Zahl N hat für jede andere Basis wieder einen andern Logarithmus.

175. Denkt man sich für eine bestimmte Basis, z. B. für $a = 10$, die Logarithmen einer gewissen Anzahl positiver Zahlen berechnet und tabellarisch zusammengestellt, so erhält man ein System von Logarithmen für die Basis 10. Die in diesem System genommenen Logarithmen werden gewöhnliche oder gemeine Logarithmen genannt und man pflegt sie ohne Angabe der Basis zu schreiben, so dass man also unter log 3925 den Logarithmus dieser Zahl für die Basis 10 versteht. Wird dagegen der Logarithmus einer Zahl in irgend einem andern Logarithmensystem genommen, so muss die Basis stets angegeben werden.

176. Da 10^x stets unter 1 bleibt, so lange x negativ ist, ferner $= 1$ wird für $x = 0$ und endlich grösser als 1, sobald x positiv, so folgt daraus umgekehrt:

1. dass die Logarithmen aller Zahlen < 1 stets negativ,
2. die Logarithmen aller Zahlen > 1 sämmtlich positiv sind,
3. der Logarithmus der Einheit $= 0$ ist.

Dasselbe gilt für jede Basis grösser als 1. Ist dagegen die Basis $a < 1$, so bleibt a^x unter 1 für alle positiven Werthe von x, dagegen über 1 für alle negativen Werthe von x, woraus wieder umgekehrt folgt, dass bei einer Basis kleiner als 1 die Logarithmen der ächten Brüche positiv, die Logarithmen der Zahlen > 1 aber negativ sind.

In jedem beliebigen Logarithmensystem aber ist der Logarithmus der Basis immer $= 1$, der Logarithmus der Einheit immer $=$ Null, der Logarithmus von Null stets $= -\infty$ für eine Basis > 1 und $= +\infty$ für eine Basis < 1. In der That: der Logarithmus der Basis ist der Werth von x in ider Gleichung: $a^x = a$, welche Gleichung aber nur verifizirt wird für $x = 1$.

Der Logarithmus der Einheit ist der Werth von x in der Gleichung $a^x = 1$, woraus folgt $x = 0$.

Der Logarithmus von 0 endlich ist der Werth von x in der Gleichung $a^x = 0$. Diese Gleichung wird aber nur erfüllt für $x = -\infty$, wenn $a > 1$, und für $x = +\infty$, wenn $a < 1$, woraus die obigen Behauptungen erhellen.

177. Aus der Gleichung $a^x = N$ erkennt man sofort, dass nur die ganzen positiven oder negativen Potenzen der Basis 10 ganzzahlige Logarithmen haben können, dass dagegen die Logarithmen der übrigen Zahlen aus einer ganzen Zahl und einem Bruchtheil kleiner als 1 bestehen. So liegen z. B. die Logarithmen der 2 stelligen Zahlen zwischen 1 und 2, die aller 7 stelligen Zahlen zwischen 6 und 7, allgemein die der n stelligen Zahlen zwischen $n-1$ und n. In der That liegen alle 2 stelligen Zahlen zwischen 10 und 100, ihre Logarithmen somit zwischen $\log 10$ und $\log 100$ d. h. zwischen 1 und 2; sie bestehen daher aus der ganzen Zahl 1 und einem ächten Bruchtheil. Die 7 stelligen Zahlen liegen zwischen 10^6 und 10^7, ihre Logarithmen somit zwischen $\log 10^6$ und $\log 10^7$ d. h. zwischen 6 und 7 u. s. f.

Man nennt nun die ganze Zahl Kennziffer oder Charakteristik, den hinzuzufügenden Decimalbruch aber Mantisse. So hätten also die Logarithmen aller 7 stelligen Zahlen die Kennziffer 6, die der 8 stelligen Zahlen die Kennziffer 7, die der n stelligen Zahlen aber die Kennziffer $n-1$ d. h. die Kennziffer des Logarithmus irgend einer ganzen dekadischen Zahl ist um 1 kleiner als die Anzahl der Stellen.

178. Es ist

1. Der Logarithmus eines Produktes gleich der der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren, also z. B.

$$\log (ABC) = \log A + \log B + \log C.$$

2. Der Logarithmus eines Quotienten gleich dem Logarithmus des Dividenden weniger dem Logarithmus des Divisors, also

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B.$$

3. Der Logarithmus einer Potenz gleich dem Logarithmus der Basis, multiplizirt mit dem Exponenten der Potenz.

4. Der Logarithmus einer Wurzelgrösse gleich

dem Logarithmus der Grösse unter dem Wurzelzeichen, dividirt durch den Wurzelindex.

Um den 1sten dieser 4 Sätze zu beweisen, wollen wir annehmen, man müsste 10 mit x potenziren, um A, mit y, um B und mit z, um C zu erhalten, so wäre also

$$(\alpha)\left\{\begin{array}{l}10^x=A \\ 10^y=B \\ 10^z=C\end{array}\right. \begin{array}{l}\text{und somit} \\ \text{,,} \quad \text{,,} \\ \text{,,} \quad \text{,,}\end{array} \left.\begin{array}{l}x=\log A \\ y=\log B \\ z=\log C\end{array}\right\}(\beta)$$

Indem wir die Gleichungen (α) mit einander multipliziren, bekommen wir:

$10^{x+y+z}=ABC$. Es ist somit $x+y+z$ die Zahl, mit der man 10 potenziren muss, um ABC zu erhalten d. h. es ist $x+y+z=\log(ABC)$.

Allein aus der Addition der Gleichungen (β) folgt auch:

$$x+y+z=\log A+\log B+\log C;$$

somit ist $\log(ABC)=\log A+\log B+\log C.$

Um den 2ten Satz zu beweisen, wollen wir wieder annehmen, es sei.

$$(\alpha)\left\{\begin{array}{l}10^x=A \\ 10^y=B\end{array}\right\} \text{ so ist } \left.\begin{array}{l}x=\log A \\ y=\log B\end{array}\right\}(\beta)$$

Durch Division der Gleichungen (α) ergibt sich:

$$10^{x-y}=\frac{A}{B}, \text{ woraus folgt, dass}$$

$$x-y=\log\left(\frac{A}{B}\right).$$

Allein durch Subtraktion der Gleichungen (β) findet man auch:

$$x-y=\log A-\log B;$$

somit $\log\frac{A}{B}=\log A-\log B.$

Um ferner zu zeigen, dass

$\log A^m = m\log A$, sei wieder

$(\alpha)\ 10^x=A$, so ist $x=\log A\ (\beta)$

Indem wir Gleichung (α) mit m potenziren, kommt

$$(10^x)^m=A^m$$

oder $10^{mx}=A^m.$

Hiernach ist $mx=\log A^m$; allein wenn wir (β) mit m multipliziren, so kommt auch

$mx=\log A$; daher

$$\log A^m=m\log A.$$

Um endlich zu zeigen, dass $\log \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \log A$, wollen wir wieder annehmen, es sei

$$(\alpha) \quad 10^x = A \text{ oder } x = \log A \quad (\beta)$$

Dann wird auch $\sqrt[m]{10^x} = \sqrt[m]{A}$

oder $10^{\frac{x}{m}} = \sqrt[m]{A}$ sein.

Hiernach wäre $\frac{x}{m} = \log \sqrt[m]{A}$.

Allein wenn wir beide Seiten von (β) durch m dividiren, so bekommen wir:

$$\frac{x}{m} = \frac{1}{m} \log A.$$

Wenn nun einerseits $\frac{x}{m} = \log \sqrt[m]{A}$ und anderseits auch $\frac{x}{m} = \frac{1}{m} \log A$, so folgt daraus, dass

$$\log \sqrt[m]{A} = \frac{1}{m} \log A, \text{ w. z. b. w.}$$

179. Hieraus folgt nun, dass wenn man ein Mittel besässe, durch welches man von jeder Zahl sofort den Logarithmus und umgekehrt zu jedem Logarihmus wieder die entsprechende Zahl anzugeben im Stande wäre, man die Rechnung sehr vereinfachen könnte, weil alsdann jede Multiplikation von Zahlen durch eine Addition ihrer Logarithmen, jede Division durch eine Subtraktion derselben, jede Potenzirung durch eine Multiplikation und jede Wurzelausziehung durch eine Division und ein Aufschlagen von Logarithmen zu gegebenen Zahlen und von Zahlen zu berechneten Logarithmen sich ersetzen liesse.

Man hat nun in der That ein solches Mittel in den verschiedenen Logarithmentafeln. Die Tafeln von Vega (sowol die Ausgabe von Hülsse, als die spätere von Bremiker), diejenigen von Schrön und die von Callet enthalten die siebenstelligen Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 100000 und man kann dann mittelst derselben nicht bloss sofort die Logarithmen aller 1-, 2-, 3-, 4- und 5stelligen Zahlen, sondern auch die Logarithmen sämmtlicher Zahlen ablesen, die nicht mehr als 5 aufeinanderfolgende Ziffern haben, denen noch eine beliebige Anzahl von Nullen folgen oder vorangehen. So kann man z. B. 36459000000 auffassen als ein Produkt aus 36459 in die sovielte Potenz von 10, als Nullen folgen, jeden Decimalbruch aber als Quotienten aus einer ganzen Zahl durch die sovielte Potenz von 10, als derselbe Deci-

malstellen enthält. Es wird daher $\log 36459000000 = \log 36459 . 10^6$ $= \log 36459 + \log 10^6 = 4{,}5618048 + 6 = 10{,}5618048$.

Ebenso wäre $\log 0{,}000036459 = \log \frac{36459}{10^9} = \log 36459 - \log 10^9$ $= 4{,}5618048 - 9$; und wenn wir nun die beiden Kennziffern 4 und -9 vereinigen, so erhalten wir $0{,}5618048 - 5$, welcher Logarithmus also aus einer positiven Mantisse und einer negativen Kennziffer zusammengesetzt ist. Will man beide zusammenziehen, so darf man nur die Mantisse von dem absoluten Werth der negativen Kennziffer abziehen und den Rest negativ nehmen; man erhält so: $0{,}5618048 - 5 = -4{,}4281952$.

180. Wir haben bereits in 177 gesehen, dass die Kennziffer des Logarithmus einer ganzen Zahl stets um 1 kleiner ist als die Anzahl der Stellen dieser Zahl. Wir behaupten nun, dass die Kennziffer des Logarithmus irgend einer deka- Zahl (gleichviel ob ganze Zahl oder Decimalbruch) stets gleich sei dem Exponenten vom Lokalwerth ihres obersten Gliedes. Um das einzusehen, vergleichen wir die Logarithmen von Zahlen, die gleiche absolute Werthe haben, sich also nur durch ihre Lokalwerthe unterscheiden. Wir finden z. B.:

1. $\log 36918 = 4{,}5672382$
2. $\log 369{,}18 = 4{,}5672382 - 2 = 2{,}5672382$
3. $\log 3{,}6918 = 4{,}5672382 - 4 = 0{,}5672382$
4. $\log 0{,}0036918 = 4{,}5672382 - 7 = 0{,}5672382 - 3$
5. $\log 0{,}000036918 = 4{,}5672382 - 9 = 0{,}5672382 - 5$

Die Lokalwerthe der obersten Glieder dieser Zahlen sind der Reihe nach 10^4, 10^2, 10^0 oder 1, 10^{-3} und 10^{-5}, ihre Exponenten also 4, 2, 0, -3 und -5 und diess sind zugleich die Kennziffern der zugehörigen Logarithmen.

Es ergibt sich hieraus, dass wenn man den Logarithmus einer beliebigen dekadischen Zahl aufzuschlagen hat, gleichviel ob sie eine ganze Zahl sei oder Decimalstellen enthalte, man einfach vom Decimalkomma abstrahirt, die Mantisse der dadurch erhaltenen ganzen Zahl aufsucht und derselben als Kennziffer den Exponenten vom Lokalwerth ihres obersten Gliedes beisetzt.

181. Bei Bestimmung der Logarithmen von mehr als 5stelligen Zahlen stützen wir uns auf einen Satz, dessen allgemeinen Nachweis wir auf später verschieben müssen, dessen Richtigkeit wir aber wenigstens für einen speziellen Fall schon hier einsehen kön-

nen, nämlich auf den Satz, dass die Logarithmendifferenzen näherungsweise den Zahlendifferenzen proportional sind — eine Proportion, die um so genauer ist, je kleiner die Zahlendifferenzen gegenüber den Zahlen sind.

Seien n, $n+1$ und $n+2$ drei aufeinander folgende Zahlen, so ist die Differenz der beiden ersten gleich der Differenz der 2 letzten, also $(n+1)-n = (n+2)-(n+1)$, nämlich beide $= 1$. Wenn die Proportion ganz exakt wäre, so müsste auch $\log(n+1) - \log n = \log(n+2) - \log(n+1)$ sein. Wir werden gleich sehen, dass die 2te Gleichung ungenau ist, aber doch der Wahrheit um so näher kommt, je grösser die Zahl n ist. In der That ist

$$\log(n+1) - \log n = \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\log(n+2) - \log(n+1) = \log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

Wären die Brüche $\frac{n+1}{n}$ und $\frac{n+2}{n+1}$ wirklich gleich, so müssten auch ihre Logarithmen gleich und somit die Differenzen $\log(n+1) - \log n$ und $\log(n+2) - \log(n+1)$ einander gleich sein. Nun ist

$$\frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{n(n+1)} = \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Je grösser nun n, desto kleiner wird der Bruch, desto kleiner also der Unterschied der beiden Zahlen $\frac{n+1}{n}$ und $\frac{n+2}{n+1}$, desto kleiner daher auch der Unterschied zwischen ihren Logarithmen. Schon für die kleinste 5stellige Zahl, nämlich für $n = 10^4$, ist $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{10^8}$, für alle übrigen 5stelligen Zahlen noch kleiner und somit auch näherungsweise $\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

182. Zu einer gegebenen Zahl N mittelst der Tafeln den Logarithmus zu finden.

1ster Fall: $N < 100000$.

Auf den 5 ersten Seiten findet man in den mit N überschriebenen Columnen die sämmtlichen Zahlen von 1 bis 999 und in den daneben stehenden mit „Log" überschriebenen Columnen deren vollständige Logarithmen.

Hat die Zahl aber 4 oder 5 Stellen, so findet man ihre Mantisse ebenfalls unmittelbar in den Tafeln, während die Charakte-

ristik nach No. 181 leicht ergänzt werden kann. Es enthält nämlich die erste mit N überschriebene Columne die sämmtlichen ganzen Zahlen von 1000 bis 9999 und in der daneben stehenden, mit 0 bezeichneten Columne befinden sich die Mantissen ihrer Logarithmen. Da aber die Mantissen der 10 mal grössern Zahlen die nämlichen sind, so gibt uns die Columne 0 zugleich die Mantissen der Zahlen von 10000 bis 99990 von 10 zu 10. Für die dazwischen liegenden Zahlen sind die 4 letzten Stellen der Logarithmen enthalten in den mit 1, 2, 3 . . . bis 9 überschriebenen Columnen, während die 3 ersten Stellen der Columne 0 zu entnehmen sind, wo sie meist einige Zeilen höher, bisweilen auch eine Zeile tiefer stehen, dann nämlich, wenn die 4 letzten Stellen mit einem Sternchen oder einem Strich bezeichnet sind. So ist die Mantisse des Logarithmus von 15930 in der mit 0 überschriebenen Columne, für 15931 sind die 4 letzten Stellen in der mit 1, — für 15932 in der mit 2 etc. . . ., für 15939 endlich in der mit 9 überschriebenen Columne enthalten. Wollte man also z. B. den Logarithmus von 34957 aufsuchen, so wären die 4 ersten Stellen (3495) in der Columne N aufzusuchen, dann von hier aus horizontal fortzurücken, bis man zu derjenigen Columne kommt, die oben mit der 5ten Ziffer 7 überschrieben ist Hier finden sich die 4 letzten Stellen der gesuchten Mantisse, während die 3 ersten in der Columne 0 zu suchen sind.

Zweiter Fall: N enthalte mehr als 5 Stellen. Wenn z. B. $N=41592687$, so schneiden wir zunächst rechts so viele Stellen als Decimalen ab, dass links noch eine 5stellige Zahl übrig bleibt und betrachten also statt der obigen Zahl die 1000 mal kleinere Zahl $N'=41592{,}687$, deren Logarithmuss von dem der gegebenen Zahl N sich bloss durch die Kennziffer unterscheidet. Nun liegt $N'=41592{,}687$ zwischen 41592 und 41593; folglich wird log N' liegen zwischen den Logarithmen der beiden Zahlen 41592 und 41593, grösser sein als der 1ste und kleiner als der 2te. Da aber

$$\log 41593 = 4{,}6190202$$
$$\log 41592 = 4{,}6190098$$

so ist ihre Differenz $= 0{,}0000104$. Es entspricht also hier der Zahlendifferenz 1 eine Logarithmendifferenz $= 0{,}0000104$. Vergleichen wir aber unsere Zahl mit der nächst kleinern ganzen Zahl 41592, so unterscheidet sie sich von dieser um 0,687 und es bleibt nur zu bestimmen, um wie viel sich ihr zu suchender Logarithmus von log 41592 unterscheidet. Da stützen wir uns auf

den in No. 181 angeführten Satz, dass die Logarithmendifferenzen den Zahlendifferenzen näherungsweise proportional sein müssen und sagen: Wenn der Zahlendifferenz 1 eine Logarithmendifferenz von 104 Einheiten der 7ten Decimale entspricht, so wird der kleinern Zahlendifferenz 0,687 auch eine kleinere Logarithmendifferenz entsprechen und zwar muss — wenn wir diese zu bestimmende Logarithmendifferenz mit x bezeichnen — x in eben dem Masse kleiner als 104 sein, in welchem 0,687 kleiner ist als 1; man hat daher die Proportion:

$$1 : 0{,}687 = 104 : x$$

woraus folgt: $x = 104 \,.\, 0{,}687 = 71{,}448$, welches Produkt in seinen Ganzen sich auf Einheiten der 7ten Decimale bezieht, wie 104.

Es ist somit

$$\begin{aligned}\log 41592{,}687 &= \log 41592 + 104 \,.\, 0{,}687\\ &= 4{,}6190098 + 0{,}0000071\\ &= 4{,}61900169.\end{aligned}$$

Wir bekommen daher für Bestimmung des Logarithmus einer mehr als 5stelligen Zahl folgende Regel:

Man schneidet zunächst von der Zahl rechts so viele Stellen als Decimalen ab, dass links noch eine 5stellige Zahl übrig bleibt, schlägt dann den Logarithmus dieser 5stelligen Zahl auf und addirt zu demselben das Produkt aus der Differenz zwischen den Logarithmen der beiden benachbarten Zahlen in die rechts abgeschnittenen Decimalen.

Ist nun $\log 41592{,}687 = 4{,}6190169$, so wird der Logarithmus der 1000 mal grössern Zahl 41592687 um 3 Einheiten grösser sein, also = 7,6190169.

Man könnte aber auch die Zahl $N' = 41592{,}687$ vergleichen mit der nächst grössern Zahl 41593 und von dem Logarithmus dieser Zahl aus auf den von N' schliessen. Unsere Zahl N' ist nämlich um 0,313 kleiner als die Zahl 41593; daher wird ihr Logarithmus um eine gewisse Differenz kleiner sein als log 41593 und wenn wir diese zu bestimmende Differenz mit x bezeichnen, so können wir sagen: Der Zahlendifferenz 1 entspricht eine Logarithmendifferenz 104 (Einheiten der 7ten Decimale); der kleinern Zahlendifferenz 0,313 wird daher eine Logarithmendifferenz x entsprechen, die in eben dem Masse kleiner ist als 104, in welchem 0,313 kleiner ist als 1; daher die Proportion:

$$1 : 0{,}313 = 104 : x$$

woraus $x = 104 \,.\, 0{,}313 = 32{,}552 = 33$, welches Produkt in seinen Ganzen sich auf Einheiten der 7ten Decimale bezieht. Daher muss log 41592,687 um 33 Einheiten der 7ten Decimale kleiner sein als log 41593. Wenn daher

$$\log 41593 = 4{,}6190202$$
und $104 \,.\, 0{,}313 = 0{,}0000033$

so ist $\log 41592{,}687 = 4{,}6190169$, wie oben.

Die erste Bestimmungsart ist aber die gebräuchlichere und auch desshalb etwas bequemer, weil die Zahlendifferenz unmittelbar gegeben ist und nicht erst bestimmt werden muss.

Man kann sich nun die Multiplikation der Differenz 104 mit den rechts abgeschnittenen Decimalen 0,687 auch ersparen. Denn in den Tafeln kommen unter dem Titel Proportionaltheile die Produkte aus der Differenz 104 in $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ bis $\frac{9}{10}$ vor in Form von folgender Tabelle:

	104
1	10,4
2	20,8
3	31,2
4	41,6
5	52,0
6	62,4
7	72,8
8	83,2
9	93,6

worin die unter 104 stehenden Proportionaltheile 10,4, 20,8 etc. bis 93,6 die Produkte aus der oben stehenden Differenz 104 in die Zahlen 1, 2, 3 bis 9 sind, welche letzte nicht als Ganze, sondern als Zehntel gedacht werden müssen, so dass man also zur Bildung des Produktes 104 . 0,687 nur herauszuschreiben braucht:

1. $104 \,.\, 0{,}6 = 62{,}4$
2. $104 \,.\, 0{,}08 = 8{,}32$
3. $104 \,.\, 0.007 = 0{,}728$

daher $104 \,.\, 0{,}687 = 71{,}448 = 71$

welches Produkt in seinen Ganzen sich auf Einheiten der 7ten Decimale bezieht, die man zum Logarithmus von 41592 addiren muss, um den Logarithmus von 41592,687 zu bekommen.

Die mechanische Darstellung zur Bestimmung unsers Logarithmus könnte etwa folgende sein:

$$\log 41592687 = ?$$
$$\log 41592 = .,6190098$$

Proportionaltheil zu 6 62,4
„ „ „ „ . 8 8,34
„ „ „ „ . . 7 0,728

Summe .,6190169

Somit $\log 41592687 = 7{,}6190169.$

Anmerkung. Das Produkt aus der Differenz 104 in die rechts abgeschnittenen Decimalstellen bezieht sich in seinen Ganzen

auf Einheiten der 7ten Decimale und da wir von diesem Produkt nur diejenigen Stellen brauchen, welche noch auf die Einheiten der 7ten Decimale influiren, so werden bei einer grössern Anzahl rechts abgeschnittener Decimalen immer nur die 3 ersten Einfluss auf das Produkt haben, alle folgenden aber unberücksichtigt wegfallen können. Ein Blick auf die Tafeln zeigt uns nämlich, dass die grösste Differenz zwischen den Logarithmen zweier aufeinander folgenden ganzen Zahlen, von der man zur Bestimmung der Proportionaltheile Gebrauch machen könnte, 0,0000432 beträgt, ihr höchstes Glied also den Lokalwerth 10^{-5} hat. Wäre nun diese Differenz mit einer rechts abgeschnittenen mehr als dreistelligen Zahl zu multipliziren, so hätte schon die 4te Stelle den Lokalwerth 10^{-4}, würde also, mit Hunderttausendsteln multiplizirt, zum Produkt den Lokalwerth 10^{-9} haben; diese nehmen nach dem Decimalkomma die 9te Stelle ein, können also wohl noch auf die 8te, aber nicht mehr auf die 7te Decimalstelle influiren. Darum brauchen wir von den rechts abgeschnittenen Stellen nur die 3 ersten zu berücksichtigen und können alle spätern unbeachtet lassen. So würde der Logarithmus von 72546892548 bis auf 7 Decimalen genau übereinstimmen mit dem Logarithmus von 72546892000.

183. Aufgabe: Zu einem gegebenen Logarithmus L die entsprechende Zahl zu finden.

1. Fall. Der gegebene Logarithmus L sei positiv.

Ist L positiv, so findet er sich entweder unmittelbar in den Tafeln vor oder nicht. In jenem Fall findet man die 3 ersten Stellen in der mit 0 bezeichneten Columne, die 4 letzten aber entweder in dieser oder in einer der folgenden Columnen und zwar in der gleichen horizontalen Zeile, oder in einer darunter oder auch in der zunächst darüber stehenden Zeile, im letzten Fall mit einem Sternchen oder einem Strich bezeichnet. Von der zugehörigen Zahl finden sich die 4 ersten Stellen auf derselben horizontalen Zeile in der Rubrik N, die 5te aber oben in derjenigen Columne, welche die 4 letzten Stellen von L enthält.

Ist aber die Mantisse des gegebenen Logarithmus nicht in den Tafeln enthalten, so kann man doch stets zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Mantissen finden, welche die gegebene zwischen sich enthalten. So wenn z. B. $L = 3,4592786$ gegeben wäre, so liegt dessen Mantisse 0,4592786 zwischen den beiden Mantissen 0,4592718 und 0,4592869, denen, abgesehen vom Lokalwerth, die Zahlen 28792 und 28793 entsprechen. Diese bei-

den Mantissen sind um 0,0000151, die zugehörigen Zahlen aber um eine Einheit verschieden. Vergleichen wir unsere Mantisse aber mit der nächst kleinern, so beträgt der Unterschied 0,0000068 und es ist nun die Frage, wie gross die zugehörige Zahlendifferenz sei. Da können wir wieder sagen: Wenn der Mantissendifferenz 151 Einheiten der 7ten Decimale eine Zahlendifferenz 1 entspricht, so wird der kleinern Mantissendifferenz 68 (Einheiten der 7ten Decimale) auch eine Zahlendifferenz kleiner als 1 entsprechen und zwar wird diese Zahlendifferenz in eben dem Masse kleiner sein als 1, in welchem 68 kleiner ist als 151. Bezeichnen wir daher mit x diese Zahlendifferenz, so haben wir die Proportion:

$$151 : 68 = 1 : x, \text{ woraus folgt}$$

$$x = \tfrac{68}{151}.$$

Es muss daher die unserer Mantisse entsprechende Zahl um $\tfrac{68}{151}$ grösser sein, als die der nächst kleinern Mantisse entsprechende Zahl und wenn wir mit Num log 3,4592786 die Zahl bezeichnen, deren Logarithmus = 3,4592786, so haben wir — abgesehen vom Lokalwerth —

$$\text{Num log } 3{,}4592786 = 28792 + \tfrac{68}{151}.$$

Diesen Bruch $\tfrac{68}{151}$ verwandeln wir nun in einen Decimalbruch, bestimmen von demselben aber nur die Zehntel und Hundertstel und bekommen $\tfrac{68}{151} = 0{,}45$, so dass also

$$\text{Num log } 3{,}4592786 = 28792{,}45$$

abgesehen vom Lokalwerth; der Lokalwerth aber bestimmt sich durch die Kennziffer; diese ist = 3; daher hat die Zahl 4 Stellen in den Ganzen und somit

$$\text{Num log } 3{,}4592786 = 2879{,}245.$$

Mit Hülfe der Tafeln kann man sich die Division von 68 durch 151 ersparen. Es enthalten die Tafeln nämlich folgende Tabelle:

	151
1	15,1
2	30,2
3	45,3
4	60,4
5	75,5
6	80,6
7	105,6
8	120,8
9	135,9

wo die unter der Differenz 151 stehenden Proportionaltheile 15,1 — 30,2 etc. bis 135,9 die Produkte sind aus der Differenz 151 durch $\tfrac{1}{10}, \tfrac{2}{10} \ldots \tfrac{9}{10}$. Umgekehrt werden die neben diesen Proportinaltheilen stehenden Zahlen 1, 2, 3 ... bis 9, durch 10 dividirt, die Quotienten sein aus den Proportionaltheilen 15,1 — 30,2 etc. durch die Differenz 151. Um nun zu bestimmen, wie oftmal 151 in 68 enthalten sei, bemerken wir, dass der zunächst unter 68 stehende

Proportinaltheil 60,4 das Produkt ist aus 151 in 0,4; somit 0,4 der Quotient aus 60,4 durch 151. Subtrahiren wir das Produkt aus dem Divisor 151 in diesen Quotienten 0,4, nämlich 60,4, von unserm Dividenden 68, so bleibt der Rest 7,6. Nun gäbe 75,5, durch 151 dividirt, den Quotienten 0,5; die 10 mal kleinere Zahl 7,55 oder 7,6 gibt daher einen 10 mal kleinern Quotienten = 0,05. Somit 0,45 der Quotient aus 68 durch 151.

Für die mechanische Bestimmung des Numerus zu einem gegebenen Logarithmus bekommen wir daher folgende Darstellung:

Num log 3,4592786 = ?		
Zu „ . . 2718 . .	gehört	28792
Differenz	68	
zum Proportionaltheil . .	60,4	4
	7,6	
zu	7,5	5

Daher ist 2879245 die zu unserm Logarithmus gehörige Zahl, abgesehen vom Lokalwerth, der durch die Kennziffer bestimmt wird. Da diese = 3, so ist 10^3 der Lokalwerth ihres obersten Gliedes und man hat daher:

$$\text{Num}\log 3,4592718 = 2879,245.$$

Zweiter Fall. Der gegebene Logarithmus L sei negativ.

Schon in No. 176 haben wir gesehen, dass die Logarithmen aller ächten Brüche negativ sind und also auch jedem negativen Logarithmus eine Zahl kleiner als 1 entspricht. Wir behaupten nun, dass jeder negative Logarithmus angesehen werden kann als Logarithmus eines Bruches, dessen Zähler gleich 1, dessen Nenner aber die zu demselben, aber positiv genommenen Logarithmus gehörige Zahl ist. Sei z. B. $L = -2,5337554$, so wollen wir die dem positiven Logarithmus 2,5337554 entsprechende Zahl mit N bezeichnen, so dass also $\log N = 2,5337554$; dann ist $\log \frac{1}{N} =$

$$\log 1 - \log N = 0 - 2,5337554 = -2,5337554.$$

Nun ist

$$\text{Num}\log 2,5337554 = 341,7868; \text{ daher}$$

$$\text{Num}\log -2,5337554 = \frac{1}{341,7868} = 0,0029258.$$

Man kann indessen die Division der Einheit durch die dem positiv genommenen Logarithmus entsprechende Zahl auch vermeiden, indem man den negativen Logarithmus verwandelt in einen Logarithmus mit positiver Mantisse und bloss negativer Kennziffer. Es ist nämlich offenbar

$-2{,}5337554 = 3-2{,}5337554-3 = 0{,}4662446-3$

Nun entspricht der Mantisse 0,4662446 die Zahl 29258 und da die Kennziffer $= -3$, so hat man:

$\text{Num}\log -2{,}5337554 = \text{Num}\log 0{,}4662446-3 = 0{,}0029258.$

184. Beispiele logarithmischer Berechnung von numerischen Ausdrücken.

$$\sqrt[5]{\tfrac{239}{8541}} = x = ?$$

1ste Art: $\log x = \frac{1}{5}[\log 239 - \log 8541]$

oder $\log x = \frac{1}{5}[2{,}3783979 - 3{,}9315087]$

$$= \tfrac{1}{5}[-1{,}5531108] = -\frac{1{,}5531108}{5}$$

$$= -0{,}3106222$$

$$= 1-0{,}3106222-1 = 0{,}6893778-1.$$

Daher $x = \text{Num}\log 0{,}6893778-1 = 0{,}4890776.$

2te Art:

$$\log x = \tfrac{1}{5}[\log 239 - \log 8541]$$

$$= \tfrac{1}{5}[2{,}3783979 - 3{,}9315087]$$

$$= \tfrac{1}{5}[4{,}3783979 - 2 - 3{,}9314087]$$

$$= \frac{0{,}4468892-2}{5} = \frac{3{,}4468892-5}{5}$$

$$= 0{,}6893778-1;$$

daher $x = \text{Num}\log 0{,}6893778-1 = 0{,}4890776$

Bei der 1sten Art ist die negative Differenz zwischen log 239 und log 8541 unmittelbar gebildet, durch 5 dividirt und endlich auf die Form eines Logarithmus mit positiver Mantisse und bloss negativer Kennziffer gebracht, bei der 2ten dagegen durch Addition und Subtraktion von 2 Einheiten zum Minuenden in Form einer positiven Mantisse und einer negativen Kennziffer dargestellt worden. Vor der Divison durch 5 wurde der Logarithmus noch so umgeformt, dass die negative Kennziffer durch 5 theilbar wurde.

2tes Beispiel: $\sqrt{\frac{17{,}885914 \cdot \sqrt[3]{0{,}0054343784}}{87{,}434972}} = x = ?$

$$\log x = \tfrac{1}{2}[\log 17{,}885914 + \tfrac{1}{3}\log 0{,}0054343784 - \log 87{,}434972]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[1{,}2525111 + \frac{0{,}7351499-3}{3} - 1{,}9416852\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}[1{,}2525111 + 0{,}2450499 - 1 - 1{,}9416852]$$

$$= \frac{0{,}5558758-2}{2} = 0{,}2779379-1$$

$$x = \text{Num}\log 0{,}2779379-1 = 0{,}1896435.$$

3tes Beispiel. $\sqrt[5]{\frac{\sqrt[7]{98612} - \sqrt[3]{45642}}{\sqrt[5]{18421} + \sqrt{578}}} = x = ?$

Hier sind vor Allem die durch Addition und Subtraktion verbundenen Theile zu berechnen. Man findet:

$$\sqrt[7]{98612} = 5,169142$$
$$\sqrt[3]{45642} = 35,73728$$
$$\sqrt[5]{18421} = 7,129557$$
$$\sqrt{578} = 24,04163$$

Durch Substitution dieser Werthe findet man zunächst:

$$x = \sqrt[5]{\frac{5,169142-35,73728}{7,129557+24,04163}} = \sqrt[5]{\frac{-30,568138}{31,171187}}$$
$$= \sqrt[5]{-\frac{30,568138}{31,171187}} = -\sqrt[5]{\frac{30,568138}{31,171187}};$$

daher $\quad -x = \sqrt[5]{\frac{30,568138}{31,171187}}$

und $\quad \log - x = \frac{1}{5}[\log 30,568138 - \log 31,171187]$
$$= \frac{1}{5}[1,4852689 - 1,4937533]$$
$$= \frac{1}{5}[0,9915156 - 1]$$
$$= \frac{4,9915156-5}{5} = 0,9983031 - 1$$

Somit $-x =$ Num log $0,9983031 - 1 = 0,9961004$
und $\quad x = -0,9961004.$

185. Bei logarithmischen Berechnungen bedienen sich Manche der sogenannten dekadischen Ergänzung, um die Subtraktion von Logarithmen durch eine Addition zu ersetzen. Man versteht nämlich unter der dekadischen Ergänzung oder dem arithmetischen Complement eines Logarithmus die Differenz zwischen 10 und jenem Logarithmus. So wäre z. B. die dekadische Ergänzung von $2,4592678 = 10 - 2,4592678 = 7,5407322$. Man kann nun, anstatt Logarithmen zu subtrahiren, deren arithmetische Complemente addiren, wenn man nur von der Summe soviel mal 10 subtrahirt, als man Complemente genommen hat. Denn wenn m, n, p, q und r etwa 5 Logarithmen bedeuten, sämmtlich kleiner als 10, von welchen die 2 ersten zu addiren, die 3 letzten zu subtrahiren sind, so wäre das Resultat R offenbar: $R = m+n-p-q-r$, welches unverändert bleibt, wenn man 3 . 10 addirt und wieder subtrahirt. Es wird daher

$$R = m+n+(10-p)+(10-q)+(10-r)-30,$$

wo aber $10-p$, $10-q$ und $10-r$ die arithmetischen Complemente sind von p, q und r.

Wäre ein solcher subtraktiver Logarithmus grösser als 10, so würde man seine Ergänzung zu 20 als arithmetisches Complement betrachten und hätte daher von dem Resultat 20 zu subtrahiren.

186. Aufgabe. Aus dem gewöhnlichen Logarithmus einer Zahl N ihren Logarithmus für eine andere Basis a zu finden.

Sei x der gemeine, y aber der im System mit der Basis a genommene Logarithmus, so hat man:

$$\begin{aligned} 1.,\ 10^x &= N \\ 2.,\ a^y &= N; \text{ daher} \\ 10^x &= a^y \text{ oder} \\ x \log 10 &= y \log a, \text{ woraus folgt:} \\ y &= \frac{\log 10}{\log a} \cdot x. \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Quotienten $\frac{\log 10}{\log a}$ kann man die Logarithmen von 10 und a in einem beliebigen System nehmen. Werden sie im gewöhnlichen System genommen, so ist $\log 10 = 1$ und somit $y = \frac{1}{\log a} \cdot x$.

Wäre z. B. die neue Basis $a=1000$, so wäre $y=x \cdot \frac{1}{\log 1000}$ $= x \cdot \frac{1}{3} = \frac{x}{3}$.

Anwendung der Logarithmen auf die Auflösung der Exponentialgleichungen.

187. Kommt die Unbekannte x als Exponent vor, so heisst die Gleichung Exponentialgleichung und kann auf die Form gebracht werden: $a^x = b$. Um diese aufzulösen, nehmen wir auf beiden Seiten die Logarithmen und erhalten

$$x \log a = \log b, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Beispiel: $a^{mx+f} b^{nx+g} = c^{px+h} d^{qx+k}$.

Wir nehmen auf beiden Seiten die Logarithmen und führen dann die angedeuteten Operationen aus, um die Glieder mit x von den bekannten Gliedern trennen. Wir finden so:

$$(mx+f)\log a+(nx+g)\log b = (px+h)\log c+(qx+k)\log d$$

$$mx\log a + f\log a + nx\log b + g\log b = px\log c + h\log c + qx\log d + k\log d$$

$$mx\log a + nx\log b - px\log c - qx\log d = h\log c + k\log d - f\log a - g\log b$$

$$(m\log a + n\log b - p\log c - q\log d)x = h\log c + k\log d - f\log a - g\log b$$

$$x = \frac{h\log c + k\log d - f\log a - g\log b}{m\log a + n\log d - p\log c - q\log d}.$$

Dieses Resultat liesse sich wieder kürzer schreiben unter Anwendung der Umkehrungen der Sätze 1, 2 und 3 in No. 178. Man bekommt nämlich:

$$x = \frac{\log c^h + \log d^k - \log a^f - \log b^g}{\log a^m + \log b^n - \log c^p - \log d^q} = \frac{\log(c^h d^k) - \log(a^f b^g)}{\log(a^m b^n) - \log(c^p d^q)}$$

$$x = \frac{\log\left(\frac{c^h d^k}{a^f b^g}\right)}{\log\left(\frac{a^m b^n}{c^p d^q}\right)}.$$

2tes Beispiel: $\left(\frac{295}{867}\right)^{3-x} = 622.\left(\frac{56}{39}\right)^{\frac{5x}{9}}$

$$(3-x)[\log 295 - \log 867] = \log 632 + \tfrac{5}{9}x[\log 56 - \log 39]$$

$$3\log 295 - x\log 295 - 3\log 867 + x\log 867 = \log 632 + \tfrac{5}{9}x\log 56 - \tfrac{5}{9}x\log 39$$

$$x\log 867 - x\log 295 - \tfrac{5}{9}x\log 56 + \tfrac{5}{9}x\log 39 = \log 632 + 3\log 867 - 3\log 295$$

$$[\log 867 - \log 295 - \tfrac{5}{9}(\log 56 - \log 39)]x = \log 632 + 3[\log 867 - \log 295]$$

$$x = \frac{\log 632 + 3[\log 867 - \log 295]}{\log 867 - \log 295 - \frac{5}{9}[\log 56 - \log 39]}$$

$$x = \frac{2{,}8007171+3[2{,}9380191-2{,}4698220]}{2{,}9380191-2{,}4698220-\frac{5}{9}[1{,}7481880-1{,}5910646]}$$

$$x = \frac{2{,}8007171+3\,.\,0{,}4681971}{0{,}4681971-\frac{5}{9}\,0{,}1571234}$$

$$x = \frac{2{,}8007171+1{,}4045913}{0{,}4681971-0{,}0872908} = \frac{4{,}2053084}{0{,}3809063}$$

oder $x = 11{,}04027.$

Anwendung der Logarithmen auf Zinseszins- und Rentenrechnungen.

188. Wenn der am Ende eines Jahres fällige Zins nicht bezahlt, sondern wieder zum Capital geschlagen wird, so muss der Schuldner am Ende des zweiten Jahres nicht nur den Zins von

dem ursprünglich angeliehenen Capital, sondern auch noch den Zins von dem zu Ende des 1sten Jahres verfallenen Zins bezahlen. Wird in gleicher Weise während eines bestimmten Zeitraumes zu Ende eines jeden Jahres der Zins wieder zum Capital geschlagen, so wächst das ursprünglich angeliehene Capital zu einer immer grössern Summe an, deren Bestimmung Zinseszinsrechnung oder zusammengesetzte Zinsrechnung genannt wird. Gesetzt z. B. ein Capital von a frcs. stehe n Jahre lang zu $r^0/_0$ auf Zinseszinsen; wie gross wird sein Werth nach n Jahren sein? so können wir in folgender Weise schliessen:

Das Capital ist à $r^0/_0$ ausgeliehen d. h. 100 frcs Capital tragen in 1 Jahr r frcs und daher 1 frc Capital gerade $\frac{r}{100}$ frcs Zins. Es wächst somit 1 frc Capital in einem Jahr auf $1 + \frac{r}{100}$ und daher a frcs auf $a\left(1 + \frac{r}{100}\right)$ frcs an. Bezeichnen wir diese Summe $a\left(1 + \frac{r}{100}\right)$ frcs, auf welche das ursprünglich angeliehene Capital von a frcs im 1sten Jahre anwächst, für einen Augenblick mit z, so können wir nun weiter fragen: Auf welche Summe werden diese z frcs im 2ten Jahre anwachsen? Auch im 2ten Jahre wächst jeder Frkn Capital auf $1 + \frac{r}{100}$ frcs an; somit die z frcs auf $z\left(1 + \frac{r}{100}\right) = a\left(1 + \frac{r}{100}\right)\left(1 + \frac{r}{100}\right) = a\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2$ $= z_1$ frcs. Wir haben daher am Ende des 2ten oder zu Anfang des 3ten Jahres $z_1 = a\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2$ frcs als zinstragendes Capital. Da im 3ten Jahre wieder jeder Frkn Capital auf $1 + \frac{r}{100}$ frcs anwächst, so werden die z_1 frcs, die wir zu Ende des 2ten Jahres haben, im Laufe des dritten Jahres auf $z_1\left(1 + \frac{r}{100}\right) =$ $a\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2\left(1 + \frac{r}{100}\right) = a\left(1 + \frac{r}{100}\right)^3$ frcs anwachsen. Indem wir auf gleiche Weise fortschliessen, finden wir, dass das ursprüngliche Capital von a frcs in n Jahren auf die Summe von $a\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$ frcs anwächst, so dass, wenn A den Werth des ursprünglichen Capitals nach n Jahren bezeichnet, wir die Relation haben:

$$A = a\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n \quad \text{I.}$$

Nun wollen wir zur Abkürzung $1 + \frac{r}{100} = p$ setzen und in Abweichung von dem gewöhnlichen Sprachgebrauch dieses p, das $= 1 + \frac{r}{100}$, den Zinsfuss heissen; dann lässt sich die Gleichung I einfacher so schreiben:

$$A = ap^n \quad \text{I.}$$

Es wäre somit Zinsfuss in unserm Sinne nichts anders als die Summe, auf welche die Einheit anwächst in einem Jahr und daher

$$\begin{aligned} p &= 1{,}04 \quad \text{bei } 4\,\% \\ &= 1{,}045 \quad \text{bei } 4\tfrac{1}{2}\,\% \\ &= 1{,}05 \quad \text{bei } 5\,\% \\ &= 1 + \frac{r}{100} \text{ bei } r\,\%, \end{aligned}$$

während man in der gewöhnlichen Geschäftssprache unter Zinsfuss den Zins von 100 in einem Jahr versteht, also Zinsfuss und Procent als gleichbedeutend anwendet.

188a. Die Gleichung I lehrt uns unmittelbar, dass man den Werth eines n Jahre Zins auf Zins ausstehenden Capitals findet, wenn man dasselbe mit der $n$ten Potenz des Zinsfusses multiplizirt. Es sind also 10000 frcs Capital nach 8 Jahren werth:

1., à $4\,\%$: $10000 \cdot (1{,}04)^8$
2., à $4\frac{1}{2}\,\%$: $10000 \cdot (1{,}045)^8$
3., à $5\,\%$: $10000 \cdot (1{,}05)^8$ frcs.

Da die Fundamentalgleichung I eine Relation angibt zwischen dem Anfangscapital a, dem Zinsfuss p, der Anzahl der Jahre n, und dem Endwerth A, so kann man mittelst derselben successive jede dieser 4 Grössen berechnen, wenn die 3 andern bekannt sind. Man findet aus der Gleichung I successive:

$$a = \frac{A}{p^n}$$

$$p = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}$$

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log p},$$

so dass also die Gleichung I in folgenden 4 Formen geschrieben werden kann:

$$\left.\begin{aligned} 1., \; A &= ap^n \\ 2., \; a &= \frac{A}{p^n} \\ 3., \; p &= \sqrt[n]{\frac{A}{a}} \\ 4., \; n &= \frac{\log A - \log a}{\log p} \end{aligned}\right\} \text{(I.)}$$

Die zweite Form $a = \frac{A}{p^n}$ lehrt uns den Anfangswerth eines Capitals finden, das während n Jahren zum Zinsfuss p auf die Summe A anwuchs. Sie zeigt, dass wir diesen Anfangswerth auch finden, wenn wir den Endwerth A durch die $n$te Potenz des Zinsfusses dividiren. Nun ist aber die Summe a, welche erforderlich wäre, um in n Jahren, Zins auf Zins gerechnet, beim Zinsfuss p auf A anzuwachsen, auch der Baarwerth eines Capitals A, das man erst nach n Jahren ohne Zins zu bezahlen hätte. Der Baarwerth (Jetztwerth) eines erst nach n Jahren ohne Zins zahlbaren Capitals wird daher gefunden, wenn man dasselbe durch die $n$te Potenz des Zinsfusses dividirt.

Die Formel $A = ap^n$ gibt uns den Werth eines Capitals nach n Jahren, die Formel $a = \frac{A}{p^n}$ aber den Baarwerth eines erst nach n Jahren ohne Zins zahlbaren Capitals oder, wenn wir lieber wollen, den Werth eines Capitals A vor n Jahren. Die Berechnung des Werthes, welchen eine Summe zu einer bestimmten Zeit hat, nennt man auch Discontirung und sagt: ein Capital werde um n Jahre vorwärts oder rückwärts discontirt, wenn man den Werth berechnet, welchen dasselbe nach oder vor n Jahren hat, Zins auf Zins gerechnet, unter der Voraussetzung, dass der Debitor während dieser Zeit das Capital nicht zu verzinsen brauche, respective das Capital in der Zwischenzeit ganz zu seiner Verfügung stehe. Es ist selbstverständlich, dass wenn ich 8000 frcs erst nach 10 Jahren zu bezahlen, bis dahin aber zu verzinsen habe, ich mich heute dieser Schuld nicht anders als durch Bezahlung der vollen Summe entledigen kann d. h. dass der Werth eines solchen verzinslichen Capitals für den Schuldner heute genau der gleiche ist, wie vor oder nach 10 Jahren.

Beispiele. 1. Man übergibt einer Bank heute die Summe von 8500 frcs. Was hat man nach 20 Jahren zu fordern, wenn die Zinsen à 4 % berechnet werden?

In unserer Formel $A = ap^n$ ist $a = 8500$, $p = 104$, $n = 20$, A endlich unsere Unbekannte x; daher die Gleichung:

$$x = 8500 \cdot (1{,}04)^{20}.$$

Also $\log x = \log 8500 + 20 \cdot \log 1{,}04.$

Nun
$$\log 8500 = 3{,}9294189$$
$$20 \cdot \log 1{,}04 = 0{,}3406660$$

Daher
$$\log x = 4{,}2700849.$$
$$x = \text{Num} \log 4.2700849 = 18624{,}5.$$

Die Vermehrung des Capitals in 20 Jahren beträgt demnach über 10,000 frcs.

2. Aufgabe: Jemand hat ohne Zins die Summe von 10000 frcs nach 10 Jahren zu bezahlen. Wenn er nun vorzieht, die Schuld sogleich abzutragen, was müsste er bezahlen, wofern $4\,^0/_0$ berechnet werden?

Hier ist $A = 10000$, $p = 1{,}04$, $n = 10$ und $a = x$.

Daher
$$10000 = x \cdot (1{,}04)^{10} \text{ oder}$$
$$x = \frac{10000}{1{,}04^{10}}.$$

Nun
$$\log 10000 = 4$$
$$\log (1{,}04)^{10} = 0{,}1703330$$
$$\log x = 3{,}8296670$$

und
$$x = \text{Num} \log 3{,}8296670 = 6755{,}648.$$

Der heutige Werth eines erst nach 10 Jahren zahlbaren Capitals von 10000 frcs beträgt also bei 4 procentiger Verzinsung 6755,648 frcs.

3. Aufgabe: Wie lange müssen 1000 frcs an Zinsen stehen, um à $4\,^0/_0$ auf 2191 frcs anzuwachsen?

Hier wird nach n gefragt und gegeben ist $A = 2191$, $a = 1000$ und $p = 1{,}04$.

$$\text{Daher } x = \frac{\log A - \log a}{\log p} = \frac{3{,}3406424 - 3}{0{,}0170333} = \frac{0{,}3406424}{0{,}0170333}$$
$$x = \frac{3406424}{170333} = 20 \text{ beinahe.}$$

4. Aufgabe. Zu wie viel Procent müssen 1200 frcs ausgeliehen werden, um in 18 Jahren auf 2887,942 frcs anzuwachsen?

Hier wird nach p gefragt und zwar ist $A = 2887{,}942$, $a = 1200$ und $n = 18$; daher

$$x = p = \sqrt[18]{\frac{2887{,}942}{1200}}$$

$$\text{und } \log x = \tfrac{1}{18}[\log 2887{,}942 - \log 1200]$$
$$= \tfrac{1}{18}[3{,}4605836 - 3{,}0791812]$$
$$\log x = \frac{0{,}3814074}{18} = 0{,}0211893$$
$$x = p = \text{Num} \log 0{,}0211893 = 1{,}05;$$

somit muss das Capital à $5^0/_0$ ausgeliehen werden.

5. Aufgabe. In welcher Zeit würde ein à $5^0/_0$ angeliehenes Capital sich verdoppeln?

Hier dürfen wir nur in der Gleichung

$$A = ap^n$$

$A = 2a$, $p = 1{,}05$ und $n = x$ setzen, dann kommt

$$2a = a(1{,}05)^x \text{ oder}$$
$$2 = (1{,}05)^x,$$

somit
$$\log 2 = x \, . \log 1{,}05$$

nd folglich
$$x = \frac{\log 2}{\log 1{,}05} = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893} = \frac{3010300}{211893} = 14{,}2$$

d. h. nach $14\frac{1}{5}$ Jahren, also zwischen dem 14ten und 15ten Jahr verdoppelt sich das Capital.

6. Aufgabe. Auf ein Gut bietet A die Summe von 30000 Thlr. baar, B die Summe von 33500 Thlr., zahlbar nach 3 Jahren ohne Zins, C endlich 40000 Thlr., zahlbar nach 7 Jahren ohne Zins; welches dieser 3 Angebote ist das höchste, die Zinsen à $5^0/_0$ berechnet; und um wie viel übertrifft es die beiden andern an baarem Werthe?

Auflösung. Hat man, wie hier, mehrere zu verschiedenen Zeiten ohne Zins zahlbare Capitalien mit einander zu vergleichen, so darf man sie nur auf dieselbe Zeit discontiren. Wir können hier entweder

1) die Baarwerthe der 3 Angebote berechnen oder
2) das Angebot des A um 3 Jahre vorwärts und das des C um 4 Jahre rückwärts discontiren, oder
3) die Angebote des A und des B vorwärts discontiren, das 1ste um 7, das 2te um 4 Jahre.

In den beiden letzten Fällen müssten aber die Unterschiede zwischen dem höchsten Angebot und den beiden andern noch rückwärts discontirt werden und zwar im 2ten Fall um 3, im 3ten aber um 7 Jahre. Der erste Weg ist demnach der kürzeste. Wir finden dabei:

1) Baarwerth des Angebotes von A = 30000 Thlr.

2) Baarwerth des Angebotes von $B = \frac{33500}{(1,05)^3} = 28938,56$ und

3) „ „ „ „ $C = \frac{40000}{(1,05)^7} = 28427,23.$

Das Angebot des A ist somit das höchste und zwar übertrifft es das von B um 1061,44 Thlr., dasjenige des C sogar um 1572,77 oder beinahe 1573 Thlr. an baarem Werthe.

189. Es kommt zuweilen vor, dass die Zinsen, statt zu Ende eines jeden Jahres, schon in kürzern Zeiträumen, z. B. halbjährlich, monatlich oder wöchentlich zum Capital geschlagen werden. Es ist leicht einzusehen, dass wir für diesen Fall gar keine neue Formel abzuleiten brauchen, sondern dass die bisherige Formel: $A = ap^n$ vollkommen genügt, wenn wir nur die Bedeutung des p und des n in der Art abändern, dass wir 1) unter p die Summe verstehen, auf welche die Einheit in einem solchen kürzern Zeitraume anwächst und 2) n ersetzen durch die Anzahl der kleinern Zeiträume (Halbjahre, Monate oder Wochen), welche auf n Jahre fallen.

Beispiel. Auf welche Summe wachsen 6800 frcs in 10 Jahren an, wenn die à 5% berechneten Zinse alle Halbjahre zum Capital geschlagen werden?

Auflösung: Das Capital ist zu 5% angeliehen d. h. 100 frcs tragen in 1 Jahre 5 und in einem halben Jahre $\frac{5}{2} = 2,5$ frcs Zins; 1 frc Capital trägt somit in dieser Zeit 0,025 frcs Zins und wächst daher in $\frac{1}{2}$ Jahr an auf 1,025 frcs. Es ist daher $p = 1,025$ und $n = 2 . 10 = 20$ zu setzen; somit

$$x = 6800 . (1,025)^{20} = 11142,61 \text{ frcs.}$$

Würde die Verzinsung jährlich stattfinden, so wäre $p = 1,05$ und $n = 10$ und man hätte

$$x = 6800 . (1,05)^{10} = 11076,48 \text{ frcs.}$$

Der Werth der 6800 frcs nach 10 Jahren ist somit bei halbjährlicher Verzinsung etwas grösser, als bei bloss jährlicher Verzinsung, was sich auch erwarten liess. Indessen darf man nicht etwa glauben, dass der Vortheil gar bedeutend sei, wenn die Verzinsung in sehr kurzen Zwischenräumen z. B. alle Wochen oder gar alle Tage stattfinde. So fände man z. B., dass 100 frcs. à 5%

1) bei jährlicher Verzinsung in 1 Jahr auf 105
in 10 Jahren auf 162,89

2) bei monatl. Verzinsung in 1 Jahr auf $100 . (1+\frac{5}{1200})^{12} = 100.(1,004167)^{12} = 105,1165$, in 10 Jahren auf 164,70 frcs,

3) bei wöchentlicher Verzinsung in 1 Jahr auf 105,12
in 10 Jahren aber auf 164,83

anwachsen.

190. Ist die Anzahl n der Jahre, während welcher das Capital Zins auf Zins ausstehen soll, keine ganze, sondern eine gemischte Zahl, so dürfte man keineswegs in der Formel $A = ap^n$ einfach n durch diese gemischte Zahl ersetzen. Hätte man z. B. den Werth eines Capitals von a frcs in $5\frac{3}{4}$ Jahren à $4\frac{0}{0}$ zu berechnen, so wäre dieser nicht $= a \cdot (1{,}04)^{5\frac{3}{4}} = a \cdot (1{,}04)^{\frac{23}{4}}$, sondern man müsste erst den Werth der a frcs nach 5 Jahren ausrechnen, der $= a \cdot (1{,}04)^5$ frcs und dann noch die Summe bestimmen, auf welche dieser Werth in den nächsten $\frac{3}{4}$ Jahren anwächst. Da nun bei $4\frac{0}{0}$ 1 frc in 1 Jahre 0,04 frcs Zins trägt, so wird er in $\frac{1}{4}$ Jahr $\frac{1}{100}$ und in $\frac{3}{4}$ Jahren $\frac{3}{100}$ frcs Zins tragen. Es wird daher 1 frc Capital in $\frac{3}{4}$ Jahren auf 1,03 frcs anwachsen und somit die $a \cdot (1{,}04)^5$ frcs auf $a \cdot (1{,}04)^5 \cdot 1{,}03$ frcs, ein Resultat, das augenscheinlich verschieden ist von $a \cdot (1{,}04)^{\frac{23}{4}}$ oder von $a \cdot (1{,}04)^5 \cdot (1{,}04)^{\frac{3}{4}}$.

II. Hauptfall.

191. Gesetzt, man übergebe heute einem Banquier die Summe von a frcs und lege überdiess noch zu Ende eines jeden Jahres eine bestimmte Summe hinzu, so entsteht die Frage: Was hat man am Schluss des n ten Jahres d. h. unmittelbar nach der gemachten n ten Einlage beim Banquier zu gut? Seien a_1, a_2, a_3 . . . a_n die Einlagen zu Ende des 1sten, 2ten, 3ten . . . . bis n ten Jahres, so bilden die Grössen a, a_1, a_2, a_3 . . . bis a_n Capitalien, welche, Zins auf Zins gerechnet, das erste n, das zweite $n - 1$, das dritte $n - 2$ Jahre u. s. f., das vorletzte noch 1, das letzte 0 Jahre ausstehen. Es wird also

die ursprüngliche Einlage von a frcs auf ap^n
die 2te „ „ a_1 „ „ $a_1 p^{n-1}$
„ 3te „ „ a_2 „ „ $a_2 p^{n-2}$
. . . .
. . . .
die $n$te „ „ a_{n-1} „ „ $a_{n-1} p$ frcs

anwachsen, endlich die letzte Einlage von a_n frcs $= a_n$ frcs bleiben, so dass, wenn A das Gesammtguthaben am Schlusse des $n$ten Jahres bedeutet, man hat:

$$A = ap^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots a_{n-1} p + a_n.$$

So lange die Einlagen a, a_1, a_2, a_3 bis a_n verschieden sind, lassen sich die Glieder rechts nicht zusammenziehen; man muss dann jedes einzeln berechnen und die Resultate addiren.

Wenn dagegen die zu Ende eines jeden Jahres gemachten Zuschüsse alle einander gleich sind, wenn also $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots a_n = b$, so lässt sich die obige Gleichung kürzer schreiben. Man hat dann zunächst:

$$A = ap^n + b[p^{n-1} + p^{n-2} + p^{n-3} + \ldots p^2 + p + 1]$$

Bezeichnen wir nun mit s den Ausdruck in der eckigen Klammer, so dass

$$s = p^{n-1} + p^{n-2} + p^{n-3} + \ldots p^2 + p + 1,$$

so ist $$sp = p^n + p^{n-1} + p^{n-2} + p^{n-3} + \ldots p^2 + p$$

woraus durch Subtraktion sich ergibt:

$$sp - s = p^n - 1$$

$$s(p-1) = p^n - 1$$

oder $$s = \frac{p^n - 1}{p-1}.$$

Man hat daher die Gleichung

$$A = ap^n + \frac{b(p^n - 1)}{p-1} \quad \text{II.}$$

Wäre endlich der jährliche Zuschuss b gleich dem Anfangskapital a, so hätte man

$$A = ap^n + ap^{n-1} + ap^{n-2} + \ldots . ap^2 + ap + a$$

oder $$A = a[p^n + p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots . p + 1]$$

$$= \frac{a[p^{n+1} - 1]}{p-1},$$

ein Resultat, das sich aus II auch ergeben müsste, wenn man dort $b = a$ setzen würde. In der That fände man:

$$A = ap^n + \frac{a(p^n - 1)}{p-1} = \frac{ap^n(p-1) + a(p^n - 1)}{p-1}$$

oder $$A = \frac{ap^{n+1} - ap^n + ap^n - a}{p-1} = \frac{ap^{n+1} - a}{p-1}$$

oder $$A = \frac{a(p^{n+1} - 1)}{p-1} \quad (\text{II}, \alpha).$$

Mittelst der Formel II könnte man nun wieder nach jeder der 5 Grössen A, a, b, p und n fragen, wenn die 4 übrigen gegeben sind. Die Bestimmung von p würde auf eine höhere Gleichung führen. Statt indessen die allgemeine Gleichung II nach a, b und n aufzulösen und die so erhaltenen allgemeinen Formeln in speciellen Fragen zu benutzen, wollen wir uns bloss die Glei-

chung II notiren, dann in jedem besondern Fall die gegebenen speziellen Zahlwerthe einsetzen und die so erhaltene Gleichung auflösen.

III. Hauptfall.

192. Häufiger als der eben behandelte kommt der umgekehrte Fall vor, dass man einem Banquier eine bestimmte Summe von a frcs auf Zinseszinsen übergibt und dann zu Ende eines jeden Jahres eine bestimmte Summe b zurückzieht. Man kann nun fragen: Wenn man n Jahre lang zu Ende eines jeden Jahres die Summe b zurückzog, was hat man dann schliesslich beim Banquier noch zu gut?

Auflösung: Die a frcs, welche dem Banquier übergeben wurden, wachsen in n Jahren zum Zinsfuss p auf ap^n frcs an. Wenn man also in der Zwischenzeit gar Nichts bezöge, so hätte man am Schluss des $n$ten Jahres gerade ap^n frcs zu fordern. Allein die b frcs, welche schon zu Ende des 1sten Jahres bezogen wurden, hätten in den noch übrigen $n-1$ Jahren auf bp^{n-1} frcs anwachsen können und es ist daher ganz einerlei, ob der Banquier zu Ende des ersten Jahres die Summe b oder am Schluss des $n$ten Jahres die Summe bp^{n-1} ausbezahle. In gleicher Weise finden wir, dass die b frcs, die er zu Ende des 2ten Jahres bezog, in den noch übrigen $n-2$ Jahren auf bp^{n-2} frcs angewachsen wären u. s. f.; endlich die vorletzte Zahlung von b frcs hätte in dem letzten Jahre auf bp frcs anwachsen können, so dass also der Gesammtwerth der vom Banquier an den ursprünglichen Einleger geleisteten Zahlungen gerade so gross ist, als ob er ihm am Schluss des $n$ten Jahres auf einmal ausbezahlt hätte

$$bp^{n-1}+bp^{n-2}+bp^{n-3}+\ldots bp+b \text{ oder}$$

$b[p^{n-1}+p^{n-2}+p^{n-3}+\ldots p+1]=\dfrac{b(p^n-1)}{p-1}$ frcs. Nun war der Banquier in Folge der ursprünglichen Einlage schuldig ap^n; er hat aber bereits bezahlt $\dfrac{b(p^n-1)}{p-1}$. Somit beträgt das Guthaben des Einlegers nur noch $ap^n-\dfrac{b(p^n-1)}{p-1}$ und wenn wir daher mit A den Betrag dieses Guthabens bezeichnen, so haben wir die Gleichung:

$$A=ap^n-\frac{b(p^n-1)}{p-1} \qquad \text{III},$$

eine Formel, welche aus II einfach hervorginge, wenn man b durch $-b$ ersetzen, d. h. die jährlichen Zuschüsse in Abzüge verwandeln würde.

Es ist nun klar, dass je nach der Grösse der jährlichen Abzüge d. h. je nach der Grösse des b das Guthaben A eine mit der Zeit wachsende oder eine konstante oder endlich eine mit wachsendem n abnehmende Grösse sein wird. Wenn nämlich der jährliche Abzug b kleiner ist als der einfache Zins des Capitals a, so wird A mit n immer wachsen, was auch ganz natürlich ist, da ja immer noch ein Theil des Jahreszinses zum Capital geschlagen wird. Wäre dagegen der jährliche Abzug b grösser als der einfache Zins des Capitals a, so würde A eine mit wachsendem n abnehmende Grösse sein; es müsste also einmal ein Augenblick eintreten, in welchem $A = 0$ geworden und von welchem an bei Fortdauer der jährlichen Zahlungen die Grösse A negativ ausfiele d. h. der ursprüngliche Einleger zum Schuldner des Banquier würde.

Wäre endlich b gerade gleich dem einfachen Zins, so müsste A konstant sein. In der That! Da a frcs in 1 Jahr auf ap frcs anwachsen, so wird der einfache Jahreszins $= ap - a$ sein. Führen wir in die Gleichung III die Voraussetzung $b = ap - a$ ein, so kommt

$$A = ap^n - \frac{(ap-a)(p^n-1)}{p-1} = ap^n - \frac{a(p-1)(p^n-1)}{p-1}$$

oder $A = ap^n - a(p^n - 1) = ap^n - ap^n + a$

oder $A = a$

d. h. A ist dann von der Zeit n ganz unabhängig und stets gleich dem Anfangskapital.

IV. Hauptfall.

193. Man will häufig die jährlichen Bezüge b so einrichten, dass nach Verfluss einer bestimmten Zeit (nach n Jahren) Capital und Zins aufgezehrt, das Guthaben beim Banquier also auf Null reduzirt sei. In diesem Fall nennt man den jährlichen Abzug b eine Jahresrente oder Annuität. Die Formel für Beantwortung der hierauf bezüglichen Fragen geht aus der Formel III hervor, wenn man dort einfach $A = 0$ setzt, wodurch man erhält:

$$0 = ap^n - \frac{b(p^n-1)}{p-1}$$

oder
$$ap^n = \frac{b(p^n-1)}{p-1} \qquad \text{IV}$$

Da wir hierin eine Relation haben zwischen dem Einlagecapital a, der Rente b, dem Zinsfuss p und der Zeit n, so können wir mittelst dieser Relation nach einander folgende Fragen beantworten:

1. Wie gross muss das Einlagecapital sein, um während einer bestimmten Zeit eine jährliche Rente von vorgeschriebener Grösse zu beziehen?

2. Für eine bestimmte Summe von a frcs möchte man eine $n$jährige Rente kaufen. Wie gross wird diese ausfallen, wenn die Zinsen zu $r\,\frac{0}{0}$ berechnet werden?

3. Auf wie lange kann man für die Summe von a frcs eine Jahresrente b bewilligen, wenn die Zinsen zu $r\,\frac{0}{0}$ berechnet werden?

4. Eine Anstalt bezahlt an Jemand n Jahre lang eine Rente von b Franken. Wenn er dafür a frcs einzahlen musste, wie viel Procent berechnet die Anstalt?

Hiebei ist jedoch zu bemerken, dass wir die letzte für $n > 2$ hier nicht lösen können; denn die Gleichung

$$ap^n = \frac{b(p^n - 1)}{p - 1}$$

wird, wenn wir die Division von $p^n - 1$ durch $p - 1$ ausführen, vom $n$ten Grade in Bezug auf p.

Die Gleichung IV dient auch für Amortisationen; denn wenn ein Capital von a frcs auf n Jahre Zins auf Zins ausgeliehen ist und man zahlt am Ende eines jeden Jahres die Summe b zurück, so ist nach n Jahren die Schuld vollständig getilgt.

Wir können nun als die allgemeinste, alle speziellen Fälle in sich fassende Formel folgende betrachten:

$$A = ap^n + \frac{b(p^n - 1)}{p - 1},$$

worin a das Anlagecapital, b den jährlichen Zuschuss oder den jährlichen Abzug (Rente), p den Zinsfuss, n die Anzahl der Jahre und A das Guthaben bei der Bank am Schlusse des $n$ten Jahres bedeutet. Wir haben hiebei nur

1. $b = 0$ zu setzen bei der blossen Zinseszinsrechnung, wodurch kommt: $A = ap^n$.

2. b positiv zu nehmen im Fall der jährlichen Zuschüsse, also

$$A = ap^n + \frac{b(p^n - 1)}{p - 1}$$

3. b negativ zu nehmen im Fall der jährlichen Abzüge, also

$$A = ap^n - \frac{b(p^n - 1)}{p - 1}$$

4. $A=0$ zu setzen bei den Jahresrenten oder Annuitäten, wodurch

$$ap^n = \frac{b(p^n - 1)}{p - 1}.$$

Beispiele. 1. Ein Capital von 6000 Thlr. steht zu $5\frac{0}{0}$ auf Zinseszinsen. Wenn man nun überdiess zu Ende eines jeden Jahres noch 500 Thlr. hinzulegt, auf welche Summe wird es dann in 10 Jahren anwachsen?

Wir brauchen hier die Formel II

$$A = ap^n + \frac{b(p^n - 1)}{p - 1}$$

worin $a=6000$, $b=500$, $p=1{,}05$, $n=10$ und A unsere Unbekannte x ist.

Daher

$$x = \underbrace{6000 \,.\, (1{,}05)^{10}}_{A} + \underbrace{\frac{500 \,.\, (1{,}05^{10} - 1)}{1{,}05 - 1}}_{B}$$

Bezeichnen wir den 1sten Theil mit A, den 2ten mit B, so ist $x=A+B$ und wir müssen hier jeden der beiden Theile besonders berechnen. Es ist

$$B = \frac{500(1{,}05^{10} - 1)}{0{,}05} = 10000 \,.\, (1{,}05^{10} - 1).$$

Es ist

$$\log 1{,}05^{10} = 10 \,.\, \log 1{,}05 = 10 \,.\, 0{,}0211893 = 0{,}2118930$$

und $$1{,}05^{10} = \text{Num} \log 0{,}2118930 = 1{,}628895;$$

daher $$1{,}05^{10} - 1 = 0{,}628895 \text{ und}$$

$$B = 10000 \,.\, 0{,}628895 = 6288{,}95.$$

Es ist ferner

$$A = 6000 \,.\, 1{,}05^{10} = 6000 \,.\, 1{,}628895$$
$$= 9773{,}37;$$

somit $$x = A + B = 9773{,}37 + 6288{,}95 = 16062{,}32.$$

2. Aufgabe. Jemand will für 30500 Frkn. eine Jahresrente von 2000 Frkn. kaufen. Auf wie lange kann dieselbe bewilligt werden, wenn man die Zinsen zu $4\frac{0}{0}$ berechnet?

Wir benutzen hier die Formel IV, also

$$ap^n = \frac{b(p^n - 1)}{p - 1},$$ wo wir

$a=30500$, $b=2000$, $p=1{,}04$ und $n=x$ zu setzen haben. Wir bekommen daher

$$30500 \, . \, (1{,}04)^x = \frac{2000(1{,}04^x - 1)}{1{,}04 - 1}$$

oder

$$30500 \, . \, (1{,}04)^x = \frac{2000(1{,}04^x - 1)}{0{,}04}$$

$$30500 \, . \, (1{,}04)^x = 50000 \, . \, (1{,}04^x - 1)$$

$$30500 \, . \, (1{,}04)^x = 50000 \, . \, (1{,}04)^x - 50000$$

$$30500 \, . \, (1{,}04)^x - 50000 \, . \, (1{,}04)^x = -50000$$

$$19500 \, . \, (1{,}04)^x = 50000$$

$$195 \, . \, (1{,}04)^x = 500$$

$$(1{,}04)^x = \tfrac{500}{195}$$

$$x \log 1{,}04 = \log 500 - \log 195$$

$$x = \frac{\log 500 - \log 195}{\log 1{,}04} = \frac{2{,}6989700 - 2{,}2900346}{0{,}0170333}$$

$$x = \frac{0{,}4089354}{0{,}0170333} = \frac{4089354}{170333} = 24.$$

194. Anmerkung 1. Die Formel II

$$A = ap^n + \frac{b(p^n - 1)}{p - 1}$$

gibt uns den Werth des Guthabens am Schlusse des $n$ten Jahres. Wollten wir den Baarwerth haben, so dürften wir nur die obige Summe noch um n Jahre rückwärts discontiren d. h. durch p^n dividiren. Bezeichnet A_0 diesen Baarwerth, so wäre

$$A_0 = a + \frac{b(p^n - 1)}{b^n(p - 1)}$$

Wären alle Zahlungen gleich der Anfangseinlage a, so fänden wir, wie früher (Formel II α):

$$A = \frac{a(p^{n+1} - 1)}{p - 1}; \text{ somit der Baarwerth}$$

$$A_0 = \frac{a}{p^n} \cdot \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}.$$

Anmerkung 2. Wäre gar keine Anfangszahlung geleistet, sondern nur zu Ende eines jeden Jahres die Summe b einbezahlt worden, so würde uns die Formel II ebenfalls den Werth des Guthabens am Schlusse des $n$ten Jahres liefern, wenn wir nur $a = 0$ setzen würden. Dadurch käme:

$$A = \frac{b(p^n - 1)}{p - 1}.$$

Wollen wir den Baarwerth A_0 dieses Guthabens, so dürfen wir dasselbe nur um n Jahre rückwärts discontiren; also

$$A_0 = \frac{A}{p^n} = \frac{b(p^n-1)}{p^n(p-1)} = \frac{b}{p^n} \cdot \frac{p^n-1}{p-1} \quad (\alpha)$$

Diess ist zugleich der Baarwerth einer $n$jährigen, am Schlusse eines jeden Jahres zahlbaren Rente, was sich übrigens auch aus unserer Formel IV ergibt, wenn wir sie nach a auflösen.

Aus $\quad ap^n = \frac{b(p^n-1)}{p-1}$ folgt nämlich unmittelbar

$$a = \frac{b(p^n-1)}{p^n(p-1)} \quad (\alpha).$$

Anmerkung 3. Wäre die Zahlung b nicht am Ende, sondern zu Anfang eines jeden Jahres geleistet worden, so könnte auch da noch die allgemeine Formel II, nämlich

$$A = ap^n + \frac{b(p^n-1)}{p-1}$$

benutzt werden; man müsste aber dann $a=b$ nehmen und zudem n durch $n-1$ ersetzen, indem nämlich die Formal II voraussetzt, dass $n+1$ Zahlungen geleistet worden seien, eine erste $= a$ und n andere $= b$. Durch diese Substitutionen verwandelt sich unsere Formel II in folgende:

$$A = bp^{n-1} + \frac{b(p^{n-1}-1)}{p-1}$$

oder

$$A = \frac{bp^{n-1}(p-1)+b(p^{n-1}-1)}{p-1}$$

$$A = \frac{bp^n-bp^{n-1}+bp^{n-1}-b}{p-1}$$

oder

$$A = \frac{bp^n-b}{p-1} = \frac{b(p^n-1)}{p-1}$$

Das wäre nun der Werth einer solchen $n$jährigen, zu Anfang eines jeden Jahres zahlbaren Rente am Schlusse des $(n-1)$ten oder zu Anfang des $n$ten Jahres. Ihr Baarwerth findet sich also, wenn wir diesen noch um $n-1$ Jahre rückwärts discontiren. Bezeichnen wir diesen Baarwerth mit A_0', so haben wir:

$$A_0' = \frac{b(p^n-1)}{p^{n-1}(p-1)} = \frac{b}{p^{n-1}} \cdot \frac{p^n-1}{p-1} \quad (\beta).$$

Von den beiden Formeln

$$A_0 = \frac{b}{p^n} \cdot \frac{p^n-1}{p-1} \quad (\alpha)$$

und

$$A_0' = \frac{b}{p^{n-1}} \cdot \frac{p^n-1}{p-1} \quad (\beta)$$

gibt uns also die erste den Baarwerth einer n jährigen, am Schlusse eines jeden Jahres fälligen Rente,

die zweite (β) den Baarwerth einer n jährigen, aber zu Anfang eines jeden Jahres zahlbaren Rente.

Neunter Abschnitt.

Von den Progressionen.

A. Arithmetische Progressionen.

195. Eine Aufeinanderfolge von Grössen, deren jede aus der vorangehenden durch Addition einer konstanten Zahl entsteht, heisst arithmetische Progression; jene konstante Zahl heisst Differenz, die einzelnen Grössen selber werden Glieder der Progression genannt. Die Progression ist eine steigende oder eine fallende, je nachdem das folgende Glied grösser oder kleiner als das vorangehende ausfällt. Ist z. B. 2 das erste Glied und 3 die Differenz, so wäre die Progression

2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20 . 23 .. 26 . 29 . 32 . 35 etc.

eine steigende. Würde man die Differenz aber negativ, etwa $= -3$ wählen, so bekäme man, wenn 40 als Anfangsglied genommen wird, die fallende Progression

40 . 37 . 34 . 31 . 28 . 25 . 22 . 19 . 16 . 13 . 10 . 7 . 4 . 1.

Eine Progression wird also eine steigende oder eine fallende, je nachdem die Differenz positiv oder negativ ist.

196. Aufgabe: Irgend ein Glied der Progression zu finden, wenn man das erste Glied a und die Differenz d kennt.

Bezeichnen wir allgemein mit A_r das $r$te Glied vom Anfang, so folgt unmittelbar aus der Definition der Progression, dass man jedes folgende Glied findet, wenn man zum vorhergehenden die Differenz addirt; man bekommt also:

$$A_2 = a + d$$
$$A_3 = A_2 + d = a + 2d$$
$$A_4 = A_3 + d = a + 3d$$
$$A_5 = A_4 + d = a + 4d$$

welche Glieder alle aus dem Anfangsglied a abgeleitet werden, in-

dem man zu diesen so viel mal die Differenz addirt, als dem betreffenden Gliede noch Glieder vorangehen. Es ist aber leicht einzusehen, dass das hier erkannte Bildungsgesetz allgemein ist; denn nehmen wir einmal an, dieses Gesetz gelte für das $r$te Glied d. h. es sei $A_r = a + (r-1)d$, so finden wir hieraus das $(r+1)$te durch Addition der Differenz d; also wäre dann $A_{r+1} = A_r + d = a + (r-1)d + d = a + rd$ d. h. auch das $(r+1)$te Glied wird aus dem Anfangsglied a gefunden, wenn man zu diesem so viel mal die die Differenz addirt, als ihm Glieder vorangehen; das Gesetz gilt daher allgemein.

197. Man kann aber auch jedes Glied der Progression aus dem **letzten** ableiten, indem man vom letzten Glied so viel mal die Differenz subtrahirt, als dem zu bestimmenden Gliede noch Glieder nachfolgen. Denn wenn wir mit E_r das $r$te Glied vom Ende bezeichnen, so folgt wieder unmittelbar aus der Definition, dass das 2te Glied vom Ende gleich sein muss dem letzten Glied z weniger der Differenz, das 3te Glied vom Ende gleich dem vorletzten weniger der Differenz, also $E_2 = z - d$, $E_3 = E_2 - d$, $E_4 = E_3 - d$ u. s. f. und wenn wir nun hier für E_2, E_3 etc. ihre Werthe einsetzen, so kommt

$$E_2 = z - d$$
$$E_3 = z - 2d$$
$$E_3 = z - 3d \text{ u. s. f.}$$
$$E_r = z - (r-1)d.$$

Auch da wird wieder in ganz gleicher Weise, wie oben, gezeigt, dass wenn dieses Bildungsgesetz für irgend ein Glied z. B. für das $r$te gilt, es auch noch gelten muss für das nächstfolgende, dass es somit allgemein wahr ist.

198. Hieraus folgt unmittelbar, dass die Summe zweier Glieder, welche gleich weit von den beiden äussersten Gliedern abstehen, gleich ist der Summe des ersten und letzten Gliedes. Denn man hat

$$A_r = a + (r-1)d$$
$$E_r = z - (r-1)d$$

woraus durch Addition sofort folgt

$$A_r + E_r = a + z, \text{ w. z. b. w.}$$

Zusatz. Bei einer ungeraden Gliederzahl kommt stets ein Mittelglied vor, welches gleich ist der halben Summe des ersten und letzten Gliedes. Denn wenn $n = 2r + 1$ und v das Mittel-

glied, so gehen dem v gerade r Glieder voran und r Glieder folgen ihm nach. Man hat daher

$$1.\quad v = A_{r+1} = a + rd$$
$$2.\quad v = E_{r+1} = z - rd$$

daher
$$2v = a + z$$

und
$$v = \frac{a+z}{2}.$$

Man nennt dieses Mittelglied auch das arithmetische Mittel zwischen a und z und versteht allgemein unter dem arithmetischen Mittel zweier Zahlen die halbe Summe derselben.

199. Aufgabe. Die Summe der Glieder einer arithmetischen Progression zu finden, wenn man das erste Glied a, das letzte z und die Anzahl n der Glieder kennt.

1ste Auflösung. Ist die Anzahl der Glieder gerade, etwa $n=2r$, so können wir die Glieder so gruppiren, dass wir paarweise je 2 Glieder zusammennehmen, die gleichweit von den beiden äussersten abstehen. Dann bekommen wir nach Nro. 201.

$$A_1 + E_1 = a + z$$
$$A_2 + E_2 = a + z$$
$$A_3 + E_3 = a + z$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$A_r + E_r = a + z$$

wo $E_r = A_{r+1}$. Durch Addition dieser r Gleichungen ergibt sich unmittelbar, dass die Summe s aller Glieder $= (a+z)r = (a+z)\frac{n}{2}$ $= \left(\frac{a+z}{2}\right)n.$

Ist aber die Anzahl der Glieder ungerade, etwa $n=2r+1$, so bekommen wir bei gleicher Gruppirung, wie oben:

$$A_1 + E_1 = a + z$$
$$A_2 + E_2 = a + z$$
$$A_3 + E_3 = a + z$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$A_r + E_r = a + z$$

und
$$A_{r+1} = \frac{a+z}{2}$$

wobei aber E_r nicht mehr der $(r+1)$te, sondern das $(r+2)$te Glied vom Anfang, A_{r+1} aber das Mittelglied bedeutet. Man hat daher

$$s=(a+z)r+\frac{a+z}{2}=\frac{(a+z)2r+a+z}{2}$$

$$s=\frac{(a+z)(2r+1)}{2}=\frac{(a+z)n}{2}=\left(\frac{a+z}{2}\right)n.$$

d. h. die Summe der n ersten Glieder einer arithmetischen Progression ist gleich der halben Summe des ersten und letzten Gliedes, multiplizirt mit der Anzahl der Glieder.

2te Auflösung. Wir können die Summe der n Glieder in doppelter Weise anschreiben, indem wir einmal mit dem ersten, das 2temal mit dem letzten Glied beginnen. Wir erhalten so:

1. $s=a+A_2+A_3+A_4+ \;.\;.\;.\;.\; A_{n-1}+z$
2. $s=z+E_2+E_3+E_4+ \;.\;.\;.\;.\; E_{n-1}+a$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$2s=(a+z)+(A_2+E_2)+(A_3+E_3)+\;.\;.\;.\;.\;(A_{n-1}+E_{n-1})+(z+a)$$

Diese Summe $2s$ besteht daher aus n Summanden, deren jeder nach Satz 201 gleich ist $a+z$; somit

$2s=(a+z)n$ und daher

$$s=\left(\frac{a+z}{2}\right)n.$$

200. Wir haben also zwischen den 5 Grössen a, z, n, d und s, welche auch die 5 Elemente der arithmetischen Progression genannt werden, folgende zwei Gleichungen:

$$\text{I.}\quad z=a+(n-1)d$$

$$\text{II.}\quad s=\left(\frac{a+z}{2}\right)n.$$

Die erste gibt uns eine Relation zwischen a, d, n und z und kann dazu dienen, irgend eine dieser 4 Grössen aus den 3 übrigen zu bestimmen; ebenso kann die zweite Relation benutzt werden, aus je 3 der 4 Grössen z, a, n und s die 4te zu finden. Wenn wir aber beide Relationen I und II gleichzeitig benutzen, so sind wir im Stande, aus je 3 der 5 Elemente die beiden übrigen zu finden. Denn jene 2 Relationen bilden dann zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, reichen also stets zur Bestimmung dieser Unbekannten aus, welches auch die gesuchten Elemente sein mögen. Dabei sind so viele verschiedene Aufgaben möglich, als man je zwei der 5 Elemente mit einander verbinden kann. Solcher Verbindungen gibt es aber 10; denn wenn a, z, d, n und s die Elemente, so kann man verbinden

1. a mit z	4. a mit s	7. z mit s	9. d mit s
2. a mit d	5. z mit d	8. d mit n	10. n mit s.
3. a mit n	6. z mit n		

Von diesen 10 Aufgaben führen nur zwei auf Gleichungen zweiten Grades, nämlich die Bestimmung von z und n (6) und die von a und n (3), während die übrigen Gleichungen ersten Grades liefern. Wir überlassen die Ausführung dieser Rechnungen dem Leser, wollen dagegen hier die Anwendung der Gleichungen I und II noch an einigen Beispielen zeigen.

1. Aufgabe. Wie gross ist die Summe der 35 ersten Glieder der Progression

7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31 etc. ?

Das 1ste Glied ist hier 7, die Differenz 3.

Bevor wir die Summe s bestimmen können, müssen wir vorerst das letzte, also hier das 35ste Glied z berechnen. Es ist

$$z = a + (n-1)d = 7 + 34\,.\,3 = 7 + 102 = 109.$$

$$\text{Nun ist } s = \left(\frac{a+z}{2}\right)n = \left(\frac{7+109}{2}\right)35 = \frac{116}{2}\,.\,35$$

$$\text{oder } s = 58\,.\,35 = 2030.$$

2. Aufgabe. Zwei Körper A und B, deren Distanz 2350 Fuss beträgt, bewegen sich in gerader Linie gegen einander. Wenn A in der ersten Sekunde 8 Fuss und in jeder folgenden 5 Fuss mehr als in der vorangehenden zurücklegt, B dagegen in der ersten Sekunde 5 Fuss und in jeder folgenden 6 Fuss mehr als in der vorangehenden: wann werden sie sich treffen und wie gross ist der von jedem zurückgelegte Weg?

Auflösung: Wir wollen mit x die Anzahl Sekunden bezeichnen, nach welchen sie sich treffen, mit s_1 den Weg, welchen A, mit s_2 den Weg, den B in derselben Zeit zurücklegt, dann ist s_1 die Summe der x ersten Glieder einer arithmetischen Progression, deren Anfangsglied $= 8$, deren Differenz $= 5$, s_2 aber die Summe der n ersten Glieder einer Progression, deren erstes Glied $= 5$, deren Differenz aber $= 6$ ist. Man hat daher

$$s_1 = 8+(8+5)+(8+2\,.\,5)+\ldots\,8+(x-1)\,.\,5$$

$$\text{oder} \quad s_1 = \left(\frac{a+z}{2}\right)n = \left(\frac{8+8+(x-1)5}{2}\right)x = \left(\frac{16+5x-5}{2}\right)x$$

$$s_1 = \frac{(11+5x)x}{2} = \frac{11x+5x^2}{2};$$

$$s_2 = 5+(5+6\,x+(5+2\,.\,6)+\ldots\,[5+(x-1)6]$$

oder $s_2 = \left(\frac{5+5+(x-1)6}{2}\right)x = \left(\frac{10+6x-6}{2}\right)x = \frac{(4+6x)x}{2}$

$s_2 = 2x+3x^2.$

Nun soll aber $s_1 + s_2 = 2350$ sein; man hat daher die Gleichung

$$\frac{11x+5x^2}{2} + 2x + 3x^2 = 2350$$

$$11x+5x^2+4x+6x^2 = 4700$$

$$11x^2+15x = 4700$$

$$x^2+\tfrac{15}{11}x = \tfrac{4700}{11}$$

$$x = -\tfrac{15}{22} \pm \sqrt{(\tfrac{15}{22})^2 + \tfrac{4700}{11}}$$

$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2+4.11.4700}}{22} = \frac{-15 \pm \sqrt{207025}}{22}$$

$$x = \frac{-15 \pm 455}{22}$$

$$x_{,} = \frac{-15+455}{22} = \frac{440}{22} = 20$$

$$x_{,,} = \frac{-15-455}{22} = \frac{-470}{22} = -21\tfrac{4}{11}$$

von welchen beiden Werthen nur der positive einen Sinn hat. Sie treffen also nach 20 Sekunden zusammen. Von der Richtigkeit dieser Lösung überzeugt man sich leicht; denn in 20 Sekunden legt der erste einen Weg s_1 zurück gleich der Summe der 20 ersten Glieder einer arithmetischen Progression, deren 1stes Glied $a = 8$, die Differenz 5 und das letzte $= 8 + 19 . 5 = 103$; diese Summe s_1 ist somit $= \left(\frac{a+z}{2}\right)n = \left(\frac{8+103}{2}\right).20 = \frac{111 . 20}{2}$ $= 1110$. Der Weg s_2 des B aber ist die Summe der 20 ersten Glieder einer Progression, deren erstes Glied $= 5$, die Differenz $= 6$ und deren erstes Glied $= 5+19 . 6 = 119$; somit ist

$$s_2 = \left(\frac{a+z}{2}\right)n = \left(\frac{5+119}{2}\right)20 = \frac{124}{2} . 20 = 1240.$$

Daher $s_1 + s_2 = 1110 + 1240 = 2350$.

201. Wenn wir die Gleichung $z = a+(n-1)d$ nach d auflösen, so erhalten wir: $d = \frac{z-a}{n-1}$ d. h. die Differenz einer arithmetischen Progression ist gleich dem Unterschied zwischen dem letzten und ersten Gliede, dividirt durch die um eine Einheit verminderte Anzahl

aller Glieder. Wir benutzen das, um zwischen zwei beliebige Zahlen a und z noch m arithmetische Mittel einzuschalten d. h. m Zahlen zu bestimmen, welche mit a und z eine arithmetische Progression bilden, deren erstes Glied a, das letzte z ist. Diese Progression würde $m+2$ Glieder enthalten; also $n=m+2$ und somit $n-1=m+1$ sein; daher wird dann $d=\frac{z-a}{n-1}=\frac{z-a}{m+1}$ d. h. die Differenz der zu bildenden Progression ist gleich dem Unterschied beider Zahlen, dividirt durch die um 1 vermehrte Anzahl der einzuschaltenden Mittel. Gesetzt z. B. man sollte zwischen 10 und 18 etwa 23 arithmetische Mittel einschalten, so wäre $d=\frac{18-10}{22+1}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$ und die Progression hiesse demnach:

$$10 \, . \, 10\tfrac{1}{3} \, . \, 10\tfrac{2}{3} \, . \, 11 \, . \, 11\tfrac{1}{3} \, . \, 11\tfrac{2}{3} \, . \, 12 \, . \, 12\tfrac{1}{3} \, . \, 12\tfrac{2}{3} \, . \, 13 \, \ldots\ldots \, 18.$$

202. Ist die Anzahl der einzuschaltenden Mittel um eine Einheit kleiner, als eine beliebige Potenz von 2, so lassen sich die einzelnen Glieder unmittelbar berechnen, ohne dass man die Differenz vorerst aufzusuchen braucht. Sind zwischen a und z z. B. 2^r-1 arithmetische Mittel einzuschalten, so machen dieselben mit a und z eine arithmetische Progression von 2^r+1, d. h. von einer ungeraden Anzahl Glieder aus; daher gibt es ein Mittelglied, welches gleich ist der halben Summe des ersten und letzten Gliedes $\frac{a+z}{2}$. Wenn wir daher $\frac{a+z}{2}=a'$ setzen, so haben wir von der Progression einmal die 3 Glieder:

$$a \ldots\ldots\ldots\ldots a' \ldots\ldots\ldots\ldots z$$

Nun ist die Gesammtzahl aller Glieder $=2^r+1$; folglich hat es ausser dem Mitglied a' noch 2^r Glieder, deren eine Hälfte dem a' vorausgehen, indess die andere Hälfte ihm nachfolgen. Es gehen daher dem a' noch $\frac{2^r}{2}=2^{r-1}$ Glieder voran, welche mit a' eine arithmetische Progression von $2^{r-1}+1$, d. h. von einer ungeraden Anzahl Gliedern bilden; daher gibt es wieder ein mittleres Glied, welches $=\frac{a+a'}{2}$; ebenso bildet a' mit den darauf folgenden 2^{r-1} Gliedern eine arithmetische Progression von einer ungeraden Gliederzahl, und daher gibt es auch hier wieder ein Mittelglied, welches $=\frac{a'+z}{2}$, und wenn wir $\frac{a+a'}{2}=a''$, $\frac{a'+z}{2}=a_{''}$ setzen, so haben wir schon:

$$a \ldots\ldots a'' \ldots\ldots a' \ldots\ldots a_{''} \ldots\ldots z.$$

Von a bis a' hat es $2^{r-1}+1$ Glieder; wenn wir also das Mittelglied a'' weglassen, so bleiben noch 2^{r-1} Glieder, von welchen die eine Hälfte, $\frac{2^{r-1}}{2}=2^{r-2}$ dem a'' vorangehen, die andere Hälfte aber ihm nachfolgen. Wir haben daher von a bis und mit a'' eine arithmetische Progression von $2^{r-2}+1$ Gliedern; es gibt also auch da wieder ein Mittelglied, welches gleich ist $\frac{a+a''}{2}$; von a'' bis und mit a' haben wir wieder eine arithmetische Progression von $2^{r-2}+1$ Gliedern, deren Mittelglied $=\frac{a''+a'}{2}$; ebenso gibt es zwischen a' und $a_{,,}$ ein Mittelglied $=\frac{a'+a_{,,}}{2}$ und endlich zwischen $a_{,,}$ und z eines, das $=\frac{a_{,,}+z}{2}$, und so könnten wir durch Fortsetzung dieses Verfahrens sämmtliche Glieder der Progression bestimmen. Gesetzt z. B., man sollte zwischen 2 und 50 etwa $2^4-1=15$ Glieder einschalten, so wäre $a=2$ und $z=50$. Die Anzahl sämmtlicher Glieder $=15+2=17$; daher gibt es ein mittleres Glied a', dem 8 Glieder vorangehen und 8 nachfolgen und welches $=\frac{2+50}{2}=26$. Zwischen 2 und 26 muss wieder ein mittleres Glied a'' liegen $=\frac{2+26}{2}=14$; ebenso zwischen 26 und 50 ein mittleres Glied $a_{,,}=\frac{26+50}{2}=38$. So liegt dann wieder ein Mittelglied zwischen 2 und 14, das $=\frac{2+14}{2}=8$, ein zweites zwischen 14 und 26 $=\frac{14+26}{2}=20$, ein drittes zwischen 26 und 38 $=\frac{26+38}{2}=32$, endlich ein viertes zwischen 38 und 50 $=44$. Indem wir nochmals so fortfahren, bekommen wir die Progression:

	a''		a'		$a_{,,}$	
2. 5. 8. 11.	14	. 17. 20. 23.	26	. 29. 32. 35.	38	. 41. 44. 47. 50.

B. Geometrische Progressionen.

203. Wir nennen geometrische Progression eine Reihe, in welcher jedes Glied aus dem vorangehenden durch Multiplikation

mit einer konstanten Zahl entsteht. Wir wollen diese konstante Zahl den Exponenten oder den Quotienten der Progression heissen und mit q bezeichnen; dann ist die Progression eine steigende oder eine fallende, je nachdem q grösser oder kleiner als 1 ist. So wäre $1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243$ etc. eine steigende Progression, deren Quotient $= 3$, dagegen

$$80 : 40 : 20 : 10 : 5 : \tfrac{5}{2} : \tfrac{5}{4} \text{ etc.}$$

eine fallende Progression, deren Quotient $= \frac{1}{2}$.

204. Durch Angabe des ersten Gliedes und des Quotienten ist die Progression offenbar bestimmt. Denn wenn a das erste Glied, q der Quotient, so muss nach der vorigen Definition das 2te Glied $= aq$, das 3te $= aq \cdot q = aq^2$, das 4te $= aq^2 \cdot q = aq^3$, das 5te $= aq^3 \cdot q = aq^4$ u. s. f. sein, so dass also die Progression hiesse:

$$a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 \text{ etc.}$$

Wir erkennen hieraus, dass jedes einzelne Glied ausser dem Faktor a noch als zweiten Faktor die sovielte Potenz des Quotienten enthält, als ihm Glieder vorangehen und es ist sehr leicht zu zeigen, dass dieses Bildungsgesetz allgemein gilt. Denn nehmen wir einmal an, es gelte für das $r$te Glied, d. h. es wäre $A_r = aq^{r-1}$, so erhalten wir hieraus wieder das folgende $(r+1)$te durch Multiplikation mit q, es müsste somit $A_{r+1} = A_r \cdot q = aq^{r-1} \cdot q = aq^r$; und es besteht demnach das für das $r$te Glied gültige Gesetz auch noch für $(r+1)$te. Nun haben wir dieses Gesetz aber beim 2ten, 3ten, 4ten Glied unmittelbar erkannt; somit gilt es allgemein und wir haben daher den Satz: Jedes Glied der geometrischen Progression ist gleich dem ersten Gliede, multiplizirt mit der sovielten Potenz des Quotienten, als ihm Glieder vorangehen.

205. Man kann aber auch jedes Glied der Progression aus dem letzten ableiten. Denn wenn z das letzte und E_r das $r$te Glied vom Ende bedeutet, so ist nach Definition

$$E_2 q = z \text{ und daher } E_2 = \frac{z}{q}$$

$$E_3 q = E_2 \text{ ,, } \quad \text{,, } \quad E_3 = \frac{E_2}{q}$$

$$E_4 q = E_3 \text{ ,, } \quad \text{,, } \quad E_4 = \frac{E_3}{q}$$

Setzen wir nun für E_2, E_3, E_4 etc. ihre Werthe, so findet man

$$E_2 = \frac{z}{q}$$

$$E_3 = \frac{z}{q^2}$$

$$E_4 = \frac{z}{q^3} \text{ etc.}$$

Um die Allgemeinheit dieses Gesetzes zu zeigen, nehmen wir an, es sei $E_r = \frac{z}{q^{r-1}}$, dann ist

$$E_{r+1} q = E_r \text{ oder}$$

$$E_{r+1} = \frac{E_r}{q} = \frac{z}{q^{r-1}} : q = \frac{z}{q^r}.$$

Es gilt somit das für irgend ein Glied erkannte Bildungsgesetz auch noch für das nächste. Da es aber für E_2, E_3, E_4 unmittelbar erkannt wurde, so muss es auch noch für alle übrigen gelten. Wir haben also das Resultat:

Man kann auch aus dem letzten Gliede z ein beliebiges Glied ableiten, indem man das letzte Glied dividirt durch die so vielte Potenz des Quotienten, als dem zu bestimmenden Gliede noch Glieder nachfolgen.

206. Hieraus folgt wieder eine sehr einfache Relation zwischen solchen Gliedern der Progression, die gleichweit von den äussersten Gliedern abstehen. Es ist nämlich

$$A_{r+1} = aq^r$$

$$E_{r+1} = \frac{z'}{q^r},$$

woraus:
$$A_{r+1} \cdot E_{r+1} = aq^r \cdot \frac{z}{q^r} = az \text{ d. h.}$$

das Produkt zweier Glieder, welche gleichweit vom ersten und letzten Gliede abstehen, ist gleich dem Produkt des ersten und letzten Gliedes.

Zusatz: Hieraus folgt, dass wenn die Anzahl der Glieder ungerade, stets ein Mittelglied vorkommt, das gleich ist der Quadratwurzel aus dem Produkt des ersten und letzten Gliedes.

Denn wenn v dieses Mittelglied und $n = 2r+1$, so hat man

$$1)\ v = aq^r$$

$$2)\ v = \frac{z}{q^r},$$

somit
$$v^2 = az \text{ und } v = \sqrt{az}.$$

Man nennt dieses Mittelglied einer geometrischen Progression auch das geometrische Mittel zwischen dem Anfangs- und dem Endglied und versteht dann allgemein unter dem geometrischen Mittel zweier Zahlen a und z nichts anderes, als die Quadratwurzel aus ihrem Produkt.

207. Aufgabe: Die Summe der n ersten Glieder einer geometrischen Progression zu finden, wenn das erste Glied a und der Quotient q gegeben sind.

Bezeichnen wir diese Summe mit s, so ist einmal

$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots aq^{n-1}. \quad (1)$$

Multipliziren wir beide Seiten dieser Gleichung mit q, so kommt:

$$sq = aq + aq^2 + aq^3 + \dots aq^n. \quad (2)$$

Vergleichen wir die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen, so sehen wir, dass die Glieder aq, aq^2, aq^3 bis aq^{n-1} beiden gemeinschaftlich zukommen; bei der Subtraktion der Gleichung (1) von (2) werden sich daher diese Glieder aufheben und man erhält

$$sq - s = aq^n - a$$

$$s(q-1) = a(q^n - 1)$$

oder

$$s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Wir können diesem Ausdruck noch eine etwas andere Form geben. Es ist nämlich

$$aq^n = aq^{n-1} \cdot q = zq, \text{ daher auch}$$

$$s = \frac{a(q^n - 1)}{q-1} = \frac{aq^n - a}{q-1} = \frac{zq - a}{q-1}$$

und wir haben daher zur Bestimmung von s die beiden Formeln:

$$(\alpha) : s = \frac{a(q^n - 1)}{q-1}$$

$$(\beta) : s = \frac{zq - a}{q-1},$$

von welchen die letzte in Worten heisst:

Die Summe der Glieder einer geometrischen Progression wird erhalten, wenn man das letzte Glied mit dem Quotienten multiplizirt, von dem Produkt das 1ste Glied subtrahirt und diese Differenz noch durch den um eine Einheit verminderten Quotienten dividirt.

208. Wir haben nun zwischen den 5 Elementen a, z, n, q und s der geometrischen Progression die beiden Gleichungen:

$$z = aq^{n-1} \quad \text{(I)}$$

$$s = \frac{zq-a}{q-1}, \quad \text{(II)}$$

deren erste eine Relation zwischen den 4 Grössen a, z, q und n, die 2te eine Relation zwischen a, z, q und s gibt und von welchen jede benutzt werden kann, um aus je 3 der darin vorkommenden Elementen das 4te zu finden. Benutzt man aber beide gleichzeitig, so ist man im Stande, aus je 3 der 5 Elemente die beiden übrigen zu finden, weil man in diesen 2 Relationen dann stets zwei Gleichungen mit 2 Unbekannten besitzt. Natürlich sind auch hier wieder, wie in No. 203, 10 verschiedene Aufgaben möglich, unter welchen einige auf Exponentialgleichungen und auf Gleichungen höhern Grades führen.

209. Wollte man zwischen 2 Zahlen a und z m geometrische Mittel einschalten d. h. m Zahlen bestimmen, welche mit a und z eine geometrische Progression von $m+2$ Gliedern bilden, so müsste man vor Allem den Quotienten q bestimmen. Aus $z = aq^{n-1}$ folgt $q = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$. Sollen nun m geometrische Mittel eingeschaltet werden, so ist die Gesammtzahl aller Glieder $n = m+2$; daher $n-1 = m+1$ und somit $q = \sqrt[m+1]{\frac{z}{a}}$; man findet somit den Quotienten q, wenn man das letzte Glied durch das erste dividirt und aus dem Quotienten die sovielte Wurzel zieht, als die um 1 vermehrte Anzahl der einzuschaltenden Mittel beträgt. Sollten z. B. zwischen 2 und 256 etwa 6 geometrische Mittel eingeschaltet werden, so wäre $m = 6$, $m + 1 = 7$, $a = 2$ und $z = 256$; daher $q = \sqrt[7]{\frac{256}{2}} = \sqrt[7]{128} = 2$; die Progression hiesse demnach:

$$2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256$$

und die 6 eingeschalteten Mittel wären demnach

4, 8, 16, 32, 64 und 128.

210. Wenn die Anzahl der einzuschaltenden Mittel die Form $2^r - 1$ hat, so kann man die einzelnen Glieder durch blosse Quadratwurzelausziehungen finden, ohne dass man den Exponenten zu berechnen nöthig hätte. Denn wenn man $2^r - 1$ geometrische Mittel zwischen a und z einzuschalten hätte, so wäre die Zahl sämmtlicher Glieder $= 2^r + 1$ d. h. ungerade; es gäbe folglich ein mittleres Glied a', dem die Hälfte von 2^r d. h. 2^{r-1} Glieder

vorangehen und eben so viele nachfolgen. Es wäre demnach $a' = \sqrt{az}$ und wir hätten schon drei Glieder der Progression:

$$a \ldots a' \ldots z.$$

Nun ist die Zahl 2^{r-1} der dem a' vorangehenden Glieder wieder gerade, folglich die Zahl der Glieder von a bis und mit a' eine ungerade; somit liegt zwischen a und a' wieder ein Mittelglied $= \sqrt{aa'}$; ebenso bildet a' mit den darauf folgenden 2^{r-1} Gliedern eine geometrische Progression von einer ungeraden Gliederzahl, deren Mittelglied $= \sqrt{a'z}$, und wenn wir daher $\sqrt{aa'} = a''$ und $\sqrt{a'z} = a_{,,}$ setzen, so kennen wir von der Progression schon folgende Glieder:

$$a \ldots . a'' \ldots . a' \ldots . a_{,,} \ldots . z.$$

Da wir ferner von a bis und mit a' gerade $2^{r-1}+1$ Glieder haben, so bleiben ausser dem Mittelglied a'' noch 2^{r-1} Glieder, von welchen die Hälfte, nämlich $\frac{2^{r-1}}{2}$ oder 2^{r-2}, dem a'' vorangehen und die Hälfte ihm nachfolgen. Es hat also von a bis und mit a'' gerade $2^{r-2}+1$, d. h. eine ungerade Anzahl Glieder, und folglich liegt zwischen a und a'' ein Mittelglied, welches $= \sqrt{aa''}$; ebenso liegt zwischen a'' und a' ein Mittelglied $= \sqrt{a''a'}$; ein anderes zwischen a' und $a_{,,}$, das $= \sqrt{a'a_{,,}}$, und endlich eines zwischen $a_{,,}$ und z, das $= \sqrt{a_{,,}z}$, und so könnte man fortfahren und allmälig alle übrigen Glieder durch Quadratwurzelausziehung berechnen.

211. Die Summe der Glieder einer in's Unendliche fortgehenden abnehmenden geometrischen Progression ist immer gleich dem ersten Glied, dividirt durch die um den Quotienten verminderte Einheit, also $= \frac{a}{1-q}$.

Wir haben allgemein als Summe der n ersten Glieder einer geometrischen Progression gefunden:

$$s = \frac{a(q^n-1)}{q-1} = \frac{aq^n - a}{q-1}.$$

Dass diese Summe für ein unendlich gross werdendes n über alle Grenzen wächst, sobald $q > 1$ oder auch nur $= 1$ ist, leuchtet ohne weiter ein. Denn für $q > 1$ wird q^n mit wachsendem n immer grösser und kann nach No. 164 über alle Grenzen wachsen;

somit wird auch q^n-1 und damit s selber über alle Grenzen wachsen. Ist dagegen $q=1$, so sind alle Glieder gleich dem Anfangsglied a und ihre Summe, die $= an$, muss daher mit unbegrenzt wachsendem n selber über alle Grenzen wachsen. Der obige Ausdruck für s nimmt zwar für $q=1$ zuerst die Form $\frac{0}{0}$ an, liefert aber sofort den wahren Werth, wenn man nur zuerst die Division von q^n-1 durch $q-1$ ausführt.

Ist dagegen $q<1$, so werden Zähler und Nenner des Bruches $\frac{aq^n-a}{q-1}$ negativ, der Bruch selbst aber positiv. Um auch Zähler und Nenner desselben positiv zu haben, multipliziren wir beide mit -1, so erhalten wir

$$s = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Es erscheint somit die Summe s als eine Differenz, deren Minuend $\frac{a}{1-q}$ für eine bestimmte Progression konstant bleibt, indess der Subtrahend $\frac{aq^n}{1-q}$ nach Nro. 165 mit wachsendem n immer kleiner wird und zuletzt unendlich nahe an Null kommt, sobald n unendlich gross geworden ist. Man hat daher $\frac{a}{1-q}$ als die Grenze anzusehen, der sich die Summe s immer mehr nähert, je grösser die Gliederzahl n wird und die sie schliesslich erreicht, wenn n unendlich gross wird. So ist z. B. bei der Progression

$$1 : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{16} : \tfrac{1}{64} \text{ etc.}$$

$$s = 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{128} + \ldots \text{ in inf.}$$

$$s = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3};$$

ferner bei $1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \frac{1}{81}$ etc. ist

$$s = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Bei der Progression

$1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} :$ etc. wäre endlich

$$s = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2.$$

Zehnter Abschhnitt.

Von den Kettenbrüchen.

212. Wenn wir bei einem ächten arithmetischen Bruch Zähler und Nenner durch den Zähler dividiren, so erhalten wir einen an Werth ihm gleichen Bruch, dessen Zähler die Einheit ist, dessen Nenner aber eine ganze oder eine gemischte Zahl sein wird, je nachdem der Nenner durch den Zähler theilbar ist oder nicht. So wäre z. B.

$$\frac{75}{450} = \frac{1}{\frac{450}{75}} = \frac{1}{6}; \text{ dagegen}$$

$$\frac{76}{483} = \frac{2}{\frac{483}{76}} = \frac{2}{6+\frac{27}{76}}$$

Im ersten Fall ist der Bruch $\frac{1}{6}$ nicht weiter reduzirbar; es drückt also $\frac{1}{6}$ den Werth des Bruches $\frac{75}{450}$ auf die einfachste Weise aus. Lassen wir im zweiten Fall den Bruch $\frac{27}{76}$ im Nenner weg, so ist der so erhaltene Bruch $\frac{1}{6}$ grösser als $\frac{1}{6+\frac{27}{76}}$ oder als $\frac{76}{483}$; aber er drückt den Werth dieses Bruches doch geauer aus, als irgend ein anderer mit kleinern Zahlen geschriebener Bruch. Denn gesetzt, es gäbe noch einen mit kleinerm Nenner geschriebenen Bruch, der näher an $\frac{76}{483}$ läge, als $\frac{1}{6}$, so müsste offenbar auch sein Zähler kleiner als 1 sein, weil ja bei gleichem Zähler dieser Bruch mit dem kleinern Nenner grösser als $\frac{1}{6}$ sein müsste, $\frac{1}{6}$ selber aber schon grösser ist als $\frac{76}{483}$. Nun ist aber 1 die kleinste ganze Zahl; es gibt also keinen mit kleinern Zahlen als 1 und 6 geschriebenen Bruch, der näher an $\frac{76}{483}$ läge, als $\frac{1}{6}$.

Dividiren wir nun bei dem Bruche $\frac{27}{76}$ wieder Zähler und Nenner durch den Zähler 27, so erhalten wir

$$\frac{27}{67} = \frac{1}{2+\frac{22}{27}} \text{ und somit } \frac{76}{483} = \frac{1}{6+\frac{1}{2+\frac{22}{27}}}$$

Lassen wir den Bruch $\frac{22}{27}$ im Nenner weg, so drückt $\frac{1}{2}$ den Werth des Bruches $\frac{27}{76}$ wieder genauer aus, als irgend ein anderer mit kleinern Zahlen geschriebener Bruch; daher wird auch $\frac{1}{6+\frac{1}{2}} = \frac{2}{13}$ dem Werth des ursprünglichen Bruches $\frac{76}{483}$ noch näher kommen, als jeder andere mit kleinern Zahlen geschriebene

Bruch. Man kann daher die Brüche $\frac{1}{6}$ und $\frac{2}{13}$ als angenäherte Werthe statt des ursprünglichen Bruches benutzen.

Fährt man in gleicher Weise fort, d. h. dividirt man bei jedem im Nenner noch vorkommenden Bruch Zähler und Nenner durch den Zähler, bis man endlich zu einem Bruche kommt, dessen Zähler = 1, so erhalten wir successive:

$$\frac{22}{27} = \frac{1}{1+\frac{5}{22}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{22}{5}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{2}{5}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{5}{2}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$$

und daher

$$\frac{76}{483} = \frac{1}{6+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}}$$

Da jeder Rest kleiner, als der zugehörige Divisor, jener aber wieder als Divisor bei der nächsten Division benutzt wird, so müssen die successiven Reste abnehmende ganze Zahlen sein und wir werden daher einmal zu einem Reste kommen, der in dem vorhergehenden aufgeht, also zu einem Bruch, dessen Zähler 1, dessen Nenner aber eine ganze Zahl ist. Man kann daher jeden arithmetischen Bruch auf die Form bringen:

$$a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d+\text{etc.}}}}$$

mit einer endlichen Gliederzahl.

Umgekehrt kann jeder geschlossene Ausdruck von dieser Form wieder auf einen gewöhnlichen Bruch zurückgeführt werden. So wenn z. B. $x = 2+\frac{1}{6+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}$, so hätte man:

1., $1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

2., $6+\frac{1}{1+\frac{1}{4}} = 6+\frac{1}{\frac{5}{4}} = 6+\frac{4}{5} = \frac{34}{5}$

3., $2+\frac{1}{6+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}} = 2+\frac{1}{\frac{34}{5}} = 2+\frac{5}{34} = \frac{73}{34}$; also $x = \frac{73}{34}$.

213. Wir nennen nun Kettenbruch jeden Ausdruck, der im Allgemeinen aus einer ganzen Zahl (die in speziellen Fällen auch Null sein kann) mehr einem Bruch besteht, dessen Nenner abermals eine ganze Zahl mit einem Bruch enthält, der zum Nenner wieder eine ganze Zahl mit einem Bruch hat u. s. f. und werden in der Folge nur solche Kettenbrüche betrachten, deren Zähler, wie oben, alle = 1 sind und welche also die Form haben:

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\text{etc.}}}}}$$

Die Grössen a, b, c, d, e etc., die wir sämmtlich als positive ganze Zahlen voraussetzen, wollen wir unvollständige Quotienten, die Brüche $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$ etc. Glieder des Kettenbruches oder partielle Brüche, endlich die Verbindung zweier oder mehrerer Glieder, immer vom ersten an gerechnet, also die Ausdrücke $\frac{a}{1}$, $a+\frac{1}{b}$, $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}$ u. s. f. Näherungswerthe heissen, weil sie, wie wir bereits sahen, den Werth des Kettenbruches näherungsweise bestimmen. Der dritte Näherungswerth wird somit aus dem zweiten $a+\frac{1}{b}$ erhalten, wenn man statt des zweiten unvollständigen Quotienten b setzt $b+\frac{1}{c}$; aus dem dritten wird der vierte abgeleitet, wenn man c durch $c+\frac{1}{d}$ ersetzt u. s. f. Es wird sich in der Folge zeigen, dass diese auf die Form eines gewöhnlichen Bruches gebrachten Näherungswerthe sämmtlich nicht reduzirbare Brüche sind und dass jeder derselben dem Werth des ganzen Kettenbruches näher kommt, als irgend ein anderer Bruch mit kleinerm Nenner. Wenn wir daher Zähler und Nenner eines solchen Näherungswerthes mit der nämlichen Zahl multipliziren, so ist der so transformirte Bruch, obschon dem ersten an Werth gleich, doch kein Näherungswerth mehr; diese Benennung kommt ausschliesslich den auf die eben beschriebene Art gebildeten Brüchen zu.

214. Bildungsgesetz der Näherungswerthe. Es sei

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \text{etc.}}}}}$$

so wollen wir einmal die Näherungswerthe von x bilden.

Der erste ist offenbar $= \frac{a}{1} = a$

Der zweite „ „ $= a + \frac{1}{b} = \frac{ab+1}{b}$.

Den dritten werden wir aus dem zweiten erhalten, wenn wir den unvollständigen Quotienten b ersetzen durch $b + \frac{1}{c}$; wir bekommen daher als dritten Näherungswerth:

$$\frac{a\left(b+\frac{1}{c}\right)+1}{b+\frac{1}{c}} = \frac{abc+a+c}{bc+1} = \frac{(ab+1)c+a}{bc+1}.$$

Der Zähler $(ab+1)c+a$ dieses dritten Näherungswerthes kann offenbar aus dem Zähler $ab+1$ des zweiten abgeleitet werden, wenn wir diesen mit dem dritten unvollständigen Quotienten c multipliziren und zum Produkt noch den Zähler a des ersten Näherungswerthes addiren. Ebenso wird sein Nenner $bc+1$ aus dem Nenner b des zweiten erhalten, wenn wir diesen mit dem 3ten unvollständigen Quotienten c multipliziren und zum Produkt bc noch den Nenner 1 des ersten Näherungswerthes addiren. (Ginge dem Bruch nicht eine ganze Zahl a voraus, so wäre $\frac{0}{1}$ als erster Näherungswerth anzusehen). Auf gleiche Weise könnten wir den vierten Näherungswerth aus dem dritten, den fünften aus dem vierten herleiten u. s. f. Um aber die allgemeine Gültigkeit dieses Bildungsgesetzes nachzuweisen, dürfen wir nur zeigen, dass wenn es für irgend einen Näherungswerth wahr ist, es auch noch für den nächstfolgenden gilt. Es seien nun $\frac{P}{Q}, \frac{P'}{Q'}, \frac{P''}{Q''}, \frac{P'''}{Q'''}$ vier beliebige aufeinander folgende Näherungswerthe, m und n die den beiden letzten Näherungswerthen entsprechenden unvollständigen Quotienten; wir wollen ferner annehmen, $\frac{P''}{Q''}$ sei nach dem oben erkannten Gesetz aus $\frac{P'}{Q'}$ und $\frac{P}{Q}$ gebildet, d. h. es sei

$$P'' = P'm + P \text{ und } Q'' = Q'm + Q,$$

so kann man aus $\frac{P''}{Q''}$ oder $\frac{P'm+P}{Q'm+Q}$ den folgenden Näherungswerth $\frac{P'''}{Q'''}$ offenbar ableiten, wenn man für m setzt $m + \frac{1}{n}$; alsdann kommt

$$\frac{P'''}{Q'''} = \frac{P'\left(m+\frac{1}{n}\right)+P}{Q'\left(m+\frac{1}{n}\right)+Q} = \frac{P'mn+P'+Pn}{Q'mn+Q'+Qn} = \frac{(P'm+P)n+P'}{(Q'm+Q)n+Q'}$$

Allein $P'm+P$ ist nach unserer Voraussetzung der Zähler P'', $Q'm+Q$ aber der Nenner Q'' des Näherungswerthes $\frac{P''}{Q''}$, P' der Zähler und Q' der Nenner des vorangehenden Näherungswerthes $\frac{P'}{Q'}$. Wenn also

$$\frac{P''}{Q''} = \frac{P'm+P}{Q'm+Q}, \text{ so ist auch}$$

$$\frac{P'''}{Q'''} = \frac{P''n+P'}{Q''n+Q'} \text{ d. h.}$$

der Näherungswerth $\frac{P'''}{Q'''}$ ist aus den beiden vorangehenden Näherungswerthen $\frac{P''}{Q''}$ und $\frac{P'}{Q'}$ auf die nämliche Weise gebildet, wie $\frac{P''}{Q''}$ aus den beiden vorangehenden Näherungswerthen $\frac{P'}{Q'}$ und $\frac{P}{Q}$, und es ist folglich das für irgend einen Näherungswerth gültige Bildungsgesetz auch noch für den nächstfolgenden wahr. Nun gilt aber das obige Bildungegesetz für den dritten Näherungswerth $\frac{(ab+1)c+a}{bc+1}$; also gilt es auch für den vierten, somit auch für den fünften und alle folgenden, d. h. es ist allgemein wahr. Wir haben also die Regel: Um von irgend einem Näherungswerth zum nächstfolgenden überzugehen, dürfen wir nur Zähler und Nenner desselben mit dem nächsten unvollständigen Quotienten multipliziren und zum ersten Produkt noch den Zähler, zum letzten aber den Nenner des vorangehenden Näherungswerthes addiren.

Wenn z. B. $\frac{237}{8563} = \cfrac{1}{36+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\frac{1}{2}}}}}}}$

so sind hier 0, 36, 7, 1, 1, 1, 4 und 2 die unvollständigen Quotienten, indess die Näherungswerthe, welche wir der Reihe nach mit $\frac{P}{Q}, \frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}$ etc. bezeichnen, folgende sind:

$$\frac{P}{Q} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{36}$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{1\,.\,7+0}{36\,.\,7+1} = \frac{7}{253}$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{7\,.\,1+1}{253\,.\,1+36} = \frac{8}{289}$$

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{8\,.\,1+7}{289\,.\,1+253} = \frac{15}{542}$$

$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{15\,.\,1+8}{542+289} = \frac{23}{831}$$

$$\frac{P_6}{Q_6} = \frac{23\,.\,4+15}{831\,.\,4+542} = \frac{92+15}{3324+542} = \frac{107}{3866}$$

$$\frac{P_7}{Q_7} = \frac{107\,.\,2+23}{3866\,.\,2+831} = \frac{214+23}{7732+831} = \frac{237}{8563}.$$

Anmerkung: Aus $\frac{P''}{Q''} = \frac{P'm+P}{Q'm+Q}$ folgt unmittelbar, dass Zähler und Nenner der aufeinander folgenden Näherungswerthe immer wachsende ganze Zahlen sein müssen, die am langsamsten zunehmen, wenn sämmtliche unvollständige Quotienten $= 1$ sind und der Kettenbruch also die Form hat:

$$a+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}$$

In diesem Fall ist auch $m = 1$ und man hat dann $\frac{P''}{Q''} = \frac{P'+P}{Q'+Q}$ d. h. der Zähler jedes Näherungswerthes, vom dritten an

gerechnet, ist gleich der Summe der Zähler, der Nenner aber gleich der Summe der Nenner beider vorangehenden Näherungswerthe.

215. Die Näherungswerthe geraden Ranges sind alle grösser, die von ungeradem Range aber alle kleiner, als der Kettenbruch.

Es sei $x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{etc.}}}}$, so behaupten wir also:

$$\frac{a}{1} < x$$

$$a + \frac{1}{d} > x$$

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} < x$$

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}} \quad \text{u. s. f.}$$

Der erste Näherungswerth $\frac{a}{1}$ ist offenbar um den ganzen bruchförmigen Theil $\frac{1}{b + \text{etc.}}$ kleiner, als x; der zweite Näherungswerth $a + \frac{1}{b}$ ist aber zu gross; denn der Nenner b des Bruches $\frac{1}{b}$ ist kleiner als $b + \frac{1}{c + \text{etc.}}$; also ist der Bruch $\frac{1}{b}$ grösser, als $\frac{1}{b + \text{etc.}}$; daher auch $a + \frac{1}{b} > x$.

Der dritte Näherungswerth $a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}$ ist wieder kleiner, als x; denn der Bruch $\frac{1}{c}$, den man hier zum Nenner b von $\frac{1}{b}$ addirt, ist zu gross, weil eigentlich blos $\frac{1}{c + \text{etc.}}$ hinzu addirt werden sollte; folglich ist der Nenner $b + \frac{1}{c}$ zu gross und daher der

Bruch $\frac{1}{b+\frac{1}{c}}$ zu klein; also auch $a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}$ noch zu klein.

Beim vierten Näherungswerth $\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}}$ ist zu dem Nenner von $\frac{1}{c}$, d. h. zu c, hinzugefügt worden $\frac{1}{d}$, also zu viel, weil bloss $\frac{1}{d+\text{etc.}}$ hinzugefügt werden sollte; somit ist $c+\frac{1}{d}$ zu gross, daher $\frac{1}{c+\frac{1}{d}}$ zu klein; also auch $b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}$ zu klein, und daher umgekehrt der Bruch $\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}}$ zu gross, folglich wird auch $a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}}$ noch zu gross sein.

So könnte man fortfahren und würde finden, dass der fünfte Näherungswerth wieder zu klein, der sechste zu gross u. s. f. wäre, so dass also in der That die Näherungswerthe ungeraden Ranges (der 1ste, 3te, 5te etc.) zu klein, die geraden Ranges aber zu gross sind.

216. Der Unterschied zweier aufeinanderfolgenden Näherungswerthe ist immer gleich ± 1, dividirt durch das Produkt ihrer Nenner.

Es seien $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$, $\frac{P''}{Q''}$ drei aufeinanderfolgende Näherungswerthe und m der dem letzten entsprechende unvollständige Quotient, so ist nach Nro. 214: $\frac{P''}{Q''} = \frac{P'm+P}{Q'm+Q}$. Ziehen wir jeden der zwei ersten vom folgenden ab, so erhalten wir:

$$1)\ \frac{P'}{Q'} - \frac{P}{Q} = \frac{P'Q - PQ'}{QQ'}$$

2) $\frac{P''}{Q''} - \frac{P'}{Q'} = \frac{P'm+P}{P'm+Q} - \frac{P'}{Q'} = \frac{(P'm+P)Q' - P'(Q'm+Q)}{Q'(Q'm+Q)} =$

$$\frac{P'mQ'+PQ'-P'Q'm-P'Q}{Q'(Q'm+Q)} = \frac{PQ'-P'Q}{Q'Q''}.$$

Da zeigt sich nun einmal, dass der Nenner einer jeden dieser beiden Differenzen das Produkt der Nenner beider Näherungswerthe ist. Der Zähler $PQ' - P'Q$ der letzten Differenz ist dem Zähler $P'Q - PQ'$ der ersten gleich, nur dem Zeichen nach entgegengesetzt, und es bleibt daher nur noch zu zeigen, dass derselbe $= \pm 1$ sein müsse. Allein wenn wir den ersten Näherungswerth $\frac{a}{1}$ vom zweiten $\frac{ab+1}{b}$ subtrahiren, so erhalten wir als Differenz $\frac{1}{b}$; also ist der Zähler dieser Differenz $= +1$, daher der Zähler der folgenden $= -1$, der nächstfolgenden wieder $= +1$ u. s. f.; folglich ist der Satz richtig.

217. Der Unterschied zweier aufeinander folgenden Näherungswerthe $\frac{P'}{Q'}$ und $\frac{P''}{Q''}$ ist also $= \frac{\pm 1}{Q'Q''}$. Da aber der eine dieser Näherungswerthe zu gross, der andere zu klein ist, so muss der Werth x des Kettenbruches immer zwischen zwei solchen Näherungswerthen liegen, und daher der Unterschied zwischen dem Kettenbruch x und einem solchen Näherungswerth $\frac{P'}{Q'}$ oder $\frac{P''}{Q''}$ dem absoluten Werth nach noch kleiner sein, als $\frac{1}{Q'Q''}$. Wenn wir daher statt des ganzen Kettenbruches irgend einen seiner Näherungswerthe $\frac{P'}{Q'}$ nehmen, so sind wir versichert, dass der Fehler geringer ist, als der Quotient aus der Einheit durch das Produkt aus dem Nenner dieses Näherungswerthes in den Nenner des unmittelbar folgenden.

Der Kettenbruch $\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10}}}}}$ hat z. B.

die Näherungswerthe: $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{11}{23}$, $\frac{23}{48}$, $\frac{34}{71}$, $\frac{363}{758}$,
und wenn wir da den dritten Näherungswerth $\frac{11}{23}$ statt des ganzen

Kettenbruches nehmen, so ist der Fehler kleiner, als $\frac{1}{23\,.\,48}$ oder $\frac{1}{1104}$; es würde demnach schon der Näherungswerth $\frac{11}{23}$ den Werth des Bruches $\frac{363}{758}$ bis auf wenigstens $\frac{1}{1104}$ genau ausdrücken.

Will man bei Benutzung eines Näherungswerthes $\frac{P''}{Q''}$ eine Fehlergrenze haben, ohne den folgenden Näherungswerth $\frac{P''}{Q''}$ noch berechnen zu müssen, so darf man nur bedenken, dass $\frac{1}{Q'Q''} = \frac{1}{Q'(Q'm+Q)}$, wo m mindestens $= 1$ und sehr oft grösser als 1 ist; daher wird Q'' mindestens $= Q' + Q$ und häufig grösser, als $Q' + Q$ sein. Der Bruch $\frac{1}{Q'(Q'+Q)}$ ist somit mindestens gleich, oft aber noch grösser als $\frac{1}{Q'Q''}$ und wenn also der Fehler, den man bei Anwendung des Näherungswerthes $\frac{P'}{Q'}$ begeht, kleiner ist, als $\frac{1}{Q'Q''}$, so wird er unter allen Umständen auch kleiner sein als $\frac{1}{Q'(Q'+Q)}$, d. h. kleiner als die Einheit, getheilt durch das Produkt aus dem Nenner dieses Näherungswerthes in die Summe dieses und des vorangehenden Nenners. Man hat also in $\frac{1}{Q'(Q'+Q)}$ eine Grenze des Fehlers, zu deren Bestimmung man den folgenden Näherungswerth nicht nöthig hat. Diese Grenze wäre bei dem Näherungswerth $\frac{11}{23} = \frac{1}{23(23+2)} = \frac{1}{23\,.\,25}$.

Eine noch bequemere, freilich auch noch fernere Grenze wäre $\frac{1}{Q'^2}$. Es ist nämlich $\frac{1}{Q'^2}$ jedenfalls immer grösser, als $\frac{1}{Q'(Q'+Q)}$, weil bei gleichen Zählern der Nenner des ersten Bruches kleiner, als der Nenner des zweiten ist. Da nun $x - \frac{P'}{Q'}$ schon kleiner als $\frac{1}{Q'(Q'+Q)}$, so wird noch um so mehr $x - \frac{P'}{Q'} < \frac{1}{Q'^2}$ sein, d. h. die Differenz zwischen einem

beliebigen Näherungswerth und dem ganzen Kettenbruch ist dem absoluten Werthe nach immer kleiner, als der Quotient aus der Einheit durch das Quadrat vom Nenner dieses Näherungswerthes.

Wir haben also für den Fehler, welchen man bei der Anwendung eines Näherungswerthes $\frac{P'}{Q'}$ statt des Kettenbruches x begeht, folgende Grenzen:

$$1)\quad x - \frac{P'}{Q'} < \frac{1}{Q'Q''}$$

$$2)\quad x - \frac{P'}{Q'} < \frac{1}{Q'(Q'+Q)}$$

$$3)\quad x - \frac{P'}{Q'} < \frac{1}{Q'^2}$$

Angewandt auf das obige Beispiel hätten wir also:

$$1)\quad \frac{363}{758} - \frac{11}{23} < \frac{1}{23.48} \text{ oder } \frac{1}{1104}$$

$$2)\quad \frac{363}{758} - \frac{11}{23} < \frac{1}{23.25} \text{ oder } \frac{1}{575}$$

$$3)\quad \frac{363}{758} - \frac{11}{23} < \frac{1}{23^2} \text{ oder } \frac{1}{529}.$$

218. Jeder Näherungswerth ist auf die einfachste Weise ausgedrückt, d. h. Zähler und Nenner haben keinen gemeinschaftlichen Faktor mehr.

Gesetzt nämlich, Zähler und Nenner des Näherungswerthes $\frac{P}{Q}$ hätten noch einen von 1 verschiedenen gemeinschaftlichen Faktor m, so dass also $P = mp$ und $Q = mq$ wäre. Wenn alsdann $\frac{P'}{Q'}$ der folgende Näherungswerth, so müsste nach Nro. 216:

$$\frac{P'}{Q'} - \frac{P}{Q} = \pm \frac{1}{QQ'}$$

oder $P'Q - PQ' = \pm 1$

oder, wenn wir pm für P und qm für Q setzen:

$$P'qm - pmQ' = \pm 1 \text{ und folglich}$$

$$P'q - pQ' = \pm \frac{1}{m},$$

d. h. die Differenz zweier ganzen Zahlen müsste gleich sein einem ächten Bruch, was unmöglich ist; also ist auch die Annahme un-

zulässig, P und Q könnten noch einen gemeinschaftlichen Faktor m haben.

219. Jeder Näherungswerth kommt dem wahren Werth des Kettenbruches näher, als der vorangehende Näherungswerth.

Es seien $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$, $\frac{P''}{Q''}$ drei aufeinanderfolgende Näherungswerthe des Kettenbruches x, und m der dem letzten Näherungswerth $\frac{P''}{Q''}$ entsprechende unvollständige Quotient, so ist

$$\frac{P''}{Q''} = \frac{P'm+P}{Q'm+Q}.$$

Dieser Näherungswerth $\frac{P''}{Q''}$ drückt den Werth des Kettenbruches desswegen nicht genau aus, weil darin m gesetzt wurde statt der Reihe $m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \text{etc.}}}$ Wir wollen nun $m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \text{etc.}}} = y$ setzen, so ist offenbar y immer grösser, als 1, weil m mindestens $= 1$, wozu dann noch kommt $\frac{1}{n+\text{etc.}}$. Wenn wir dann in $\frac{P''}{Q''}$ an die Stelle von m die ganze noch folgende Reihe y setzen, so werden wir in $\frac{P'y+P}{Q'y+Q}$ den vollständigen Werth des Kettenbruches erhalten, d. h. es wird $x = \frac{P'y+P}{Q'y+Q}$ sein, und wir hätten nun zu zeigen, dass die Differenz zwischen dem Näherungswerth $\frac{P}{Q}$ und dem Kettenbruch x dem absoluten Werthe nach grösser sei, als die Differenz zwischen x und dem folgenden Näherungswerth $\frac{P'}{Q'}$. Bilden wir diese Differenzen, so ergibt sich sofort:

$$1)\quad x - \frac{P}{Q} = \frac{P'y+P}{Q'y+Q} - \frac{P}{Q} = \frac{(P'y+P)Q - P(Q'y+Q)}{Q(Q'y+Q)} = \frac{(P'Q-PQ')y}{Q(Q'y+Q)}$$

oder, da
$$P'Q - PQ' = \pm 1,$$
$$x - \frac{P}{Q} = \frac{\pm y}{Q(Q'y-Q)}.$$

$$2)\quad x - \frac{P'}{Q'} = \frac{P'y+P}{Q'y+Q} - \frac{P'}{Q'} = \frac{(P'y+P)Q' - P'(Q'y+Q)}{Q'(Q'y+Q)} = \frac{PQ'-P'Q}{Q'(Q'y+Q)}$$
$$= \frac{\mp 1}{Q'(Q'y+Q)}.$$

Wir haben also:

$$1)\quad x - \frac{P}{Q} = \frac{\pm y}{Q(Q'y+Q)}$$

$$2)\quad x - \frac{P'}{Q'} = \frac{\mp 1}{Q'(Q'y+Q)}.$$

Da nun $y > 1$, so ist der Zähler des letzten Bruches (∓ 1) dem absoluten Werthe nach kleiner, als der Zähler des ersten. Die Nenner der beiden Brüche haben den gemeinschaftlichen Faktor $Q'y+Q$; der andere Faktor Q' des letzten Nenners ist grösser, als der andere Faktor Q des ersten. Es hat also der letzte Bruch erstens einen kleinern Zähler und zweitens noch einen grössern Nenner, als der vorangehende; daher wird er um so mehr kleiner sein, als der erste; es ist also in der That die Differenz $x - \frac{P'}{Q'}$ dem absoluten Werth nach kleiner, als $x - \frac{P}{Q}$, was zu beweisen war.

Anmerkung. Die Näherungswerthe geraden Ranges sind sämmtlich grösser, die ungeraden Ranges sämmtlich kleiner, als der Werth x des Kettenbruchs. Da nun jeder folgende Näherungswerth dem x näher kommt, als der vorangehende, so werden der 1ste, 3te, 5te etc., d. h. die Näherungswerthe ungeraden Ranges zwar immer kleiner, als x bleiben, aber doch dem x immer näher rücken, also eine Reihe von zunehmenden Zahlen bilden; die Näherungswerthe geraden Ranges (der 2te, 4te, 6te etc.) sind zwar sämmtlich grösser, als x, kommen aber dem x ebenfalls immer näher und bilden eine Reihe abnehmender Zahlen. Bei einem unendlichen Kettenbruch bilden also die Näherungswerthe geraden Ranges eine Reihe fortwährend abnehmender, die ungeraden Ranges aber eine Reihe fortwährend zunehmender Zahlen, deren gemeinschaftliche Grenze der Werth x des Kettenbruches ist.

220. Lässt sich der Werth eines Kettenbruches nicht genau ausdrücken, so kann man ihm doch so nahe kommen, als man will.

Ist nämlich der Kettenbruch geschlossen, so kann derselbe nach No. 212 auf einen gewöhnlichen Bruch zurückgeführt werden und dieser ist nichts anderes, als der letzte Näherungswerth des Kettenbruches. Wenn aber der Kettenbruch unendlich ist, so lässt sich dennoch immer ein solcher Näherungswerth finden, dass der Unterschied zwischen demselben und dem Kettenbruch x kleiner

wird, als jede noch so kleine Zahl $\frac{1}{k}$. Denn nach No. 217 ist $x - \frac{P}{Q} < \frac{1}{Q^2}$. Man darf daher nur einen Näherungswerth $\frac{P}{Q}$ nehmen, dessen Nenner Q der Bedingung genügt:

$$\frac{1}{Q^2} \overline{\leq} \frac{1}{k}, \text{ oder, was dasselbe ist:}$$
$$Q^2 \overline{\geq} k \text{ und somit}$$
$$Q = \text{oder} > \sqrt{k},$$

was immer möglich ist, da ja die Nenner der Näherungswerthe fortwährend wachsen.

Man darf also, um den Werth des Kettenbruches bis auf $\frac{1}{k}$ genau zu bestimmen, nur einen Näherungswerth nehmen, dessen Nenner Q gleich oder grösser ist, als die Quadratwurzel aus dem reziproken Werth des Näherungsmasses. Sollte er z. B. bis auf $\frac{1}{1000000}$ genau bestimmt werden, so dürfte man nur einen Näherungswerth nehmen, dessen Nenner = oder grösser als $\frac{\sqrt{1000000}}{1}$, also = oder grösser als 1000 wäre.

221. Jeder Näherungswerth kommt dem wahren Werth des Kettenbruches näher, als irgend ein anderer Bruch mit kleinerm Nenner.

Es sei $\frac{P'}{Q'}$ ein ganz beliebiger Näherungswerth des Kettenbruches x, so behaupten wir: es gibt keinen mit kleinern Zahlen geschriebenen Bruch, der näher an x läge, als $\frac{P'}{Q'}$. Denn gesetzt, der nicht reduzirbare Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ läge näher an x, als $\frac{P'}{Q'}$ und wäre zugleich mit kleinern Zahlen geschrieben, als $\frac{P'}{Q'}$, d. h., es wäre $\beta < Q'$, so ist zunächst klar, dass $\frac{\alpha}{\beta}$ kein Näherungswerth sein kann. Er kann nämlich keiner der vorangehenden Näherungswerthe sein, weil $\frac{P'}{Q'}$ schon näher an x liegt, als alle vorangehenden Näherungswerthe, $\frac{\alpha}{\beta}$ aber noch näher an x ist, als $\frac{P'}{Q'}$. Er

kann aber auch keiner der spätern Näherungswerthe sein; diese liegen zwar, wie $\frac{\alpha}{\beta}$, näher an x als $\frac{P'}{Q'}$, werden aber mit grössern Zahlen geschrieben als $\frac{P'}{Q'}$, dessen Nenner Q' schon grösser ist als β. Es kann also $\frac{\alpha}{\beta}$ jedenfalls kein Näherungswerth sein. Dagegen muss $\frac{\alpha}{\beta}$ nothwendig liegen zwischen $\frac{P'}{Q'}$ und dem vorangehenden Näherungswerth $\frac{P}{Q}$; denn x selber liegt zwischen $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q'}$ und da nun $\frac{\alpha}{\beta}$ näher an x liegt als jeder dieser beiden Näherungswerthe, so muss er jedenfalls entweder zwischen $\frac{P'}{Q'}$ und x oder dann zwischen x und $\frac{P}{Q}$, also unter allen Umständen zwischen $\frac{P'}{Q'}$ und $\frac{P}{Q}$ liegen. Es ist daher die Differenz zwischen $\frac{P}{Q}$ und $\frac{\alpha}{\beta}$ jedenfalls dem absoluten Werthe nach kleiner als $\frac{P}{Q} - \frac{P'}{Q'}$, die $= \frac{1}{QQ'}$. Wir haben daher

$$\frac{P}{Q} - \frac{\alpha}{\beta} < \frac{1}{QQ'}$$

$$\frac{P\beta - Q\alpha}{Q\beta} < \frac{1}{QQ'} \text{ oder mit } Q \text{ multiplizirt:}$$

$$\frac{P\beta - Q\alpha}{\beta} < \frac{1}{Q'}.$$

Da nun $\frac{P}{Q}$ nicht $= \frac{\alpha}{\beta}$, so ist $P\beta$ nicht $= Q\alpha$, also die Differenz $P\beta - Q\alpha$ jedenfalls nicht $= 0$; als Differenz zweier ganzen Zahlen muss sie daher mindestens $= 1$ oder grösser als 1 sein. Der Bruch links hat also erstens einen Zähler, der zum mindesten gleich dem Zähler rechts oder dann grösser ist als dieser; zweitens einen Nenner β, der kleiner ist als Q'; folglich muss er unter allen Umständen grösser sein als $\frac{1}{Q'}$; wir sind aber auf das umgekehrte Resultat gekommen, dass er kleiner als $\frac{1}{Q'}$

sein müsste. Daher ist die Annahme, die uns auf diesen Schluss geführt hat, unzulässig.

222. Aufgabe: Eine Grösse x in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Um eine beliebige Grösse x in einen Kettenbruch zu verwandeln, berechnen wir sie zunächst bis auf eine Einheit genau, so werden wir bekommen: x = einer gewissen ganzen Zahl q mehr Etwas, was so gewiss kleiner als 1 sein muss, als q den bis auf eine Einheit genauen Werth von x ausdrückt. Wir können nun diesen Theil auf die Form eines Bruches bringen, dessen Zähler $= 1$, dessen Nenner dann grösser als 1, so dass wir haben:

$$x = q + \frac{1}{y}, \text{ wo } y > 1.$$

Nun machen wir mit y genau dasselbe, was vorhin mit x d. h. wir berechnen y bis auf 1 genau, so werden wir bekommen: y = einer gewissen ganzen Zahl q_1 mehr Etwas, was wieder kleiner als 1 sein muss, so gewiss q_1 bis auf eine Einheit genau den Werth von y ausdrückt, und was wir daher wieder in die Form eines Bruches $\frac{1}{y_1}$ bringen können, dessen Zähler $= 1$, dessen Nenner y_1 aber grösser ist als 1. Ebenso berechnen wir y_1 bis auf eine Einheit genau und bekommen daher

$$y_1 = q_2 + \frac{1}{y_2} \text{ u. s. f.}$$

Bezeichnen q, q_1, q_2, q_3 etc. der Reihe nach die grössten in y, y_1, y_2, y_3 etc. enthaltenen ganzen Zahlen, so hat man:

$$1)\quad x = q + \frac{1}{y}$$

$$2)\quad y = q_1 + \frac{1}{y_1}$$

$$3)\quad y_1 = q_2 + \frac{1}{y_2}$$

$$4)\quad y_2 = q_3 + \frac{1}{y_3} \text{ u. s. f., so dass}$$

$$x = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \ldots \text{ etc.}}}}}$$

223. Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Kettenbruch.

Sei $\frac{A}{B}$ der zu verwandelnde Bruch, so berechnen wir zunächst $\frac{A}{B}$ bis auf eine Einheit genau, indem wir den Zähler A durch den Nenner B dividiren; wenn q der Quotient und R der Divisionsrest, so haben wir:

$$\frac{A}{B} = q + \frac{R}{B} = q + \frac{1}{\frac{B}{R}}, \text{ wo}$$

$\frac{B}{R}$ grösser ist als 1.

Nun berechnen wir $\frac{B}{R}$ bis auf eine Einheit genau und bekommen wieder einen gewissen Quotienten q_1 und einen Divisionsrest R_1, so dass

$$\frac{B}{R} = q_1 + \frac{R_1}{R} = q_1 + \frac{1}{\frac{R}{R_1}}.$$

Indem wir wieder $\frac{R}{R_1}$ bis auf eine Einheit genau berechnen, bekommen wir

$$\frac{R}{R_1} = q_2 + \frac{R_2}{R_1} = q_2 + \frac{1}{\frac{R_1}{R_2}},$$

berechnen nun weiter $\frac{R_1}{R_2}$ bis auf eine Einheit genau und fahren in gleicher Weise so lange fort, bis wir endlich einmal zu einer Division kommen, die aufgeht. Wir haben hiebei 1) den Zähler A durch den Nenner B; 2) den Nenner B durch den erhaltenen Rest R; 3) diesen Rest R durch den neuen Rest R_1; 4) diesen wieder durch den neuen Rest R_2 u. s. f. dividirt, also ganz dasselbe Verfahren, das man nach No. 154 anzuwenden hätte, um zwischen A und B den grössten gemeinschaftlichen Divisor zu suchen.

Es sei z. B. $x = \frac{76895}{19527}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, so dividiren wir zuerst den Zähler durch den Nenner, dann diesen durch den erhaltenen Rest, diesen wieder durch den neuen Rest u. s. f., bis wir endlich zu einem Rest Null kommen; der Quotient dieser letzten Division ist dann der letzte unvollständige

Quotient, mit welchem der Kettenbruch sich schliesst. In der hier folgenden Darstellung enthält die Zeile (a) die Dividenden und Divisoren, und zwar so, dass jede folgende Zahl immer Divisor der vorangehenden ist; die darüber stehende Zeile enthält die Quotienten, die darunter stehende aber die Reste.

		3	3	15	10	5	5	1	3
a)	76895	19527	18314	1213	119	23	4	3	1
	18314	1213	6184 119	23	4	3	1	0	

Die unvollständigen Quotienten wären demnach:

3, 1, 15, 10, 5, 5, 1 und 3

und man hat daher:

$$\frac{76895}{19527} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}}}} .$$

Die Näherungswerthe dieses Kettenbruches sind:

$$\frac{3}{1},\ \frac{4}{1},\ \frac{63}{16},\ \frac{634}{161},\ \frac{3233}{821},\ \frac{16799}{4266},\ \frac{20032}{5087},\ \frac{76895}{19527}.$$

Würde man hier statt des Bruches $\frac{76895}{19527}$ etwa den Näherungswerth $\frac{634}{161}$ nehmen, so wäre der Fehler nach Nro. 217 geringer, als $\frac{1}{161\,.\,821}$ oder als $\frac{1}{123181}$; man hätte also statt d e komplizirten Bruches x einen viel einfachern, der in den meisten Fällen eine hinreichende Genauigkeit böte.

224. Nach Nro. 212 kann nicht nur jeder gewöhnliche Bruch in einen endlichen Kettenbruch verwandelt, sondern auch umgekehrt wieder jeder endliche Kettenbruch auf einen gewöhnlichen Bruch zurückgeführt werden. Daraus folgt aber auch, dass eine *inkommensurable* Zahl immer einen *unendlichen* Kettenbruch liefern und umgekehrt jeder in's Unendliche fortlaufende Kettenbruch eine inkommensurable Zahl ausdrücken muss. Gesetzt nämlich, eine inkommensurable Zahl könnte sich durch einen *endlichen* Kettenbruch ausdrücken lassen, so könnte man *diesen* ja, wie gezeigt wurde, auf einen *gewöhnlichen* Bruch, also auf eine *kommensurable* Grösse zurückführen, und wir kämen so auf den Schluss: eine inkommensurable Grösse müsste einer kommensurabeln gleich sein, was unmöglich ist.

Es sei nun $x = \sqrt{13}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, so schlagen wir das in Nro 222 beschriebene allgemeine Verfahren ein und berechnen also x oder $\sqrt{13}$ zuerst bis auf 1 genau. Offenbar liegt $\sqrt{13}$ zwischen 3 und 4; es ist also 3 die grösste in $\sqrt{13}$ enthaltene ganze Zahl und daher wird $\sqrt{13} = 3$ mehr einem gewissen Rest sein, der kleiner als 1 und also auf die Form $\frac{1}{y}$ gebracht werden kann, wo $y > 1$. Diesen Rest $\frac{1}{y}$ erhalten wir, wenn wir 3 von $\sqrt{13}$ subtrahiren; es ist also $x = \sqrt{13} = 3 + \frac{1}{y}$ wo $\frac{1}{y} = \sqrt{13} - 3$ und also $y = \frac{1}{\sqrt{13} - 3}$ ist. Um nun y bis auf eine Einheit zu finden, transformiren wir $\frac{1}{\sqrt{13} - 3}$ so, dass der Nenner rational wird, indem wir Zähler und Nenner mit $\sqrt{13} + 3$ multipliziren. Wir erhalten so:

$$y = \frac{1}{\sqrt{13} - 3} = \frac{\sqrt{13} + 3}{(\sqrt{13} - 3)(\sqrt{13} + 3)} = \frac{\sqrt{13} + 3}{13 - 9} = \frac{\sqrt{13} + 3}{4}.$$

Nun ist $\sqrt{13}$ bis auf 1 genau $= 3$; also $\sqrt{13} + 3$ bis auf 1 genau $= 6$ und daher $\frac{\sqrt{13} + 3}{4}$ bis auf 1 genau $= \frac{6}{4} = 1$, so dass man setzen kann:

$$y = \frac{\sqrt{13} + 3}{4} = 1 + \frac{1}{y_1},$$

wo dann $\frac{1}{y_1}$ der Rest ist, den wir erhalten, wenn wir von y, d. h. von $\frac{\sqrt{13} + 3}{4}$, noch 1 subtrahiren; also

$$\frac{1}{y_1} = \frac{\sqrt{13} + 3}{4} - 1 = \frac{\sqrt{13} + 3 - 4}{4} = \frac{\sqrt{13} - 1}{4};$$

somit ist $y_1 = \frac{4}{\sqrt{13} - 1}$, was wir abermals transformiren, um es bis auf eine Einheit genau zu berechnen. Wir erhalten dann

$$y_1 = \frac{4}{\sqrt{13} - 1} = \frac{4(\sqrt{13} + 1)}{13 - 1} = \frac{4(\sqrt{13} + 1)}{12} = \frac{\sqrt{13} + 1}{3},$$

was bis auf eine Einheit genau offenbar $= 1$ ist. Indem wir auf gleiche Weise fortfahren, erhalten wir successive:

$$x = 3 + \frac{1}{y}, \text{ wo } \frac{1}{y} = \sqrt{13} - 3$$

$$y = 1 + \frac{1}{y_1}, \text{ wo } \frac{1}{y_1} = \frac{\sqrt{13} - 1}{4}$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{y_2}, \text{ wo } \frac{1}{y_2} = \frac{\sqrt{13} - 2}{3}$$

$$y_2 = 1 + \frac{1}{y_3}, \text{ wo } \frac{1}{y_3} = \frac{\sqrt{13} - 1}{3}$$

$$y_3 = 1 + \frac{1}{y_4}, \text{ wo } \frac{1}{y_4} = \frac{\sqrt{13} - 1}{4}$$

$$y_4 = 6 + \frac{1}{y_5}, \text{ wo } \frac{1}{y_5} = \sqrt{13} - 3.$$

Da dieser letzte Rest $\frac{1}{y_5}$ dem ersten $\frac{1}{y}$ gleich ist, so werden von da an die nämlichen unvollständigen Quotienten wieder zum Vorschein kommen und der Kettenbruch wird daher heissen:

$$x = \sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}}}}$$

Der Leser wird ohne Mühe in der nachfolgenden Darstellung die zur Bestimmung der unvollständigen Quotienten erforderlichen Operationen erkennen:

1) $x = \sqrt{13} = 3 + \frac{1}{y}$, wo $\frac{1}{y} = \sqrt{12} - 3$

2) $y = \frac{1}{\sqrt{13} - 3} = \frac{\sqrt{13} + 3}{13 - 9} = \frac{\sqrt{13} + 3}{4} = 1 + \frac{1}{y_1}$

$$\frac{1}{y_1} = \frac{\sqrt{13} + 3}{4} - 1 = \frac{\sqrt{13} + 3 - 4}{4} = \frac{\sqrt{13} - 1}{4}$$

3) $y_1 = \frac{4}{\sqrt{13} - 1} = \frac{4(\sqrt{13} + 1)}{13 - 1} = \frac{4(\sqrt{13} + 1)}{12} = \frac{\sqrt{13} + 1}{3} = 1 + \frac{1}{y_2}$

$$\frac{1}{y_2} = \frac{\sqrt{13} + 1}{3} - 1 = \frac{\sqrt{13} + 1 - 3}{3} = \frac{\sqrt{13} - 2}{3}$$

4) $y_2 = \frac{3}{\sqrt{13}-2} = \frac{3(\sqrt{13}+2)}{13-4} = \frac{3(\sqrt{13}+2)}{9} = \frac{\sqrt{13}+2}{3} = 1 + \frac{1}{y_3}$

$\frac{1}{y_3} = \frac{\sqrt{13}+2}{3} - 1 = \frac{\sqrt{13}+2-3}{3} = \frac{\sqrt{13}-1}{3}$

5) $y_3 = \frac{3}{\sqrt{13}-1} = \frac{3(\sqrt{13}+1)}{13-1} = \frac{3(\sqrt{13}+1)}{12} = \frac{\sqrt{13}+1}{4} = 1 + \frac{1}{y_4}$

$\frac{1}{y_4} = \frac{\sqrt{13}+1}{4} - 1 = \frac{\sqrt{13}-3}{4}$

6) $y_4 = \frac{4}{\sqrt{13}-3} = \frac{4(\sqrt{13}+3)}{13-9} = \frac{4(\sqrt{13}+3)}{4} = \sqrt{13}+3 = 6 + \frac{1}{y_5}$

$\frac{1}{y_5} = \sqrt{13}+3-6 = \sqrt{13}-3 = \frac{1}{y}.$

225. Wir könnten die Richtigkeit der vorigen Rechnung prüfen, indem wir die umgekehrte Aufgabe lösten, nämlich den erhaltenen Kettenbruch wieder auf die inkommensurable Grösse zurückzuführen, aus welcher er entstanden. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit x den Werth des Kettenbruches, so wäre also:

$$x = 3 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\text{etc.}}}}}}}}}} \quad \text{oder} \quad x - 3 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\text{etc.}}}}}}}}}} \quad (1)$$

Es ist somit $x-3$ ein periodischer Kettenbruch mit fünfgliedriger Periode; zum Nenner 6 des 5ten Gliedes kommt wieder derselbe in's Unendliche fortgehende periodische Kettenbruch hinzu, und wenn daher $x-3$ der Werth des ganzen periodischen Kettenbruches ist, so wird $x-3$ auch noch der Werth der zum Nenner des 5ten Gliedes hinzuzufügenden unendlichen Reihe $1 + \frac{1}{1+\text{etc.}}$ sein. Wir können daher schreiben:

$$x-3=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+x-3}}}}} \quad \text{oder} \quad x-3=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+x}}}}} \quad (2)$$

Allein wenn wir die rechte Seite der Gleichung (2) auf die Form eines gewöhnlichen Bruches bringen, so erhalten wir $\frac{11+3x}{18+5x}$; also geht die Gleichung (1) oder die mit ihr identische Gleichung (2) über in

$$(3) \quad x-3=\frac{11+3x}{18+5x} \text{ oder}$$

$$\begin{aligned}
(x-3)(18+5x) &= 11+3x, \text{ woraus successive folgt:} \\
18x+5x^2-54-15x &= 11+3x \\
3x+5x^2-54 &= 11+3x \\
5x^2-54 &= 11 \\
5x^2 &= 11+54=65 \\
x^2 &= \tfrac{65}{5}=13 \\
x &= \sqrt{13}
\end{aligned}$$

Also ist der oben erhaltene Kettenbruch in der That der Werth von $\sqrt{13}$.

226. Man könnte sich auch der Kettenbrüche bedienen, um die Exponentialgleichug $a^x=N$ aufzulösen, d. h. um den Logarithmuss der Zahl N für die Basis a zu berechnen. Gesetzt z. B. a und N wären beide grösser, als 1, so dürften wir nur an die Stelle von x successive 0, 1, 2, 3 etc. setzen, um endlich zu zwei Zahlen m und $m+1$ zu gelangen mit der Eigenschaft, dass $a^m<N$ und $a^{m+1}>N$; alsdann läge x offenbar zwischen m und $m+1$ und wir könnten daher $x=m+\frac{1}{y}$ setzen, wo $y>1$. Dadurch ginge die Gleichung $a^x=N$ über in $a^{m+\frac{1}{y}}=N$ oder $a^m \cdot a^{\frac{1}{y}}=N$, woraus $a^{\frac{1}{y}}=\frac{N}{a^m}$, oder, wenn wir zur Abkürzung $\frac{N}{a^m}=c$ setzen, $a^{\frac{1}{y}}=c$ woraus folgt: $a=c^y$ oder $c^y=a$ (2)

Nun suchen wir y bis auf 1 genau zu bestimmen, indem wir zwei ganze Zahlen m_1 und m_1+1 aufsuchen, welche y zwischen sich enthalten, welche also so beschaffen sind, dass $c^{m_1}<a$ und

$c^{m_1+1} > a$, dann wird $y = m_1 + \frac{1}{y_1}$ gesetzt werden können, wo $y_1 > 1$; daher wird $c^y = c^{m_1 + \frac{1}{y_1}} = c^m . c^{\frac{1}{y_1}}$ sein und somit die Gleichung (2) übergehen in

$$c^{m_1} . c^{\frac{1}{y_1}} = a, \text{ woraus}$$

$$c^{\frac{1}{y_1}} = \frac{a}{c^{m_1}} \text{ oder}$$

$$c^{\frac{1}{y_1}} = d,$$

wenn $\frac{a}{c^{m_1}} = d$ gesetzt wird; hieraus ergibt sich durch Potenzirung mit y_1:

$$d^{y_1} = c \quad (3).$$

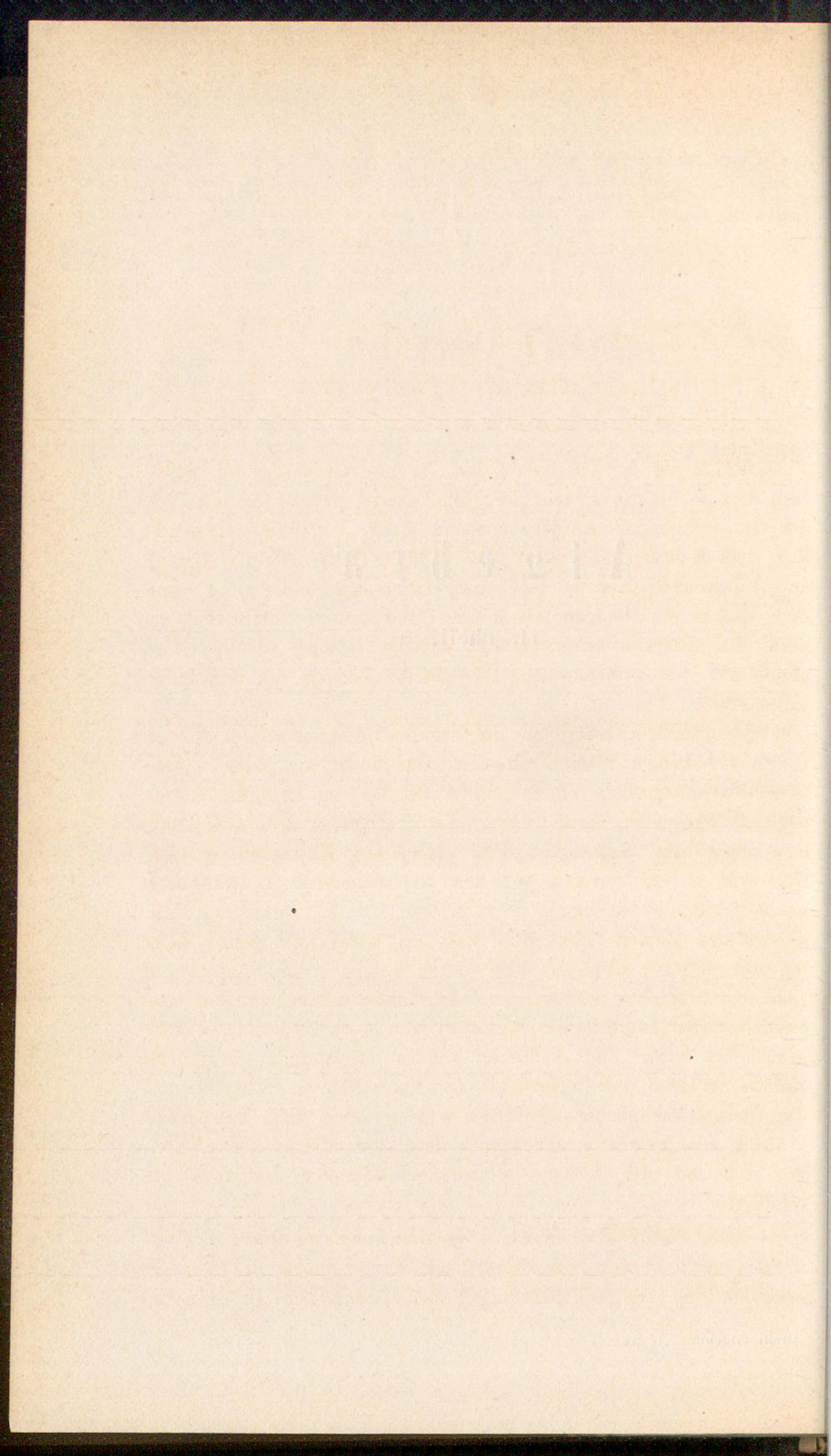
Indem wir auf gleiche Weise fortfahren, erhalten wir:

$$x = m + \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \text{etc.}}},$$

woraus x mit einem beliebigen Grade von Genauigkeit berechnet werden kann. Wir wollen uns jedoch hiebei um so weniger aufhalten, als die Entwicklung des Exponenten x in einen Kettenbruch meistens äusserst mühsam uud zeitraubend und daher diese Methode zur Bestimmung der Logarithmen praktisch unausführbar ist, während später die Berechnung der Logarithmen mittelst der logarithmischen Reihe keinerlei Schwierigkeiten mehr bietet.

Algebra

II. Theil.



Erster Abschnitt.

Unbestimmte Analytik.

227. Bei der Diskussion der Gleichungen haben wir gesehen, dass so oft die Anzahl der Unbekannten grösser ist, als die der Gleichungen, die Aufgabe unbestimmt ist, d. h. dass sie unendlich viele Auflösungen zulässt (Nro. 129). Uebertrifft die Anzahl der Unbekannten die der gegebenen Gleichungen bloss um 1, hat man also m Gleichungen mit $m+1$ Unbekannten aufzulösen, so wird die Aufgabe zurückgeführt auf die Lösung einer Gleichung mit zwei Unbekannten, also auf die Lösung der Gleichung $ax+by=c$.

Man kann hier für eine der beiden Unbekannten, z. B. für y, ganz beliebige Werthe einsetzen und findet zu jedem dieser Werthe von y einen bestimmten Werth von x. In dieser Allgemeinheit gestellt, kann daher die Auflösung der Gleichung $ax+by=c$ kein Gegenstand einer besondern Untersuchung sein. Sie wird es erst, wenn wir den zu suchenden Unbekannten noch bestimmte Bedingungen auferlegen, z. B. verlangen, dass sie ganze Zahlen oder gar, dass sie positive ganze Zahlen sein sollen. Offenbar wird durch solche Bedingungen die Zahl der möglichen Auflösungen beschränkt, indem von den unendlich vielen möglichen Auflösungen eine bestimmte Klasse ausgeschieden wird. Die Auflösung solcher Gleichungen in ganzen Zahlen ist nun der Gegenstand der unbestimmten Analytik und die hierauf bezüglichen Probleme werden etwa auch diophantische Aufgaben genannt nach dem Alexandriner Diophant, der sich mit der Lösung solcher unbestimmter Aufgaben beschäftigte.

228. Lehrsatz. *Wenn in der Gleichung $ax+by=c$ die Coefzienten a und b einen gemeinschaftlichen Faktor haben, der in c nicht vorkommt, so lässt die Gleichung gar keine ganzzahlige Auflösung zu.*

Beweis. Sei m ein gemeinschaftlicher Faktor von a und b, der aber nicht Faktor ist von c, so wäre etwa $a = a'm$ und $b = b'm$; daher ginge die Gleichung über in

$$a'mx + b'my = c, \text{ woraus}$$

$$a'x + b'y = \frac{c}{m}$$

Nun ist die rechte Seite $\frac{c}{m}$ nach Voraussetzung ein Bruch; dagegen wird die linke Seite $a'x + b'y$ für alle ganzen Zahlen, die man an die Stelle von x und y setzen mag, immer eine ganze Zahl, kann also nie $= \frac{c}{m}$ sein. Die Auflösung der Gleichung in ganzen Zahlen ist daher in diesem Fall unmöglich.

Beispiel: Sei $15x + 21y = 29$, so haben die Coeffizienten 15 und 21 den Faktor 3 gemeinschaftlich, der in 29 nicht vorkommt. Indem wir durch 3 dividiren, kommt

$$5x + 7y = \tfrac{29}{3}.$$

Was für ganze Zahlen man auch an die Stelle von x und y setzen mag, die linke Seite $5x + 7y$ wird stets ganz und daher nie $= \frac{29}{3}$.

Man kann es somit einer Gleichung von vorn herein ansehen, wenn sie keine ganzzahligen Auflösungen zulässt. Erkennt man einen gemeinschaftlichen Faktor von a und b, so darf man nur die Gleichung durch diesen dividiren; bekommt man dann rechts einen Bruch, so ist die Auflösung in ganzen Zahlen unmöglich.

Wir denken uns nun die Gleichung von ihren gemeinschaftlichen Divisoren befreit; dann behaupten wir:

229. Lehrsatz. *Wenn a und b prim zu einander sind, so lässt die Gleichung $ax + by = c$ stets ganzzahlige Auflösungen zu.*

Beweis. Lösen wir unsere Gleichung nach irgend einer der beiden Unbekannten, z. B. nach x auf, so bekommen wir $x = \frac{c - by}{a}$. Denken wir uns nun hier für y successive alle unter a liegenden ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3 . . . . bis $a - 1$ substituirt und jedesmal die Division ausgeführt, so behaupten wir, dass jede dieser a Divisionen einen andern Rest liefert. Denn wenn z. B. y' und y'' zwei solche unter a liegende ganze Zahlen bedeu-

ten, so bekommt man durch deren Substitution an die Stelle von y die Ausdrücke $\frac{c-by'}{a}$ und $\frac{c-by''}{a}$. Denken wir uns die Division ausgeführt und bezeichnen wir mit q' und q'' die Quotienten, mit r' und r'' die ebenfalls ganzzahligen Reste, so haben wir

$$1. \quad \frac{c-by'}{a} = q' + \frac{r'}{a}$$

$$2. \quad \frac{c-by''}{a} = q'' + \frac{r''}{a}$$

Gesetzt nun, es könnte $r''=r'$ sein, so bekäme man durch Subtraktion:

$$\frac{c-by'}{a} - \frac{c-by''}{a} = q' - q''$$

oder

$$\frac{b(y''-y')}{a} = q' - q''.$$

Allein q' und q'' sind ganze Zahlen; ihre Differenz $q'-q''$ müsste also ebenfalls eine ganze Zahl, somit $b(y''-y')$ theilbar sein durch a. Nun ist aber a prim zu dem einen Faktor b; daher müsste der andere Faktor $y''-y'$ durch a theilbar sein d. h. es müsste die Differenz zweier ganzen Zahlen, deren jede kleiner als a, durch a theilbar sein, was unmöglich ist. Wenn wir also an die Stelle von y successive alle ganzen Zahlen von 0 an bis zu $a-1$ setzen und jedesmal die Division ausführen, so bekommen wir a ganzzahlige Reste, die sämmtlich verschieden und sämmtlich kleiner als a sind; diese Reste sind demnach nichts anderes als die unter a liegenden ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3 . . . bis $a-1$; einer dieser Reste und nur einer ist daher $=0$, und die Zahl, deren Substitution in $\frac{c-by}{a}$ diesen Rest Null liefert, macht $x = \frac{c-by}{a}$ zu einer ganzen Zahl. Die Gleichung lässt demnach wirklich ganzzahlige Auflösungen zu.

Beispiel 1. Sei $7x+5y = 232$, so hat man

$$x = \frac{232-5y}{7}$$

$y=0$ gibt nun $x = \frac{232}{7} = 33 + \frac{1}{7}$

$y=1$ „ „ $x = \frac{232-5}{7} = \frac{227}{7} = 32 + \frac{3}{7}$

$$y = 2 \text{ gibt } „ \quad x = \frac{23-10}{7} = \frac{222}{27} = 31 + \frac{5}{7}$$

$$y = 3 \quad „ \quad „ \quad x = \frac{232-15}{7} = \frac{217}{7} = 31 + \frac{0}{7}$$

$$y = 4 \quad „ \quad „ \quad x = \frac{232-20}{7} = \frac{212}{7} = 30 + \frac{2}{7}$$

$$y = 5 \quad „ \quad „ \quad x = \frac{232-25}{7} = \frac{207}{7} = 29 + \frac{4}{7}$$

$$y = 6 \quad „ \quad „ \quad x = \frac{232-30}{7} = \frac{202}{7} = 28 + \frac{6}{7}$$

Wir haben demnach als Reste successive bekommen: 1, 3, 5, 0, 4, und 6 d. h. die sämmtlichen unter 7 liegenden ganzen Zahlen. Die Substitution $y = 3$ lieferte den Rest Null, machte also x zu einer ganzen Zahl. Somit wäre $y = 3$ und $x = 31$ eine ganzzahlige Auflösung dieser Gleichung.

Beispiel 2. $11x + 26y = 118$

$$x = \frac{118 - 26y}{11}$$

Wir setzen auch hier wieder an die Stelle von y successive alle ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3 bis 10 und werden sehen, dass als Reste wieder alle ganzen Zahlen unter 11 zum Vorschein kommen, wenn wir nur die Division so einrichten, dass wir lauter positive Reste erhalten.

1. $y = 0$ gibt $x = \dfrac{118-0}{11} = \dfrac{118}{11} = 10 + \dfrac{8}{11}$

2. $y = 1$ „ $x = \dfrac{118-26}{11} = \dfrac{92}{11} = 8 + \dfrac{4}{11}$

3. $y = 2$ „ $x = \dfrac{118-52}{11} = \dfrac{66}{11} = 6 + \dfrac{0}{11}$

4. $y = 3$ „ $x = \dfrac{118-78}{11} = \dfrac{40}{11} = 3 + \dfrac{7}{11}$

5. $y = 4$ „ $x = \dfrac{118-104}{11} = \dfrac{14}{11} = 1 + \dfrac{3}{11}$

6. $y = 5$ „ $x = \dfrac{118-130}{11} = \dfrac{-12}{11} = \dfrac{-22+10}{11} = -2 + \dfrac{10}{11}$

7. $y = 6$ „ $x = \dfrac{118-156}{11} = \dfrac{-38}{11} = -4 + \dfrac{6}{11}$

8. $y = 7$ „ $x = \dfrac{118-182}{11} = \dfrac{-64}{11} = -6 + \dfrac{2}{11}$

9. $y = 8$ gibt $x = \frac{118-208}{11} = \frac{-90}{11} = -9 + \frac{9}{11}$

10. $y = 9$ „ $x = \frac{118-234}{11} = \frac{-116}{11} = -11 + \frac{5}{11}$

11. $y = 10$ „ $x = \frac{118-260}{11} = \frac{-142}{11} = -13 + \frac{1}{11}$

Die Reste sind also: 8, 4, 0, 7, 3, 10, 6, 2, 9, 5 und 1; für $y = 2$ wurde $x = 6$. Wir bemerken überdiess, dass im ersten Beispiel jeder folgende Werth des x um $\frac{5}{7}$, im zweiten um $\frac{26}{11}$ kleiner als der vorangehende ist.

230. Lehrsatz: *Wenn man eine ganzzahlige Auflösung der Gleichung $ax+by = c$ kennt, so kann man beliebig viele andere finden.*

Sei z. B. $x = \alpha$ $y = \beta$ eine ganzzahlige Auflösung, so müsste also

$$a\alpha + b\beta = c \text{ sein.}$$

Subtrahiren wir diese von der gegebenen Gleichung, so kommt

$$a(x-\alpha) + b(y-\beta) = 0$$

woraus folgt

$$x - \alpha = \frac{b(\beta-y)}{a} \text{ oder}$$

$$x = \alpha + \frac{b(\beta-y)}{a}$$

Der Werth von x setzt sich also zusammen 1., aus der ganzen Zahl α und 2., aus dem bruchförmigen Theil $\frac{b(\beta-y)}{a}$. Es kann daher x nur dann ganzzahlig ausfallen, wenn $\frac{b(\beta-y)}{a}$ ganz wird. Nun ist aber a prim zu b; damit also $b(\beta-y)$ theilbar werde durch a, muss $\beta-y$ durch a theilbar sein und man darf somit für y nur solche ganze Zahlen setzen, für welche $\frac{\beta-y}{a} =$ einer beliebigen ganzen Zahl n wird d. h. die Bedingung für die Ganzzahligkeit des x ist:

$$\frac{\beta-y}{a} = n \text{ oder}$$

$$\beta - y = an \text{ oder}$$

$$y = \beta - an; \text{ dann wird}$$

$$x = \alpha + bn.$$

Die Ausdrücke $x = \alpha + bn$, $y = \beta - an$ liefern beliebig viele ganzzahlige Auflösungen, wenn man für n nur ganze Zahlen einsetzt.

Man könnte demnach aus $\begin{matrix} x = \alpha + nb \\ y = \beta - na \end{matrix}$ die sämmtlieben ganzzahligen Auflösungen ableiten, wenn man für n successive alle positiven und nachher noch alle negativen ganzen Zahlen einsetzte.

Statt in $x = \alpha + nb$, $y = \beta - na$ alle negativen ganzen Zahlen einzusetzen, könnte man auch n durch $-n$ ersetzen und dann in den so erhaltenen Ausdrücken $x = \alpha - nb$, $y = \beta + na$ für x wieder alle positiven ganzen Zahlen setzen.

Man kann daher diesen 3ten Lehrsatz auch in folgender Weise bestimmter fassen:

Wenn $x = \alpha$, $y = \beta$ irgend eine ganzzahlige Auflösung der Gleichung $ax + by = c$, so sind sämmtliche ganzzahlige Auflösungen derselben enthalten in

$$\left.\begin{matrix} x = \alpha + nb \\ y = \beta - na \end{matrix}\right\} \text{oder} \begin{matrix} x = \alpha - nb \\ y = \beta + na \end{matrix}$$

wo man für n der Reihe nach alle positiven und dann noch alle negativen ganzen Zahlen einzusetzen hat.

Von diesen beiden Formelgruppen genügt also jede für sich allein, wenn man n sowol positiv als negativ nimmt, während beide benutzt werden müssten, wenn man für n nur die positiven ganzen Zahlen einsetzen wollte.

Anmerkung. Wenn es sich bloss darum handeln würde, die Richtigkeit des eben ausgesprochenen Satzes zu erweisen, ohne zu zeigen, wie man von der speziellen Auflösung $\begin{matrix} x = \alpha \\ y = \beta \end{matrix}$ zu der allgemeinen $\begin{matrix} x = \alpha + nb \\ y = \beta - na \end{matrix}$ gelangt, so würden wir einfach $x = \alpha + nb$ und $y = \beta - na$ in $ax + by$ substituiren, wodurch wir erhielten: $ax + by = a(\alpha + nb) + b(\beta - na) = a\alpha + anb + b\beta - bna = a\alpha + b\beta$, was aber nach Voraussetzung $= c$.

Zusatz: Die ganzzahligen Auflösungen der Gleichung $ax + by = c$ zerfallen in 2 Gruppen:

Bei der einen Gruppe bilden die Werthe von x eine arithmetische Reihe, deren Differenz = dem Coeffizienten von y, die Werthe von y dagegen eine Reihe, deren Differenz gleich dem Coeffizienten von x mit umgekehrtem Zeichen; —

Bei der andern Gruppe aber bilden die Werthe von x eine arithmetische Progression, deren Differenz gleich dem Coeffizienten von y mit entgegengesetztem Zeichen, die Werthe von y

dagegen eine arithmetische Progression, deren Differenz gleich dem Coeffizienten von x ist.

Denn sämmtliche Auflösungen gehen hervor aus $x = \alpha + nb$ und $y = \beta - na$, wenn man hier dem n erst alle positiven, und nachher noch alle negativen ganzzahligen Werthe gibt. Nun bekommt man aber:

für	$n = 0$	1	2	3	4	5
aus $x=\alpha+nb$:	$x = \alpha$	$\alpha+b$	$\alpha+2b$	$\alpha+3b$	$\alpha+4b$	$\alpha+5b$
aus $y=\beta-na$:	$y = \beta$	$\beta-a$	$\beta-2a$	$\beta-3a$	$\beta-4a$	$\beta-5a$

ferner

für $n =$	0	—1	—2	—3	—4	—5
aus $x=\alpha+nb$:	$x=\alpha$	$\alpha-b$	$\alpha-2b$	$\alpha-3b$	$\alpha-4a$	$\alpha-5b$
aus $x=\beta-na$:	$y=\beta$	$\beta+a$	$\beta+2a$	$\beta+3a$	$\beta+4a$	$\beta+5a$

woraus die Behauptung unmittelbar klar ist.

231. Aufgabe: Die sämmtlichen ganzzahligen Auflösungen der Gleichung $ax+by=c$ zu finden.

Mit Hülfe der Sätze in 229 und 230 sind wir schon ohne Weiteres im Stande, die sämmtlichen ganzzahligen Auflösungen unserer Gleichung zu bestimmen. Denn wenn wir an die Stelle von y successive alle ganzen Zahlen von 0 bis $a-1$ setzen, so muss eine derselben $x = \frac{c-by}{a}$ zu einer ganzen Zahl machen. Wir haben also dann einmal eine ganzzahlige Auflösung. Sei dieselbe etwa $x = \alpha$ und $y = \beta$, so finden sich alle übrigen, wenn wir in $\left.\begin{array}{l} x = \alpha + nb \\ y = \beta - na \end{array}\right\}$ für n successive 1, 2, 3, 4, 5 etc., dann —1, —2, —3, —4 etc. setzen.

Beispiele. Sei $5x+4y = 29$ die Gleichung, so ist

$$x = \frac{29-4y}{2}$$

$$y = 0 \text{ gibt } x = \tfrac{29}{5} = 5 + \tfrac{4}{5}.$$

$$y = 1 \text{ gibt } x = \frac{29-4}{5} = \frac{25}{5} = 5.$$

Somit ist $y = 1$, $x = 5$ eine ganzzahlige Auflösung; sämmtliche Auflösungen aber liefert uns die Formelgruppe $\begin{array}{l} x = 5+4n \\ y = 1-5n. \end{array}$

Man erhält für

$n = 0$	1	2	3	4	5	6	7
$x = 5+4n = 5$	9	13	17	21	25	29	33
$y = 1-5n = 1$	—4	—9	—14	—19	—24	—29	—34

ferner für

$n=-1$	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
$x=\ 1$	-3	-7	-11	-15	-19	-23	-27
$y=\ 6$	11	16	21	26	31	36	41

u. s. f. Man sieht hier, dass von den unendlich vielen ganzzahligen Auflösungen, welche unsere Gleichung zulässt, nur die zwei, welche dem $n=0$ und $n=-1$ entsprechen, positiv ausfallen, nämlich $\begin{matrix} x=5 \\ y=1 \end{matrix}$ und $\begin{matrix} x=1 \\ y=6, \end{matrix}$ während bei allen übrigen der eine Werth positiv, der andere negativ ist.

Beispiel 2. $6x+7y=51$

$$x=\frac{51-7y}{6}$$

$$y=0 \quad \text{gibt} \quad x=\frac{51}{6}=8+\frac{3}{6}$$

$$y=1 \quad ,, \quad x=\frac{51-7}{6}=\frac{44}{6}=7+\frac{2}{6}$$

$$y=2 \quad ,, \quad x=\frac{51-14}{6}=\frac{37}{6}=6+\frac{1}{6}$$

$$y=3 \quad ,, \quad x=\frac{51-21}{6}=\frac{30}{6}=5$$

Somit $x=5$, $y=3$ eine ganzzahlige Lösung. Um alle übrigen zu finden, haben wir nur

$$\begin{matrix} x=5+7n \\ y=3-6n \end{matrix} \quad \text{oder dann} \quad \begin{matrix} x=5-7n \\ y=3+6n \end{matrix}$$

zu setzen und hierin der Reihe dem n zuerst alle positiven und nachher alle negativen ganzzahligen Werthe zu geben.

232. Diese Auflösungsmethode ist sehr einfach und empfehlenswerth, wenn die Coeffizienten der Unbekannten kleine Zahlen sind; wenn dagegen diese Coeffizienten grössere Zahlen sind, so wird das Verfahren dadurch mühsam werden, dass man unter Umständen eine bedeutende Anzahl von Substitutionen machen muss, um zu einer ersten ganzzahligen Lösung zu gelangen. Wenn z. B. der kleinere der Coeffizienten nur 41 wäre, so könnten möglicher Weise 41 Substitutionen erforderlich werden, um zu einer ersten ganzzahligen Auflösung zu gelangen. Noch weniger empfiehlt sich ein anderes, auf der Theorie der Kettenbrüche beruhendes Verfahren, bei welchem, wenn $b>a$, man $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch verwandelt, dann die Näherungswerthe

bestimmt und endlich die Differenz der beiden letzten bildet. Ist $\frac{P}{Q}$ der vorletzte, so ist $\frac{b}{a}$ der letzte Näherungswerth und man hat dann

$$\frac{P}{Q} - \frac{b}{a} = + \frac{1}{Qa}, \text{ wenn } \frac{P}{Q} \text{ geraden,}$$

$$\frac{P}{Q} - \frac{b}{a} = - \frac{1}{Qa}, \text{ wenn } \frac{P}{Q} \text{ ungeraden Ranges.}$$

Im ersten Fall hätte man

$$Pa - Qb = +1,$$

daher

$$Pac - Qbc = c$$

oder

$$a \,.\, (Pc) + b \,.\, (-Qc) = c,$$ woraus man erkennt, dass

$$x = Pc$$
$$y = -Qc$$

eine Auflösung der Gleichung ist.

B e i s p i e l. Sei $39x + 56y = 137$.

Wir suchen den grössten gemeinschaftlichen Divisor zwischen 56 und 39, so bekommen wir nach Nro. 223.:

	1	2	3	2	2
56	39	17	5	2	1
17	5	2	1		

Somit $\frac{56}{39} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}$.

Die Näherungswerthe sind; 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{10}{7}$, $\frac{23}{16}$, $\frac{56}{39}$. Nun ist

$$\frac{23}{16} - \frac{56}{39} = \frac{1}{16 \,.\, 39}$$

woraus

$$39 \,.\, 23 - 56 \,.\, 16 = 1$$ und

daher $39 \,.\, (23 \,.\, 137) + 56 \,.\, (-16 \,.\, 137) = 137$.

Es ist daher $x = 23 \,.\, 137$

$y = -16 \,.\, 137$ eine ganzzahlige Auflösung dieser Gleichung.

Für Fälle, wo wegen der Grösse der Coeffizienten das in 231 angegebene Verfahren nicht anwendbar ist, muss es daher sehr erwünscht sein, noch ein anderes, rascher zum Ziele führendes Verfahren kennen zu lernen.

233. A u f g a b e. U n a b h ä n g i g v o n d e n b e i d e n e r w ä h n t e n M e t h o d e n d i e G l e i c h u n g $ax + by = c$ i n g a n z e n Z a h l e n a u f z u l ö s e n.

Wir betrachten zunächst zwei Spezialfälle.

Sei 1. einer der Coeffizienten von x oder y die Einheit, sei z. B. $a=1$, so darf man die Gleichung

$$x+by=c$$

nur nach x auflösen und bekommt sofort $x=c-by$. Indem man hier an die Stelle von y beliebige ganze Zahlen einsetzt, bekommt man stets ganzzahlige Werthe für x.

Sei 2. einer der Coeffizienten von x oder y in dem ganz bekannten Gliede c enthalten, wie in der Gleichung

$$ax+by=ma$$

so hätte man $x=\frac{ma-by}{a}=m-\frac{by}{a}$.

Da nun a als prim zu b vorausgesetzt wird, so kann $\frac{by}{a}$ nur dann ganz werden, wenn y theilbar ist durch a. Man darf also nur y gleich irgend einem Vielfachen von a setzen, etwa $y=at$, so wird $x=m-bt$, welche beide ganz werden für jedes beliebige ganzzahlige t.

Sind aber in der Gleichung

$$ax+by=c \quad (1)$$

a und b beide von 1 verschieden, prim unter sich und keiner in dem absoluten Gliede c enthalten, so wollen wir, wenn a der grössere der beiden Coeffizienten, a durch b dividiren, dann b durch den erhaltenen Rest u. s. f., bis wir zu einem Rest $=1$ kommen. Wenn dann q, q_1, q_2, q_3 die Quotienten, r, r_1, r_2, $r_3=1$ die zugehörigen Reste bedeuten, so hat man

$$\left.\begin{aligned} a &= bq + r \\ b &= rq_1 + r_1 \\ r &= r_1q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2q_3 + 1 \end{aligned}\right\} (\alpha)$$

Nun lösen wir unsere Gleichung (1) auf nach der Unbekannten, welche den kleinern Coeffizienten enthält, also nach y und bekommen:

$y=\frac{c-ax}{b}$ oder, für a den Werth aus (α) eingesetzt:

$$y=\frac{c-bqx-rx}{b}=-qx+\frac{c-rx}{b}.$$

Der Werth von y besteht demnach aus zwei Theilen: einem ersten Theil $-qx$, der ganz wird für jedes ganzzahlige x, —

und einem zweiten Theil $\frac{c-rx}{b}$, der keineswegs für jede ganze Zahl, welche man an die Stelle von x setzt, ganz ausfällt. Um also für y eine ganze Zahl zu erhalten, muss man unter den an die Stelle von x zu setzenden ganzen Zahlen eine Auswahl treffen; es dürfen für x nur solche ganze Zahlen eingesetzt werden, für welche $\frac{c-rx}{b}$ gleich irgend einer ganzen Zahl t wird. Wir bekommen also für die Ganzzahligkeit des x folgende Bedingungsgleichung:

$$(2) \quad \frac{c-rx}{b} = t \text{ oder } c-rx = bt, \text{ wodurch } y = -qx + t.$$

Die Gleichung (2) lässt sich auch so schreiben:

$$bt + rx = c \quad (2),$$

ist also eine Gleichung von derselben Form, wie (1), nur dass der Coeffizient r von x kleiner ist als in (1). Wir nehmen nun mit dieser Gleichung dasselbe vor, wie oben mit (1) d. h. wir lösen sie nach der Unbekannten auf, die den kleinern Coeffizienten hat, also nach x und bekommen unter Berücksichtigung der Gleichungen (α):

$$x = \frac{c-bt}{r} = \frac{c-rq_1t-r_1t}{r} = -q_1t + \frac{c-r_1t}{r}.$$

Hieraus erkennen wir wieder, dass x nur dann eine ganze Zahl sein kann, wenn wir für t solche ganze Zahlen einsetzen, für welche $\frac{c-r_1t}{r}$ ganz ausfällt. Wir bekommen daher die neue Bedingungsgleichung:

$$(3) \quad \frac{c-r_1t}{r} = t_1 \text{ oder } c-r_1t = rt_1$$

wodurch
$$x = -q_1t + t_1.$$

Diese Gleichung (3) schreibt sich auch so:

$$(3) \quad rt_1 + r_1t = c$$

Lösen wir diese auf nach der Unbekannten t, welche den kleinern Coeffizienten enthält und ersetzen dabei r durch seinen Werth in (α), so kommt

$$t = \frac{c-rt_1}{r_1} = \frac{c-r_1q_2t_1-r_2t_1}{r_1} = -q_2t_1 + \frac{c-r_2t_1}{r_1}$$

und es ist klar, dass t nur dann ganz wird, wenn man für t_1 solche ganze Zahlen setzt, welche $\frac{c-r_2t_1}{r_1} = t_2$ d. h. gleich einer

beliebigen ganzen Zahl machen. Daher die neue Bedingungsgleichung:

(4) $\frac{c-r_2 t_1}{r_1} = t_2$ oder $r_1 t_2 + r_2 t_1 = c$, wodurch $t = -q_2 t_1 + t_2$.

Lösen wir die Gleichung (4) wieder auf nach derjenigen Unbekannten, welche den kleinern Coeffizienten hat, also nach t_1, so kommt:

$$t_1 = \frac{c-r_1 t_2}{r_2} = \frac{c-r_2 q_3 t_2 - t_2}{r_2} = -q_3 t_2 + \frac{c-t_2}{r_2}.$$

Offenbar wird hier t_1 wieder ganz, wenn $\frac{c-t_2}{r_2}$ ganz ausfällt. Daher die neue Bedingung:

(5) $\frac{c-t_2}{r_2} = t_3$, wodurch $t_1 = -q_3 t_2 + t_3$.

Aus Gleichung (5) aber folgt:

$$c - t_2 = r_2 t_3 \text{ oder } r_2 t_3 + t_2 = c$$

d. h. wir haben eine Gleichung, in welcher die eine Unbekannte t_2 den Coeffizienten 1 hat und daraus ergibt sich dann:

$$t_2 = c - r_2 t_3,$$

wo die Ganzzahligkeit des t_2 an keine weitere Bedingung mehr geknüpft ist, als an die, dass man für t_3 eine beliebige ganze Zahl einsetze.

Wir haben hier nacheinander gefunden:

1) $y = -qx + t$
2) $x = -q_1 t + t_1$
3) $t = -q_2 t_1 + t_2$
4) $t_1 = -q_3 t_2 + t_3$
5) $t_2 = -c - r_2 t_3$.

Jede ganze Zahl, welche an die Stelle von t_3 gesetzt wird, macht nun t_2 ganz; diese Werthe von t_2 und t_3 machen ferner nach Gleichung (4) t_1 zu einer ganzen Zahl; setzen wir ferner den für t_1 und t_2 gefundenen Werth in (3) ein, so wird t ganz; t und t_1 in (2) gesetzt, machen x ganz und endlich dieser Werth von x mit dem zugehörigen Werth von t macht y ganz. Wir müssten nun, um die sämmtlichen ganzzahligen Auflösungen unserer Gleichung $ax + by = c$ zu bekommen, für t_3 successive alle positiven und dann noch alle negativen ganzen Zahlen einsetzen und die zugehörigen Werthe von x und y jedesmal berechnen. Statt dessen ist es viel zweckmässiger, x und y gleich von vorn herein in Funktion der letzten Unbestimmten t_3 zu berechnen,

wodurch man Ausdrücke erhält, die x und y durch t_3 allein bestimmen. Wir wollen das an einigen Zahlenbeispielen durchführen.

Sei $$19x + 15y = 23 \quad (1)$$
unsere Gleichung, so folgt daraus:

$$y = \frac{23-19x}{15} = -x + \frac{23-4x}{15}.$$

Offenbar wird y nur dann ganz, wenn

$$\frac{23-4x}{15} = t \text{ oder } 4x + 15t = 23, \quad (2)$$

woraus wieder folgt

$$x = \frac{23-15t}{4} = -3t + \frac{23-3t}{4}.$$

Damit x ganzzahlig werde, ist erforderlich, dass

$$(3) \quad \frac{23-3t}{4} = t_1, \text{ wo } t_1 \text{ ganz}$$

oder $$3t + 4t_1 = 23.$$

Hieraus folgt wieder

$$t = \frac{23-4t_1}{3} = -t_1 + \frac{23-t_1}{3}$$

und damit t ganzzahlig werde, muss

$$(4) \quad \frac{23-t_1}{3} = t_2 \text{ oder } 23 - t_1 = 3t_2$$

oder endlich $$t_1 = 23 - 3t_2$$

sein, wo t_2 eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Wir haben daher folgende Relationen:

$$\begin{aligned} 1)\ & y = -x + t \\ 2)\ & x = -3t + t_1 \\ 3)\ & t = -t_1 + t_2 \\ 4)\ & t_1 = 23 - 3t_2 \end{aligned}$$

und wir bekämen die sämmtlichen ganzzahligen Auflösungen unserer Gleichung, wenn wir für t_2 successive erst alle positiven und dann noch alle negativen ganzen Zahlen einsetzen würden. Für $t_2 = 0$ fände man

$$\begin{aligned} t_1 &= 23,\ t = -23, \\ x &= -3t + t_1 = 69 + 23 = 92 \\ y &= -x + t = -92 - 23 = -115. \end{aligned}$$

Also $\begin{matrix} x = 92 \\ y = -115 \end{matrix}$ wäre eine erste Auflösung, von deren Richtigkeit wir uns sofort überzeugen können; denn es wird

$$19x + 15y = 19 \cdot 92 + 15 \cdot (-115) = 1748 - 1725 = 23.$$

Statt nun für jeden Werth, den man dem t_2 beilegt, durch Rückwärtssubstitution die zugehörigen Werthe von x und y zu bestimmen, ist es viel zweckmässiger, sogleich x und y durch t_2 allein auszudrücken. Man findet hier:

$$t = -t_1 + t_2 = -(23 - 3t_2) + t_2 = -23 + 4t_2$$
$$x = -3t + t_1 = -3(-23 + 4t_2) + (23 - 3t_2)$$

oder $x = +69 - 12t_2 + 23 - 3t_2 = 92 - 15t_2$;
endlich $y = -x + t = -(92 - 15t_2) + (-23 + 4t_2)$
oder $y = -115 + 19t_2$.

Wir finden also als allgemeine Auflösung unserer Gleichung:

$$x = 92 - 15t_2$$
$$y = -115 + 19t_2.$$

Dieses Resultat stimmt mit dem in No. 230 und 231 gefundenen vollkommen überein; denn dort hatten wir, dass wenn
$x = \alpha$
$y = \beta$ eine ganzzahlige Auflösung der Gleichung $ax + by = c$
sei, die sämmtlichen ganzzahligen Auflösungen dann gegeben werden durch eine der beiden Formelgruppen:

$$\begin{aligned} x &= \alpha + nb \\ y &= \beta - na \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} x &= \alpha - nb \\ y &= \beta + na. \end{aligned}$$

Unsere Auflösung
$$x = 92 - 15t_2$$
$$y = -115 + 19t_2$$
stimmt mit der letzten Gruppe überein.

2te Auflösung. Statt das ganz bekannte Glied 23, gerade wie bei der allgemeinen Auflösung, unverändert mitzunehmen, ist's zweckmässiger und oft noch rascher zum Ziele führend, bei den Divisionen auch das Glied c mit zu berücksichtigen. Wir nehmen daher die obige Gleichung noch einmal vor:

$$(1) \quad 19x + 15y = 23.$$

Hieraus folgt:

$$y = \frac{23 - 19x}{15} = 1 - x + \frac{8 - 4x}{15},$$

indem wir nämlich mit 15 auch in 23 dividiren.

Dieser Rest $\frac{8 - 4x}{15}$ ist $= \frac{4(2 - x)}{15}$,

so dass
$$y = 1 - x + 4 \cdot \left(\frac{2 - x}{15}\right).$$

Wir erkennen hieraus sofort, dass die Ganzzahligkeit des y an keine andere Bedingung geknüpft ist, als an die, dass $\frac{2 - x}{15}$ eine ganze Zahl werde.

Wir bekommen daher die Gleichung

$$(2)\quad \frac{2-x}{15} = t \text{ oder}$$

$$2 - x = 15t, \text{ woraus folgt}$$

$$x = 2 - 15t$$

und hier wird x ganz für **jede** ganze Zahl, die man an die Stelle von t setzen mag. Wir haben demnach gefunden:

$$1)\ y = 1 - x + 4t$$

$$2)\ x = 2 - 15t.$$

Wenn wir noch in die erste Gleichung den Werth von x einsetzen, so kommt

$$y = 1 - (2-15t) + 4t = -1 + 19t, \text{ so dass}$$

$$x = 2 - 15t$$

$$y = -1 + 19t$$

die allgemeine Auflösung unserer Gleichung ist.

Die dem $t = 0$ entsprechenden Werthe von x und y, nämlich $x = 2$ und $y = -1$, sind also hier kleinere Zahlen, als bei der ersten Auflösung. Uebrigens liefert die eine, wie die andere Form sämmtliche ganzzahlige Auflösungen. Wollte man z. B. aus

$$\begin{aligned} x &= 2 - 15t \\ y &= -1 + 19t \end{aligned} \quad \text{die spezielle Lösung} \quad \begin{aligned} x &= 92 \\ y &= -115 \end{aligned}$$

ableiten, so dürfte man nur $t = -6$ setzen. Ueberhaupt darf man nur irgend ein Paar zusammengehöriger Werthe für x und y nehmen, so findet man die allgemeine Auflösung, wenn man von dem Werthe von x irgend ein Vielfaches des Coeffizienten von y subtrahirt, zu dem Werth des y aber das nämliche Vielfache des Coeffizienten von x addirt.

Um eine Anzahl von Auflösungen zu bekommen, geben wir dem t successive die Werthe 0, 1, 2, 3 etc. und dann noch -1, -2, -3 etc.

Für t =	0	1	2	3	4	5	6	7
$x = 2-15t$	$x = 2$	-13	-28	-43	-58	-63	-78	-93
$y = -1+19t$	$y = -1$	$+18$	37	56	75	94	113	132

Für t =	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
$x = 2-15x$	17	32	47	62	77	92	107
$y = -1+19x$	-20	-39	-58	-77	-96	-115	-134

Die obige Gleichung (1) lässt also unter den unendlich vielen ganzzahligen Auflösungen nicht eine einzige **positive** d. h.

nicht eine solche Auflösung zu, in der x und y zugleich positiv sind.

Es geht hieraus hervor, dass wenn man sich auf die positiven ganzzahligen Auflösungen beschränken wollte, die Zahl derselben unter Umständen eine sehr begrenzte sein kann. Inwiefern sich das schon aus dem blossen Anblick der Gleichung erkennen lässt, zeigt der folgende Satz.

234. Lehrsatz. *Die Gleichung $ax+by=c$ lässt nur eine begrenzte Anzahl von Auflösungen in positiven ganzen Zahlen zu, wenn a und b einerlei Vorzeichen haben, dagegen unendlich viele, sobald a und b entgegengesetzte Vorzeichen besitzen.*

Verstehen wir unter a und b bloss die absoluten Werthe der Coeffizienten von x und y, so sind alle möglichen Fälle, die sich darbieten können, offenbar in folgenden Gleichungen enthalten:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad ax + by = c\\
&2) \quad ax - by = c\\
&3) \quad -ax + by = c\\
&4) \quad -ax - by = c.
\end{aligned}
$$

Wollte man c ebenfalls negativ nehmen, so kämen dadurch keine neuen Formen mehr zum Vorschein. Die Gleichung (4) lässt nun jedenfalls gar keine Auflösung in positiven ganzen Zahlen zu; denn für alle positiven Werthe, die man an die Stelle von x und y setzen mag, wird die linke Seite eine Summe zweier negativen Zahlen, kann daher nie gleich der positiven rechten Seite sein. Die Gleichung (3) ist von (2) nicht wesentlich verschieden, da in jeder derselben der eine Coeffizient positiv, der andere negativ ist. Wir können uns also auf die Betrachtung der beiden ersten Fälle beschränken. Aus (1) folgt nun

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

Damit x positiv ausfalle, dürfen an die Stelle von y nur solche positive ganze Zahlen gesetzt werden, für welche $by < c$ oder höchstens $= c$ wird. Unter diesen ist die Zahl derer, für welche x zugleich noch ganz ausfällt, noch kleiner. Die Zahl der positiven ganzzahligen Auflösungen der Gleichung (1) ist daher jedenfalls begrenzt. Betrachten wir dagegen die Gleichung (2), so folgt daraus

$$x = \frac{c + by}{a}.$$

Wenn wir nun hier für y alle positiven ganzen Zahlen von 0 bis $+\infty$ einsetzen, so wird stets x eine positive Zahl. Von der

ersten, unter a liegenden ganzen Zahl, welche x ganz macht, aus gerechnet, macht je die $a$te x nicht nur positiv, sondern auch ganz; somit ist die Zahl der Auflösungen in positiven ganzen Zahlen ebenfalls noch ∞ gross. Ganz das Gleiche gilt von der Gleichung $-ax + by = c$.

235. Aufgabe. Die ganzzahligen Auflösungen von 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten zu finden.

Seien
$$ax + bx + cz = d \quad (1)$$
$$a'x + b'y + c'z = d' \quad (2)$$
unsere Gleichungen. Sollen diese gemeinschaftliche ganzzahlige Auflösungen zulassen, so ist vor Allem aus erforderlich, dass in jeder derselben die Coeffizienten von x, y und z keinen gemeinschaftlichen Faktor enthalten, der nicht auch im ganz bekannten Glied vorkommt. Denn wenn z. B. $a = \alpha m$, $b = \beta m$, $c = \gamma m$, indess $\frac{d}{m}$ gebrochen, so würde die Gleichung (1) schon für sich allein gar keine Auflösung in ganzen Zahlen zulassen. Indem man nämlich (1) durch m dividirt, bekäme man
$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \frac{d}{m}.$$
Was für ganze Zahlen man nun auch an die Stelle von x, y und z setzen mag, stets wird die linke Seite eine ganze Zahl, die rechte Seite aber ist gebrochen, Gleichheit zwischen beiden daher unmöglich.

Diese Bedingung ist also absolut nothwendig; aber sie ist für sich allein noch keineswegs hinreichend, um gemeinschaftliche ganzzahlige Auflösungen zuzulassen. Es müssen vielmehr auch die durch Elimination einer Unbekannten erhaltenen Gleichungen noch dieselbe Eigenschaft besitzen; sonst ist die Auflösung der Gleichungen (1) und (2) in ganzen Zahlen unmöglich.

So erfüllen z. B. die Gleichungen
$$5x + 4y - 3z = 11$$
$$4x + 7y + 9z = 26$$
jene erste Bedingung und lassen dennoch keine ganzzahlige Auflösung zu. Denn wenn wir die erste mit 3 multipliziren und das Resultat zur zweiten addiren, so erhalten wir
$$19x + 19y = 59,$$
welche Gleichung gar keine ganzzahlige Auflösung zulässt, weil die Coeffizienten von x und y den gemeinschaftlichen Faktor 19 haben, der in 59 nicht vorkommt.

Ebenso unmöglich wären die durch Elimination von x oder y erhaltenen Combinationsgleichungen; die eine nämlich ist

$$19y + 57z = 86 \text{ oder } y + 3z = \tfrac{86}{19},$$

die andere: $19x - 57z = -27$ oder $x - 3z = -\tfrac{27}{19}$, welche beide in ganzen Zahlen unlösbar sind.

Wir wollen nun das für die Auflösung unserer Aufgabe anzuwendende Verfahren an speziellen Beispielen entwickeln.

Seien gegeben 1) $5x + 7y - 4z = 13$
2) $4x + 3y + 5z = 29$,

so ergibt sich durch Elimination von z sofort

$$(3) \quad 41x + 47y = 181.$$

Hieraus folgt zunächst

$$x = \frac{181 - 47y}{41} = 4 - y + \frac{17 - 6y}{41}$$

oder $x = 4 - y + t$, wenn $t = \dfrac{17 - 6y}{41}$

oder $41t = 17 - 6y$.

Hieraus folgt weiter:

$$y = \frac{17 - 41t}{6} = 2 - 6t + \frac{5 - 5t}{6}$$

oder $y = 2 - 6t + 5t'$, wenn

$$t' = \frac{1 - t}{6} \text{ oder } 6t' = 1 - t$$

oder endlich $t = 1 - 6t'$.

Wir haben demnach: $x = 4 - y + t$
$y = 2 - 6t + 5t'$
$t = 1 - 6t'$

und wenn wir den Werth von t in die Ausdrücke für y und für x substituiren und gleichzeitig im letztern y durch seinen Werth ersetzen, so kommt $x = 9 - 47t'$
$y = -4 + 41t'$

als allgemeine Auflösung der Gleichung (3). Diese Lösung hat die in No. 230 gefundene Form; sie ist also richtig, sobald nur $x = 9$, $y = -4$ die Gleichung (3) verifiziren. Das ist aber der Fall; denn es wird dann $41x + 47y = 41.9 - 47.4 = 369 - 188 = 181$, also gleich der rechten Seite.

Nun führen wir diese für x und y gefundenen Werthe in eine der beiden Gleichungen 1 und 2, z. B. in die 2te ein, so bekommen wir eine Gleichung, welche nur noch z und t enthält und aus welcher daher z gefunden werden kann. Wir erhalten nämlich:

$$4(9-47t')+3(-4+41t')+5z = 29$$

oder
$$36-188t'-12+123t'+5z = 29$$
$$24-65t'+5z=29$$
$$-65t'+5z= 5 \text{ oder}$$
$$-13t'+z = 1 \quad (4)$$

woraus folgt:
$$z = 1+13t'.$$

Die sämmtlichen ganzzahligen Auflösungen unserer Gleichungen sind demnach enthalten in

$$x = 9-47t'$$
$$y = -4+41t'$$
$$z = 1+13t',$$

wo wir für t' der Reihe nach alle positiven, hernach alle negativen ganzen Zahlen zu setzen haben.

Dem $t' = 0$ entspricht die Lösung $x = 9$
$y = -4$
$z = 1$

Dem $t' = 1$ „ „ „ $x = -38$
$y = 37$
$z = 14$

und wenn wir fortfahren, dem t' positive ganzzahlige Werthe zu geben, so fallen die Werthe von x sämmtlich negativ, die von y und z dagegen positiv aus. Geben wir dem t' die Werthe -1, -2, -3 etc., so werden die Werthe von x positiv, die von y und z dagegen negativ. Unsere Gleichungen haben also gar keine Auflösungen in positiven ganzen Zahlen.

Anmerkung. In diesem Beispiel nahm die durch Substitution der Auflösungen der Gleichung (3) in eine der ursprünglichen Gleichungen erhaltene Gleichung (4) die einfache Form an, dass die Unbekannte z gleich den Coeffizienten 1 hatte und daher unmittelbar durch dieselbe Unbestimmte t' ganzzahlig ausgedrückt werden konnte, wie x und y es bereits waren. Das wird im Allgemeinen nicht eintreffen; man hat alsdann die Gleichung (4) d. h. die Gleichung mit z und t' gerade wie die Gleichung (3) zu behandeln und muss dann schliesslich nur noch x und y in Funktion derselben Unbestimmten ausdrücken, durch welche z selber dargestellt ist.

Wir nehmen als zweites Beispiel folgende Aufgabe:

Eine Zahl zu finden, welche durch 11, 17 und 23 getheilt, successive die Reste 4, 9 und 10 lässt.

Bezeichnen wir mit N die zu suchende Zahl, so wird von ihr verlangt:

1. dass $\frac{N}{11} = x + \frac{4}{11}$

2. $\frac{N}{17} = y + \frac{9}{17}$

3. $\frac{N}{23} = z + \frac{10}{23}$,

wo x, y und z ganze Zahlen bezeichnen, oder dass

1. $N = 11x + 4$
2. $N = 17y + 9$
3. $N = 23z + 10$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen:

$$11x + 4 = 17y + 9$$

und

$$11x + 4 = 23z + 10$$

welch letzte auch durch: $17y + 9 = 23z + 10$ ersetzt werden könnte. Bringen wir sie auf die gewöhnliche Form, so kommt:

1. $11x - 17y = 5$
2. $11x - 23z = 6$.

Wir haben also zwei Gleichungen mit den 3 Unbekannten x, y und z, nur dass die Sache hier in sofern einfacher als im vorige Fall ist, weil jede der beiden Gleichungen nur zwei Unbekannte enthält, man also nicht erst eine der drei Unbekannten zu eliminiren braucht. Aus (1) folgt:

$$x = \frac{5 + 17y}{11} = y + \frac{5 + 6y}{11} = y + t,$$

wenn

$$t = \frac{5 + 6y}{11} \text{ oder } 11t = 5 + 6y \quad (3).$$

Aus (3) folgt $y = \frac{11t - 5}{6} = t + \frac{5t - 5}{6} = t + 5\left(\frac{t-1}{6}\right)$

oder

$$y = t + 5t_1, \text{ wenn}$$

$$t_1 = \frac{t-1}{6} \text{ oder } 6t_1 = t - 1 \quad (4)$$

woraus sich ergibt: $t = 1 + 6t_1$.

Wir haben also:

$$x = y + t$$
$$y = t + 5t_1$$
$$t = 1 + 6t_1$$

und wenn wir rückwärts substituiren, so kommt

$$x = 2 + 17t_1$$
$$y = 1 + 11t_1,$$

welche Lösung — wie man sich überzeugt — wirklich die Gleichung (1) verifizirt.

Nun setzen wir diesen Werth von x in die Gleichung (2), so kommt

$$11(2+17t)-23z=6$$

oder

$$22+187t-23z=6$$

$$187t-23z=-16 \quad (4).$$

Durch Auflösung dieser Gleichung findet man

$$z=\frac{16+187t_1}{23}=8t_1+\frac{16+3t_1}{23}=8t_1+t_2,$$

wenn $\frac{16+3t_1}{23}=t_2$ oder $16+3t_1=23t_2 \quad (\alpha)$

Hieraus folgt: $t_1=\frac{23t_2-16}{3}=7t_2-5+\frac{2t_2-1}{3}$

oder $t_1=-5+7t_2+t_3$, wobei

$$t_3=\frac{2t_2-1}{3} \text{ oder } 3t_3=2t_2-1 \quad (\beta)$$

woraus $t_2=\frac{1+3t_3}{2}=t_3+\frac{1+t_3}{2}$

oder $t_2=t_3+t_4$, wo

$$t_4=\frac{1+t_3}{2} \text{ oder } t_3=-1+2t_4 \quad (\gamma)$$

Wir haben also

$$z=8t_1+t_2$$
$$t_1=-5+7t_2+t_3$$
$$t_2=t_3+t_4$$
$$t_3=-1+2t_4$$

Durch Rückwärtssubstitution bekommen wir der Reihe nach:

$$t_2=-1+3t_4$$
$$t_1=-13+23t_4$$
$$z=-105+187t_4.$$

Es wäre somit

$$t_1=-13+23t_4$$
$$z=-105+187t_4$$

die allgemeine Auflösung der Gleichung (4), wie man sich wieder leicht überzeugt.

Wir haben jetzt nur noch y und x in Funktion von t_4 auszudrücken, indem wir in den oben für x und y gefundenen Werthen t_1 noch durch $-13+23t_4$ ersetzen, wodurch

$$x=2+17t_1=2+17(-13+23t_4)=-219+391t_4$$
$$y=1+11t_1=1+11(-13+23t_4)=-142+253t_4$$

und da wir t_4 nicht mehr von t_3, t_2 und t_1 zu unterscheiden

nöthig haben, so bezeichnen wir diese Unbestimmte einfach durch t und haben dann

$$x = -219 + 391t$$
$$y = -142 + 253t$$
$$z = -105 + 187t.$$

Nun hat unsere Zahl N die 3 Formen: $11x+4$, $17y+9$ und $23z+10$ und wenn daher die Lösung richtig, so müssen nach Substitution der für x, y und z gefundenen Werthe alle diese 3 Formen übereinstimmen. Man findet nun:

1) $N = 11x + 4 = 11(-219+391t) + 4 = -2405 + 4301t$
2) $N = 17y + 9 = 17(-142+253t) + 9 = -2405 + 4301t$
3) $N = 23z + 10 = 23(-105+187t) + 10 = -2405 + 4301t.$

Unsere Zahl oder vielmehr alle Zahlen mit den verlangten Eigenschaften sind demnach enthalten in der Form: $-2405 + 4301t$, wo 4301 durch 11, 17 und 23 theilbar ist, der erste Theil aber die verlangten Reste liefert.

Wir bekommen demnach die ganze Reihe der gesuchten Zahlen, wenn wir in dem für N gefundenen Ausdruck $-2405 + 4301t$ successive $t=0$, 1, 2, 3 etc. und dann noch -1, -2, -3 etc. setzen.

$t=0$ gibt $N = -2405$
$t=1$ gibt $N = -2405 + 4301 = 1896$
$t=2$ gibt $N = -2405 + 8602 = 6197$
$t=3$ gibt $N = -2405 + 12903 = 10498$ etc.,

wo 1896 die kleinste positive Zahl ist, welche den gestellten Bedingungen Genüge leistet.

236. Aufgabe. Die ganzzahligen Auflösungen von m Gleichungen mit $m+1$ Unbekannten zu finden.

Den Fall von zwei Gleichungen mit 3 Unbekannten haben wir eben behandelt. Nehmen wir zunächst 3 Gleichungen mit den 4 Unbekannten x, y, z und u, so schlagen wir folgenden Gang ein:

Wir eliminiren eine der Unbekannten, z. B. u, zwischen der ersten und jeder der beiden andern Gleichungen und kommen so zu 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten; zwischen diesen 2 Gleichungen eliminiren wir eine zweite Unbekannte z und erhalten so eine Gleichung mit den 2 Unbekannten x und y.

Nun benutzen wir statt des Systems der 3 ursprünglichen Gleichungen:

1) eine Gleichung des ersten Systems, die wir durch $f_1(x, y, z, u) = 0$ bezeichnen wollen;

2) eine Gleichung des 2ten Systems, die wir durch $f_2(x, y, z) = 0$ bezeichnen wollen;

3) die letzte Gleichung zwischen x und y, die wir durch $f_3(x, y) = 0$ bezeichnen wollen.

Durch Auflösung dieser letzten bekommen wir x und y ausgedrückt in Funktion einer Unbestimmten t.

Indem wir deren Werthe einführen in die Gleichung

$$f_2(x, y, z) = 0$$

bekommen wir eine Gleichung zwischen t und z allein, aus welcher diese zwei Unbekannten in Funktion einer neuen Unbestimmten t_1 berechnet werden können; den Werth von t führen wir auch in die frühern Werthe von x und y ein und haben dann die 3 Unbekannten x, y und z sämmtlich durch die Unbestimmte t_1 ausgedrückt.

Wenn wir endlich die Werthe von x, y und z in die Gleichung $f(x, y, z, u) = 0$ bringen, so erhalten wir sofort eine Gleichung zwischen u und t_1, aus welcher u und t_1 durch eine neue Unbestimmte t_2 ausgedrückt werden können; schliesslich hat man nur noch die 3 übrigen Unbekannten x, y und z ebenfalls durch die letzte Unbestimmte t_2 auszudrücken.

Ganz den gleichen Gang schlagen wir ein, wenn wir vier Gleichungen mit 5, 5 Gleichungen mit 6, allgemein m Gleichungen mit $m + 1$ Unbekannten aufzulösen haben.

Bezeichnen wir die $m+1$ Unbekannten mit $x_1, x_2, x_3 \ldots . x_m$ und x_{m+1}, so können wir wieder zuerst x_{m+1} zwischen der ersten der m Gleichungen und jeder der $(m-1)$ übrigen eliminiren, wodurch wir $m-1$ Gleichungen mit den m Unbekannten x_1, x_2, x_3 bis x_m erhalten. Zwischen der ersten dieser $m-1$ Gleichungen und jeder der $m-2$ übrigen eliminiren wir eine zweite Unbekannte x_m, so bekommen wir ein neues System von $(m-2)$ Gleichungen mit $m-1$ Unbekannten. Indem wir zwischen der ersten von diesen und jeder der $m-3$ übrigen Gleichungen eine 3te Unbekannte x_{m-1} eliminiren, kommen wir auf $m-3$ Gleichungen mit $m-2$ Unbekannten. Auf gleiche Weise fortfahrend gelangen wir zu 2 Gleichungen mit 3 und hierauf endlich zu e i n e r Gleichung mit 2 Unbekannten x_1 und x_2.

Statt der ursprünglichen m Gleichungen mit $m+1$ Unbekannten benutzen wir nun von jedem der m Systeme je eine Gleichung und verwenden auf diese Weise m Gleichungen, deren erste alle $m+1$ Unbekannten, die 2te m, die 3te $m-1$, die 4te $m-2$ etc.,

die $(m-1)$te 3, die letzte oder $m$te nur noch 2 Unbekannte x_1 und x_2 enthält. Aus dieser letzten finden wir sofort x_1 und x_2 ausgedrückt in Funktion einer Unbestimmten t; indem wir diese Werthe in die vorletzte Gleichung einführen, bekommen wir eine Gleichung zwischen x_3 und t, durch deren Auflösung x_3 und t in Funktion einer neuen Unbestimmten t_1 ausgedrückt werden und indem wir den Werth von t auch in die Werthe von x_1 und x_2 einführen, bekommen wir x_1, x_2 und x_3 in Funktion von t_1 ausgedrückt. Diese Werthe von x_1, x_2 und x_3 setzen wir in die vorangehende Gleichung, so bekommen wir eine Gleichung zwischen x_4 und t_1, durch deren Auflösung x_4 und t_1 in Funktion einer neuen Unbestimmten t_2 ausdrückbar sind. Ebenso drücken wir dann auch x_1, x_2 und x_3 durch t_2 aus. Diese 4 Werthe von x_1, x_2, x_3 und x_4 bringen wir in die vorangehende Gleichung, bekommen dadurch eine Gleichung zwischen x_5 und t_2, deren Werthe wir durch Auflösung dieser Gleichung in Funktion einer neuen Unbestimmten t_3 ausdrücken. Ebenso berechnen wir durch Substitution des Werthes von t_2 in x_1, x_2, x_3 und x_4 auch diese in Funktion von t_3 und fahren so fort, bis sämmtliche Unbekannte durch die nämliche Unbestimmte ausgedrückt sind, an deren Stelle man dann nur successive alle positiven und negativen ganzen Zahlen einzusetzen brauchte, um sämmtliche ganzzahlige Auflösungen unserer m Gleichungen mit $m+1$ Unbekannten zu erhalten.

Wir wollen als Beispiel noch 3 Gleichungen mit 4 Unbekannten lösen.

Aufgabe: Welche Zahlen lassen, durch 5, 6, 7 und 8 getheilt, der Reihe nach die Reste 3, 1, 0 und 5?

Bezeichnet man mit N die zu suchende Zahl, so muss sie

1., durch 5 getheilt einen gewissen ganzen Quotienten x und einen Rest 3,
2., durch 6 getheilt einen ganzzahligen Quotienten y und einen Rest 1,
3., durch 7 getheilt einen Quotienten z und den Rest 0,
4., durch 8 getheilt einen Quotienten u und den Rest 5 geben.

Man hat daher,

$$\begin{aligned} 1.\quad & N = 5x + 3 \\ 2.\quad & N = 6y + 1 \\ 3.\quad & N = 7z \\ 4.\quad & N = 8u + 5 \end{aligned}$$

und bekommt daher folgende 3 Gleichungen:

$$1.\quad 5x+3=6y+1$$
$$2.\quad 5x+3=7z$$
$$3.\quad 5x+3=8u+5$$

wo statt der zweiten auch: $6y+1=7z$, statt der 3ten: $6y+1=8u+5$ oder $7z=8u+5$ gesetzt werden könnte.

Wir haben hier wieder den einfachern Fall, dass nicht alle 4 Unbekannten in jeder Gleichung vorkommen; wir haben daher gar keine Eliminationen nöthig, um zu einer Gleichung mit zwei Unbekannten zu gelangen. Nehmen wir gerade die erste

$$(1)\quad 5x+3=6y+1$$

so folgt daraus: $x=\frac{6y-2}{5}=y+\frac{y-2}{5}=y+t,$

$$t=\frac{y-2}{5} \text{ oder } y-2=5t$$
$$\text{oder } y=2+5t.$$

Durch Auflösung von (1) haben wir also gefunden

$$y=2+5t$$
$$x=2+6t.$$

Nun setzen wir entweder $x=2+6t$ in die Gleichung (2) oder dann $y=2+5t$ in die die Gleichung (2) ersetzende Gleichung $6y+1=7z$. Durch die erste Substitution ergibt sich:

$$5(2+6t)+3=7z$$
$$10+30t+3=7z$$
$$30t+13=7z \text{ oder}$$
$$7z-30t=13 \quad (4)$$

zu welcher Gleichung wir auch gelangt wären, wenn wir die Gleichung $6y+1=7z$ für y den Werth $2+5t$ gesetzt hätten.

Aus dieser Gleichung (4) ergibt sich

$$z=\frac{13+30t}{7}=1+4t+\frac{6+2t}{7}=1+4t+2\left(\frac{3+t}{7}\right)$$

oder $z=1+4t+2t_1$, wenn

$\frac{3+t}{7}=t_1$ oder $3+t=7t_1$ gesetzt wird.

Hieraus aber folgt $t=-3+7t_1$, und wenn wenn wir diesen einführen in den Werth von z, so kommt

$$z=1+4(-3+7t_1)+2t_1=1-12+28t_1+2t_1$$

oder $z=-11+30t_1$. Somit ist

$z=-11+30t_1$
und $t=-\ 3+\ 7t_1$ die Auflösung der Gleichung (4).

Aus Auflösung der Gleichung (1) fanden wir aber $y=2+5t$

und $x=2+6t$ und wenn wir hier auch noch t durch t_1 ersetzen, so ergibt sich:

$$x=-16+42t_1$$

$$y=-13+35t_1$$ und wir haben jetzt x, y und z durch die eine Unbestimmte t_1 ausgedrückt. Setzen wir nun diese Werthe in die 3te Gleichung $5x+3=8u+5$ oder in eine der sie ersetzenden Gleichungen $6y+1=8u+5$ oder $7z=8u+5$, so bekommen wir als linke Seite einer jeden $-77+210t_1$, so dass wir also aus der 3ten Gleichung die folgende bekommen:

$$-77+210t_1=8u+5 \text{ oder}$$

$$210t_1-8u=82 \quad (5)$$

woraus folgt: $u=\frac{-82+210t_1}{8}=-10+26t_1+\frac{-2+2t_1}{8}$

oder $$u=-10+26t_1+\left(\frac{-1+t_1}{4}\right).$$ Offenbar wird u ganz,

sobald $\frac{-1+t_1}{4}=$ einer ganzen Zahl t_2 gesetzt wird. Wir bekommen daher die Bedingungsgleichung

$$\frac{-1-t_1}{4}=t_2 \text{ oder}$$

$$-1+t_1=4t_2, \text{ woraus dann}$$

$$t_1=1+4t_2$$ sich ergibt. Dieses eingeführt in den Werth von u gibt:

$$u=-10+26t_1+t_2=-10+26(1+4t_2)+t_2$$

oder $$u=16+105t_2.$$

Wir haben also als Auflösung der Gleichung (5), die wir auch durch Entfernung des gemeinschaftlichen Faktors 2 in der einfachern Form

$$105t_2-4u=41 \quad (5)$$

schreiben können, gefunden:

$$t_1=1+4t_2$$

$$u=16+105t_2$$

deren Richtigkeit man sofort erkennt. Führen wir den Werth $t_1=1+4t_2$ auch in die oben gefundenen Werthe von x, y und z ein, so erhalten wir als Auflösung unserer 3 Gleichungen mit 4 Unbekannten:

$$x=26+168t_2$$

$$y=22+140t_2$$

$$z=19+120t_2$$

$$u=16+105t_2.$$

Nun hatten wir für N die 4 Formen: $5x+3$, $6y+1$, $7z$ und

$8u+5$, von welchen jede die gesuchte Zahl liefern muss, sobald wir die darin vorkommende Unbekannte durch ihren hier gefundenen Werth ersetzen. Wir finden so

1. $N=5x+3=5(26+168t_2)+3=133+840t_2$
2. $N=6y+1=6(22+140t_2)+1=133+840t_2$
3. $N=7z\quad=7(19+120t_2)\quad=133+840t_2$
4. $N=8u+5=8(16+105t_2)+5=133+840t_2$

Die gesuchten Zahlen sind daher alle in Form $133+840t_2$ enthalten, aus der sie hervorgehen, wenn man für t_2 ganz beliebige positive oder negative ganze Zahlen setzt.

für $t_2 =$	0	1	2	3	4 bekäme
man $N =$	133	973	1813	2653	4333

u. s. f., welche, wie man sich leicht überzeugt, alle die verlangten Eigenschaften besitzen.

237. Aufgabe. Eine Gleichung mit **mehr** als zwei Unbekannten in ganzen Zahlen aufzulösen.

Wir wollen hier nur noch den Fall einer Gleichung mit 3 Unbekannten betrachten.

Sei $ax+by+cz=d$ unsere Gleichung, so ist vor Allem aus erforderlich, dass die Coeffizienten a, b und c keinen gemeinschaftlichen Faktor enthalten, der nicht in d vorkommt; sonst würde aus früher angegebenen Gründen die Auflösung der Gleichung in ganzen Zahlen unmöglich.

Haben sie aber einen Faktor, der auch in d vorkommt, so entfernen wir diesen erst durch Division; dann sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1. Unter den 3 Coeffizienten a, b und c sind wenigstens zwei, welche prim unter sich sind (entweder a und b oder a und c oder b und c), wie z. B. in $12x+11y+15z = 141$, wo 12 und 11 unter sich prim sind, — oder

2. Es haben je 2 der 3 Coeffizienten einen gemeinschaftlichen Faktor, so dass also keine zwei derselben unter sich prim sind, wie z. B. $12x+15y+20z = 181$,
wo 12 und 15 den Faktor 3,
12 und 20 den Faktor 4,
15 und 20 „ „ 5 gemein haben.

1. Fall. Seien 2 der 3 Coeffizienten, etwa a und b, prim unter sich, so können wir die Gleichung zunächst so schreiben:

$$ax+by = d-cz \text{ oder } d-cz = f \text{ gesetzt:}$$

$$ax+by = f \quad \text{(I).}$$

Nach Satz 229 muss diese Gleichung ganzzahlige Auflösungen zulassen und wenn wir dieselbe nach einer der angegebenen Methoden lösen, so bekommen wir x und y ganzzahlig in Funktion einer Unbestimmten t und der Grösse $f=d-cz$ ausgedrückt, so dass wir dann auch dem z ganz beliebige ganzzahlige Werthe beilegen können.

B e i s p i e l. Sei $12x+11y+15z=141$ (1) unsere Gleichung, so folgt daraus

$$12x+11y=141-15z \text{ oder}$$
$$12x+11y=f \quad (1\alpha)$$

wenn $f=141-15z$. Aus (1α) folgt:

$$y=\frac{f-12x}{11}=-x+\frac{f-x}{11}$$

wo y ganzzahlig wird, wenn $\frac{f-x}{11}$ ganz ist. Daher setzen wir

$$\frac{f-x}{11}=t \text{ oder } f-x=11t,$$

woraus folgt $x=f-11t$; daher dann $y=-x+t=-f+11t+t=-f+12t$. Wir haben somit als Auflösung unserer Gleichung ($1,\alpha$):

$x=f-11t$

$y=-f+12t$ oder für f den Werth $141-15z$ eingeführt, bekommen wir als ganzzahlige Auflösung der Gleichung (1):

$$\left.\begin{aligned} x&=141-15z-11t\\ y&=-141+15z+12t\end{aligned}\right\}(\beta)$$

wo nun für t und z beliebige ganze Zahlen gesetzt werden können. Dass die Gleichung (1) wirklich durch die unter β aufgeführten Werthe verifizirt wird, ist leicht zu prüfen. Setzen wir sie ein, so bekommen wir:

$$\begin{aligned}12x+11y+15z&=12(141-15z-11t)+11(-141+15z+12t)+15z\\ &=12.141-12.15z-12.11t-11.141+11.15z+11.12t+15z\\ &=\underbrace{12.141-11.141}_{141}\underbrace{-12.15z+11.15z}_{-15z}\underbrace{-12.11t+11.12t}_{0}+15z\\ &=141-15z+15z=141\end{aligned}$$

und das ist gerade die rechte Seite unserer Gleichung.

2. F a l l: Wir wollen nun annehmen, es seien von den 3 Coeffizienten a, b und c auch nicht zwei unter sich prim, so werden z. B. a und b einen gemeinschaftlichen Faktor h enthalten. Wenn dann $a=a'h$, $b=b'h$, so verwandelt sich unsere Gleichung in

$$a'hx+b'hy=d-cz \text{ oder}$$

$$a'x+b'y=\frac{d-cz}{h} \quad (2)$$

Offenbar können x und y nur dann ganzzahlig ausfallen, wenn $\frac{d-cz}{h}$ eine ganze Zahl ist. Wir haben daher die Bedingungsgleichung:

$$\frac{d-cz}{h} = t \text{ oder}$$

$$cz + ht = d$$

so dass wir die 2 Gleichungen bekommen:

$$a'x + b'y = t \ (2)$$

$$cz + ht = d \ (3)$$

Man kann nun die Gleichung (2) auflösen und findet dann x und y ausgedrückt in Funktion von t und einer unbestimmten Grösse n. Ebenso kann man die Gleichung (3) in ganzen Zahlen auflösen; denn da a, b und c prim unter sich sind, so muss der grösste gemeinschaftliche Divisor h zwischen a und b nothwendig prim zu c sein. In der Gleichung (3) sind daher die Coeffizienten c und h der beiden Unbekannten z und t prim unter sich; folglich lässt die Gleichung (3) ganzzahlige Auflösungen zu. Wir können daher die Werthe von z und t in Funktion einer neuen Unbestimmten t_1 ausdrücken und indem wir dann den Werth von t auch in die Ausdrücke für x und y einführen, bekommen wir x, y und z ausgedrückt in Funktion von t_1 und n.

Beispiel. Sei gegeben die Gleichung

$$12x + 15y + 20z = 181$$

so folgt daraus: $12x + 15y = 181 - 20z$

$$\text{oder } 4x + 5y = \frac{181 - 20z}{3}.$$

Damit diese Gleichung ganzzahlige Auflösungen zulasse, ist erforderlich, dass

$$\frac{181-20z}{3} = t, \text{ wo } t \text{ irgend eine ganze Zahl bedeutet,}$$

oder dass

$$3t + 20z = 181$$

Wir haben daher die 2 Gleichungen:

$$(1) \ 4x + 5y = t$$

$$(2) \ 3t + 20z = 181$$

Aus (1) finden wir: $x = \frac{t-5y}{4} = -y + \frac{t-y}{4} = -y + n$, wo $\frac{t-y}{4} = n$ oder $t - y = 4n$ oder $y = t - 4n$.

Es ist daher dann $x = -(t-4n) + n = -t+5n$ und wir haben demnach als Auflösung der Gleichung (1):

$$x = -t+5n$$
$$y = t-4n,$$

von deren Richtigkeit man sich sofort überzeugt.

Nun lösen wir die Gleichung (2) auf. Man hat

$$t = \frac{181-20z}{3} = 60-6z+\frac{1-2z}{3} = 60-6z+t_1$$

wo $t_1 = \frac{1-2z}{3}$ oder $3t_1+2z = 1$.

Hieraus folgt wieder

$$z = \frac{1-3t_1}{2} = -t_1+\frac{1-t_1}{2} = -t_1+t_2$$

wo $t_2 = \frac{1-t_1}{2}$ oder

$2t_2+t_1 = 1$. Daraus ergibt sich

$$t_1 = 1-2t_2 \text{ ; somit}$$
$$t = 60-6z+t_1$$
$$z = -t_1+t_2$$

und $t_1 = 1-2t_2$

Durch Substitution des Werthes von t_1 in den für z und t finden wir

$$z = -1+3t_2$$
$$t = 67-20t_2$$

Von der Richtigkeit dieser Lösung überzeugt man sich wieder leicht, denn es ist

$$3t+20z = 3(67-20t_2)+20(-1+3t_2)$$
$$= 201-60t_2-20+60t_2 = 201-20 = 181.$$

Führen wir schliesslich noch den Werth von t ein in die früher gefundenen Werthe von x und y, so kommt

$$x = -t+5n = -(67-20t_2)+5n = -67+20t_2+5n$$

und $y = t-4n = 67-20t_2-4n.$

Die sämmtlichen ganzzahligen Auflösungen der Gleichung

$$12x+15y+20z = 181$$

sind demnach enthalten in

$$\left.\begin{array}{l} x = -67+20t_2+5n \\ y = 67-20t_2-4n \\ z = -1+3t_2 \end{array}\right\} (\alpha)$$

wo man für n und t_2 alle ganzen Zahlen setzen darf. Für $t_2 = 0$

und $n=0$ bekäme man die Lösung: $x=-67$, $y=+67$, $z=-1$, welche die Gleichung wirklich verifizirt, und von der Richtigkeit der allgemeinen Auflösung (α) überzeugt man sich ebenfalls leicht durch Substitution dieser Werthe in die linke Seite unserer Gleichung.

Zweiter Abschnitt.

Combinationslehre.

238. Unter Complexionen oder Combinationen im weitern Sinn verstehen wir jede Verbindung zweier oder mehrerer Grössen, wobei die Art der Verbindung (ob durch Addition, Multiplikation etc. oder auch durch blosses Nebeneinanderstellen) nicht in Betracht kommt. Wenn m die Zahl der vorhandenen Elemente, so sind zunächst zwei Arten von Verbindungen denkbar:

1. solche, bei welchen in jeder einzelnen Verbindung sämmtliche m Elemente vorkommen, die sich daher nur durch die Aufeinanderfolge oder die Anordnung der Elemente unterscheiden; sie heissen Permutationen;
2. solche, bei welchen immer nur eine bestimmte Anzahl der m Elemente in jeder einzelnen Verbindung vorkommen, z. B. je zwei, je drei, etc. Diese letzten zerfallen dann in
   a. Variationen,
   b. Combinationen im engern Sinn.

Verbindet man nämlich je 2 Elemente so mit einander, dass jede einzelne Verbindung sich von allen übrigen entweder durch die in ihr vorkommenden Elemente oder dann wenigstens durch die Anordnung dieser Elemente unterscheidet, so nennt man diese Verbindungen Variationen der 2ten Klasse. Verbindet man in gleicher Weise je 3, 4, 5 . . . . bis r von den m Elementen, so erhält man Variationen der 3ten, 4ten, 5ten bis $r$ten Klasse. Man versteht demnach unter Variationen von m Elementen zur $r$ten Klasse die Verbindungen, welche man erhält, wenn man je r von diesen m Elementen auf alle möglichen Arten an einander reiht.

Combinationen von m Elementen zur 2ten Klasse sind dagegen die Verbindungen aus je zwei der m Elemente in

der Art, dass jede einzelne Verbindung von allen übrigen sich durch die in ihr vorkommenden Elemente selber unterscheidet. Ebenso versteht man allgemein unter Combinationen von m Elementen zur $r$ten Klasse die Verbindungen, welche sich ergeben, wenn man je r von diesen m Elementen so an einander reiht, dass sich jede einzelne Verbindung von allen übrigen durch die in ihr vorkommenden Elemente selber unterscheidet, so dass also auch nicht zwei solcher Verbindungen aus denselben Elementen bestehen können. Denkt man sich die Elemente durch Multiplikation verbunden, so sind die Combinationen der $r$ten Klasse nichts anderes, als die sämmtlichen verschiedenen Produkte, welche man aus je r von m Faktoren bilden kann. Da die Variationen einer Klasse sich von einander unterscheiden entweder durch die Elemente selber oder dann auch bloss durch ihre Anordnung, so kommen unter den Variationen einer Klasse auch gleiche Produkte vor, während die Permutationen irgend einer Klasse lauter gleiche, nur durch die Aufeinanderfolge ihrer Faktoren sich unterscheidende Produkte enthalten. In allen diesen Verbindungen werden die Elemente selber als die erste Klasse der Verbindungen betrachtet.

239. Aufgabe. Die Variationen von m Elementen zur 2ten, 3ten, 4ten . . . . $r$ten Klasse zu bilden und ihre Zahl zu bestimmen.

Seien $a, b, c, d, e \ldots i, k$ die m gegebenen Elemente, so verfahren wir, um die Variationen der 2ten Klasse zu bilden, in folgender Weise:

Wir verbinden das erste Element a successive mit jedem der $m-1$ übrigen Elemente und erhalten so die Verbindungen: ab, ac, ad, ae . . . . ak.

Nun nehmen wir das zweite Element b und verbinden es wieder mit jedem der $(m-1)$ übrigen Elemente, wodurch die Verbindungen ba, bc, bd . . . . bk entstehen. Indem wir in gleicher Weise jedes der m Elemente mit allen $m-1$ übrigen verbinden, erhalten wir folgende Verbindungen:

$$
\begin{array}{ll}
1. & ab,\ ac,\ ad,\ ae\ \ldots\ ak \\
2. & ba,\ bc,\ bd,\ be\ \ldots\ bk \\
3. & ca,\ cb,\ cd,\ ce\ \ldots\ ck \\
 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
m. & ka,\ kb,\ kc,\ kd,\ \ldots\ ki
\end{array}
$$

Wir haben also m Reihen und in jeder $m-1$ Verbindungen; folglich ist die Gesammtzahl aller dieser Verbindungen $= m(m-1)$. Das sind aber offenbar alle nur möglichen Verbindungen, die man mit je zwei der m Elemente machen kann. Betrachten wir nämlich irgend eine Verbindung aus zwei der m Elemente, z. B. hg, so muss diese unter den obigen Verbindungen vorkommen; denn wir haben ja der Reihe nach jedes der m Elemente, also auch das Element h, genommen und es successive mit jedem der $m-1$ übrigen Elemente, also auch mit g, verbunden, wodurch wir die Verbindung hg erhielten; es kommt folglich das Produkt hg jedenfalls unter den obigen $m(m-1)$ Produkten vor. Da man nun das Gleiche von jeder Verbindung aus irgend zwei der m Elemente zeigen kann, so ist man sicher, auf diesem Wege die sämmtlichen Variationen der m Elemente zur zweiten Klasse erhalten zu haben Bezeichnet also $\overset{2}{V}_m$ die Anzahl dieser Variationen zur 2ten Klasse, so hat man: $\overset{2}{V}_m = m(m-1)$.

Um die Variationen der dritten Klasse zu bilden, gehen wir aus von den Variationen der zweiten Klasse. Nehmen wir die erste Variation ab der 2ten Klasse und verbinden sie successive mit jedem der $m-2$ nicht in ihr vorkommenden Elemente c, d, $e \ldots k$, so erhalten wir die $m-2$ Verbindungen abc, abd, $abe \ldots . abk$ der 3ten Klasse. Nun nehmen wir die zweite Variation ac der 2ten Klasse und verbinden sie ebenfalls mit jedem der $m-2$ nicht in ihr vorkommenden Elemente, so bekommen wir aus dieser zweiten Variation der 2ten Klasse wieder $m-2$ neue Variationen der 3ten Klasse. Indem wir auf gleiche Weise jede Variation der zweiten Klasse mit jedem der $m-2$ nicht in ihr vorkommenden Elemente verbinden, liefert jede Variation 2ter Klasse $m-2$ neue Variationen der dritten Klasse; es ist folglich die Anzahl der Variationen der 3ten Klasse $(m-2)$mal so gross, als die Anzahl der Variationen der 2ten Klasse, somit $\overset{2}{V}_m = \overset{2}{V}_m . (m-2) = m(m-1)(m-2)$. Dass bei diesem Verfahren keine Variation der 3ten Klasse übergangen wurde, ist wieder sehr leicht einzusehen. Betrachten wir nämlich 3 beliebige von den m Elementen, z. B. k, f und d, so kommt ihr Produkt jedenfalls unter den obigen Verbindungen vor; denn man hat ja der Reihe nach jede Variation der 2ten Klasse, also auch kf, mit jedem nicht in ihr vorkommenden Element, also auch mit d,

verbunden, wodurch die Variation kfd entstand. Man ist daher sicher, auf diesem Wege sämmtliche Variationen der 3ten Klasse erhalten zu haben.

Um allgemein die Variationen der $r$ten Klasse zu bilden, gehen wir aus von den Variationen der $(r-1)$ten Klasse. Denken wir uns die erste Variation der $(r-1)$ten Klasse, so kommen in derselben $r-1$ Elemente vor; da wir aber im Ganzen m Elemente haben, so gibt es noch $m-(r-1)=m-r+1$ Elemente, die nicht in jener ersten Variation enthalten sind. Indem wir nun diese erste Variation der $(r-1)$ten Klasse der Reihe nach mit jedem der $m-r+1$ nicht in ihr vorkommenden Elemente verbinden, entstehen aus dieser ersten Variation der $(r-1)$ten Klasse gerade $m-r+1$ neue Variationen der $r$ten Klasse. Wenn wir nun das Gleiche mit jeder Variation der $(r-1)$ten Klasse vornehmen d. h. jede derselben mit allen $m-r+1$ nicht in ihr vorkommenden Elementen verbinden, so liefert jede Variation der $(r-1)$ten Klasse $m-r+1$ neue Variationen der $r$ten Klasse und es ist somit die Variationszahl der $r$ten Klasse gerade $(m-r+1)$ mal so gross, als die der $(r-1)$ten Klasse oder $\overset{r}{V}_m = \overset{r-1}{V}_m \cdot (m-r+1)$. Um somit aus der Anzahl der Variationen irgend einer Klasse die Variationszahl der nächstfolgenden abzuleiten, darf man jene nur multipliziren mit der Anzahl der in einer solchen Variation nicht vorkommenden Elemente. So wäre z. B. die Variationszahl der 5ten Klasse gleich der Variationszahl der 4ten Klasse, multiplizirt mit der Zahl $m-4$ der in einer solchen Variation nicht vorkommenden Elemente, also $\overset{5}{V}_m = \overset{4}{V}_m(m-4) = m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$.

Nun sind nach Nro. 238 die Elemente selber die erste Variationsklasse; man hat daher

$$\overset{1}{V}_m = m$$

$$\overset{2}{V}_m = m(m-1)$$

$$\overset{3}{V}_m = m(m-1)(m-2)$$

$$\overset{4}{V}_m = m(m-1)(m-2)(m-3)$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$(\alpha) \quad \overset{r}{V}_m = m(m-1)(m-2) \ldots (m-r+1).$$

Aus der Formel (α) erhält man die Variationszahl irgend einer Klasse, wenn man für r die Rangzahl dieser Klasse setzt. Indem man also $r=1, 2, 3, 4, 5$ etc. setzt, bekommt man successive die Variationszahl der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten Klasse u. s. f. Um die Variationszahl der vorletzten oder ($m-1$)ten Klasse zu bekommen, müsste man also $r=m-1$ setzen, wodurch der letzte Faktor $m-r+1=m-(m-1)+1=m-m+1+1=2$ würde. Man hat daher

$$\overset{m-1}{V}_m=m(m-1)(m-2)\ldots.3.2.$$

Setzt man endlich $r=m$, wodurch $m-r+1=m-m+1=1$ wird, so erhält man die Variationszahl der letzten Klasse:

$$\overset{m}{V}_m=m(m-1)(m-2)\ldots.3.2.1.$$

Es kommt also zur Variationszahl der vorletzten Klasse nur noch der Faktor 1 hinzu, der nicht multiplizirt; daher ist $\overset{m}{V}_m=\overset{m-1}{V}_m$. Das ergibt sich auch, wenn wir unmittelbar die Variationen der letzten Klasse aus denen der vorletzten Klasse ableiten. In einer Variation der ($m-1$)ten Klasse kommen nämlich $m-1$ Elemente vor; wenn wir daher jede Variation der ($m-1$)ten Klasse mit dem einen nicht in ihr enthaltenen Element verbinden, so entsteht aus jeder Variation der ($m-1$)ten Klasse eine einzige neue Variation der $m$ten Klasse; es ist folglich die Anzahl der Variationen der $m$ten Klasse gerade so gross als die der ($m-1$)ten Klasse.

240. Aufgabe: Die Permutationen von m Elementen zu bilden und ihre Zahl zu bestimmen.

Erste Auflösung. Da in den Variationen der letzten oder $m$ten Klasse sämmtliche m Elemente vorkommen, so unterscheiden sich die einzelnen Verbindungen nur noch durch die Aufeinanderfolge der Elemente d. h. die Variationen der $m$ten Klasse sind gerade die Permutationen von m Elementen (Nro. 238). Bezeichnen wir daher ihre Zahl mit P_m, so ist

$$P_m=\overset{m}{V}_m=m(m-1)(m-2\ldots.3.2.1$$
$$=1.2.3.4\ldots.m.$$

Zweite Auflösung: Hat man bloss zwei Elemente a und b, so geben diese offenbar nur die zwei Permutationen ab und ba. Sind aber 3 Elemente a, b und c, so setzen wir, um ihre sämmtlichen Permutationen zu bilden 1. nach dem ersten Element a die zwei Permutationen bc und cb der beiden andern, — 2. nach

dem 2ten Element *b* die zwei Permutationen *ac* und *ca* von *a* und *c*, — 3. endlich nach dem 3ten Element *c* die zwei Permutationen *ab* und *ba* der beiden andern Elemente. Wir bekommen so:

abc *bac* *cab*
acb *bca* *cba*.

Es ist daher die Anzahl der Permutationen der 3ten Klasse gerade 3 mal so gross, als die der 2ten Klasse, also $= 1 . 2 . 3$.

Haben wir 4 Elemente *a*, *b*, *c* und *d*, so setzen wir wieder nach jedem dieser 4 Elemente der Reihe nach die sämmtlichen Permutationen der 3 übrigen Elemente und bekommen so:

abcd	*bacd*	*cabd*	*dabc*
abdc	*badc*	*cadb*	*dacb*
acbd	*bcad*	*cbad*	*dbac*
acdb	*bcda*	*cbda*	*dbca*
adbc	*bdac*	*cdab*	*dcab*
adcb	*bdca*	*cdba*	*dcba*.

Wir haben hier vier Gruppen und in jeder Gruppe so viele Verbindungen, als oft 3 Elemente sich permutiren lassen; es ist somit die Permutationszahl von 4 Elementen gerade 4 mal so gross als die von 3 Elementen, also $P_4 = P_3 . 4 = 1 . 2 . 3 . 4$.

Um allgemein die Permutationen der *m*ten Klasse zu bilden und ihre Zahl zu finden, schreiben wir nach jedem der *m* Elemente die sämmtlichen Permutationen der $m—1$ übrigen Elemente; wir bekommen so wieder *m* Gruppen, in jeder so viele Verbindungen, als oft $m—1$ Elemente sich permutiren lassen, woraus folgt, dass die Anzahl der Permutationen von *m* Elementen gerade *m* mal so gross ist, als die von $m—1$ Elementen oder $P_m = P_{m-1} . m$, wenn P_m die Permutationszahl der $(m—1)$ten Klasse bedeutet.

Für $m = 1$ ist offenbar $P_m = P_1 = 1$. Setzen wir nun in der Gleichung $P_m = P_{m-1} . m$ für *m* successive $2, 3, 4, 5 \ldots . r$, so kommt

$$P_2 = 1 . 2$$
$$P_3 = 1 . 2 . 3$$
$$P_4 = 1 . 2 . 3 . 4$$
$$P_5 = 1 . 2 . 3 . 4 . 5$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$P_r = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots . r.$$

241. Aufgabe. Die Anzahl der Combinationen der r-ten Klasse bei m Elementen zu bestimmen.

Um zunächst die Combinationszahl der 2ten Klasse zu bestimmen, denken wir uns die Variationen 2ter Klasse bei m Elementen gebildet, so hat es unter diesen je zwei und zwei, welche aus denselben Elementen bestehen und sich also nur durch die Reihenfolge der Elemente unterscheiden. Solche aus den nämlichen Elementen bestehende Variationen, wie *ab* und *ba*, *ac* und *ca* etc. bilden zwar zwei verschiedene Variationen, aber nur eine Combination; es ist somit die Anzahl der Combinationen zweiter Klasse nur halb so gross, als die der Variationen zweiter Klasse und man hat daher: $\overset{2}{C}_m = \frac{\overset{2}{V}_m}{P_2} = \frac{m(m-1)}{1 . 2}$.

Um die Combinationen der 3ten Klasse zu finden, denken wir uns wieder die Variationen 3ter Klasse gebildet, deren Zahl $= m(m-1)(m-2)$. Betrachten wir irgend eine derselben, etwa *abc*, so kommt diese in so vielen verschiedenen Formen vor, als oft die 3 Elemente *a*, *b* und *c* sich permutiren lassen, nämlich in den 6 verschiedenen Formen: *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab* uud *cba*. Allein alle diese aus den gleichen Elementen bestehenden Variationen bilden nur eine Combination, und es ist daher die Anzahl der Combinationen 3ter Klasse so viel mal kleiner, als die der Variationen, als oft 3 Elemente sich permutiren lassen d. h. sie ist = der Variationszahl der 3ten Klasse, dividirt durch die Permutationszahl derselben Klasse oder

$$\overset{3}{C}_m = \frac{\overset{3}{V}_m}{P_3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3}.$$

Um allgemein die Anzahl der Combinationen der $r$ten Klasse bei m Elementen zu finden, betrachten wir die Variationen der $r$ten Klasse. Jede Variation der $r$ten Klasse kommt dabei in so vielen verschiedenen Formen vor, als oft r Elemente mit einander permutirt werden können. Da aber alle diese aus den nämlichen Elementen bestehenden und nur durch die Anordnung der Elemente sich unterscheidenden Variationen nur eine einzige Combination bilden, so wird die Anzahl der Combinationen $r$ter Klasse gleich sein der Anzahl der Variationen der $r$ten Klasse, dividirt durch die Anzahl der Permutationen der nämlichen Klasse

oder $$\overset{r}{C}_m = \frac{\overset{r}{V}_m}{P_r} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1 . 2 . 3 \ldots r}.$$

Diese Formel gibt uns die Combinationszahlen aller Klassen, wenn wir nur r successive durch 1, 2, 3, 4 ... $m—1$ und m ersetzen. Wir bekommen nämlich

$$1. \text{ für } r = 1 : \overset{1}{C}_m = \frac{m}{1} = m$$

$$2. \text{ „ } r = 2 : \overset{2}{C}_m = \frac{m(m-1)}{1 \, . \, 2}$$

$$3. \text{ „ } r = 3 : \overset{3}{C}_m = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3}$$

$$4. \text{ „ } r = 4 : \overset{4}{C}_m = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4}$$

$$\vdots$$

$$m-1., \; r = m-1 : \overset{m-1}{C}_m = \frac{m(m-1)(m-2) \ldots 3 \, . \, 2}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots (m-1)} = m$$

$$m., \; r = m : \overset{m}{C}_m = \frac{m(m-1)(m-2) \ldots 3 \, . \, 2 \, . \, 1}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots m} = 1.$$

Anmerkung. Da die Combinationszahl $\overset{r}{C}_m$ nur eine ganze Zahl sein kann, so muss $\frac{m(m-1)(m-2 \ldots (m-r+1)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4 \ldots r}$ eine ganze Zahl und somit $m(m-1)(m-2) \ldots (m-r+1)$ theilbar sein durch $1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots r$ d. h. das Produkt von r auf einander folgenden ganzen Zahlen ist immer theilbar durch das Produkt der r ersten ganzen Zahlen. So muss z. B. 50.51.52.53.54 theilbar sein durch 1.2.3.4.5.

Dritter Abschnitt.

Binomischer und polynomischer Satz mit einigen Anwendungen.

---

242. Wir wollen in diesem Abschnitte die $m$te Potenz eines Binoms $x+a$ zu entwickeln suchen für den Fall, dass m eine positive ganze Zahl bedeutet. Es ist alsdann $(x+a)^m$ ein Produkt aus m Faktoren, jeder $= x+a$ und wir bekommen daher $(x+a)^m$ für spezielle Werthe von m durch successive Multiplikationen.

Wir finden so:

$(x+a)^1 = x+a$

$(x+a)^2 = x^2+2xa+a^2$

$(x+a)^3 = x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$

$(x+a)^4 = x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4$

u. s. f. Man erkennt hier sofort das Gesetz der Exponenten von x und a. Das erste Glied der Entwicklung enthält immer x auf derjenigen Potenz, zu welcher das Binom erhoben werden soll; dann nimmt der Exponent von x von Glied zu Glied um eine Einheit ab, bis er im letzten Gliede $= 0$ ist; umgekehrt nimmt der Exponent von a, der im ersten Gliede $= 0$, von Glied zu Glied um eine Einheit zu, bis er im letzten Gliede = dem Exponenten m des Binoms ist. Nicht so leicht lässt sich das Bildungsgesetz der durch Zusammenziehung gleichartiger Glieder entstandenen Coeffizienten herausfinden, weil man diesen Zahlencoeffizienten nicht ansieht, wie sie entstanden. Um auch das Bildungsgesetz der Coeffizienten zu entdecken, bilden wir zunächst ein Produkt aus m binomischen Faktoren, deren erste Glieder $= x$, indess die zweiten Glieder verschieden sind: dann geht aus diesem Produkt die Potenz $(x+a)^m$ hervor, wenn wir alle zweiten Glieder der binomischen Faktoren $= a$ werden lassen.

243. Lehrsatz: ***Ein Produkt aus m binomischen Faktoren, deren erste Glieder gleich x, deren zweite Glieder aber verschieden sind, ist gleich einem aus $m+1$ Gliedern bestehenden, nach fallenden Potenzen von x geordneten Polynom, dessen erstes Glied den Coeffizienten 1 hat, indess der Coeffizient eines jeden folgenden Gliedes gleich ist der Summe der Combinationen der m zweiten Glieder zur so vielten Klasse, als diesem Gliede noch Glieder vorausgehen.***

Es wäre demnach

$(x+a)(a+b)(x+c)(x+d)\ldots(x+k) =$

$x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+\ldots S_rx^{m-r}+\ldots S_m$, wo S_1, S_2, S_3, $S_4 \ldots S_r \ldots S_m$ der Reihe nach die Summe der Combinationen der m zweiten Glieder zur 1sten, 2ten, 3ten, 4ten ... $r$ten bis $m$ten Klasse bedeuten.

Um das zu beweisen, bilden wir successive die Produkte der 2, 3, 4 ersten Faktoren u. s. f. Hiebei wollen wir, um Raum zu gewinnen, die Glieder eines mehrtheiligen Coeffizienten nicht neben, sondern unter einander setzen und durch einen vertikalen Strich vom gemeinschaftlichen Faktor trennen, also z. B.

$(a+b+c)x = \left.\begin{array}{r} a \\ +b \\ +c \end{array}\right| x$ setzen. Wir finden dann durch Ausführung der Multiplikation:

1) $(x+a)(x+b) = x^2 + \left.\begin{array}{r} a \\ +b \end{array}\right| x + ab$

2) $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + \left.\begin{array}{r} a \\ +b \\ +c \end{array}\right| x^2 + \left.\begin{array}{r} ab \\ +ac \\ +bc \end{array}\right| x + abc$

3) $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + \left.\begin{array}{r} a \\ +b \\ +c \\ +d \\ \\ \\ \end{array}\right| x^3 + \left.\begin{array}{r} ab \\ +ac \\ +bc \\ +ad \\ +bd \\ +cd \end{array}\right| x^2 + \left.\begin{array}{r} abc \\ +abd \\ +acd \\ +bcd \\ \\ \\ \end{array}\right| x + abcd$

4) $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e) = x^5 + \left.\begin{array}{r} a \\ +b \\ +c \\ +d \\ +e \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right| x^3 + \left.\begin{array}{r} ab \\ +ac \\ +bc \\ +ad \\ +bd \\ +cd \\ +ae \\ +be \\ +ce \\ +de \end{array}\right| x^3 + \left.\begin{array}{r} abc \\ +abd \\ +acd \\ +bcd \\ +abe \\ +ace \\ +bce \\ +ade \\ +bde \\ +cde \end{array}\right| x^2 + \left.\begin{array}{r} abcd \\ +abce \\ +abde \\ +acde \\ +bcde \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right| x + abcd$

Betrachten wir einmal die Zusammensetzung des Produktes der 4 ersten Faktoren, also des Produktes $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$, so ist der Coeffizient $a+b+c+d$ des zweiten Gliedes die Summe der 4 zweiten dieser binomischen Faktoren oder, was dasselbe ist, die Summe ihrer Combinationen zur 1sten Klasse; der Coeffizient des 3ten Gliedes: $ab+ac+bc+ad+bd+cd$ ist die Summe sämmtlicher Combinationen der 4 zweiten Glieder zur zweiten Klasse; — abc, abd, acd und bcd sind sämmtliche Combinationen der 3ten Klasse, welche man mit den 4 zweiten Gliedern a, b, c und d bilden kann; daher der Coeffizient $abc+abd+acd+bcd$ des vierten Gliedes die Summe ihrer Combinationen zur 3ten Klasse; endlich der Coeffizient $abcd$ ist das Produkt der 4 zweiten Glieder oder die Summe ihrer Combinationen zur 4ten Klasse. Die Behauptung unseres Satzes findet sich also einmal für ein Produkt von

4 Faktoren bestätigt; ebenso zeigt die Gleichung (1), dass er auch für zwei, die Gleichung (2), dass er für drei und die Gleichung (4), dass er auch für 5 Faktoren gilt. Um aber die Gültigkeit dieses Gesetzes für eine beliebige Anzahl von Faktoren nachzuweisen, zeigen wir nur, dass wenn es für irgend eine Anzahl z. B. für m Faktoren gilt, es auch noch für $m+1$ Faktoren bestehen muss. Nehmen wir daher einmal an, es sei das Produkt der m binomischen Faktoren $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$ etc. bis $x+k$ gleich

$$(1)\quad x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+S_3x^{m-3}+\ldots S_rx^{m-r}+\ldots S_{m-1}x+S_m,$$

wo S_1, S_2, S_3 ... S_m die bereits erwähnte Bedeutung haben. Setzen wir noch einen neuen Faktor $x+l$ hinzu, so gibt die Ausführung der Multiplikation:

$$\underline{(x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+S_3x^{m-3}+\ldots S_{m-2}x^2+S_{m-1}x+S_m)(x+l)}$$

$$(2)\left\{\begin{array}{l} x^{m+1}+S_1x^m+S_2x^{m-1}+S_3x^{m-2}+\ldots S_{m-2}x^3+S_{m-1}x^2+S_mx \\ \qquad lx^m+lS_1x^{m-1}+lS_2x^{m-2}+\ldots\ldots+lS_{m-2}x^2+lS_{m-1}x+lS_m \end{array}\right.$$

$$(3)\quad x^{m+1}+(S_1+l)x^m+(S_2+lS_1)x^{m-1}+(S_3+lS_2)x^{m-2}+\ldots$$
$$(S_{m-1}+lS_{m-2})x^2+(S_m+lS_{m-1})x+lS_m$$

wo durch Multiplikation des Polynoms (1) mit x die erste, durch Multiplikation mit l die zweite Reihe unter (2), durch Addition beider aber das Totalprodukt (3) herauskommt. Dieses Polynom (3), welches wir als Produkt der $m+1$ binomischen Faktoren erhalten haben, besteht zunächst aus $m+2$ Gliedern, und ist nach fallenden Potenzen von x geordnet; es frägt sich also nur noch, ob auch die Coeffizienten nach dem oben ausgesprochenen Gesetze gebildet seien. Der Coeffizient des ersten Gliedes ist $=1$; es war ferner S_1 die Summe aller zweiten Glieder der m frühern binomischen Faktoren und l ist das zweite Glied des neu hinzugetretenen $(m+1)$ten Faktors $x+l$; somit der Coeffizient S_1+l des zweiten Gliedes die Summe der 2ten Glieder sämmtlicher $m+1$ binomischen Faktoren oder die Summe ihrer Combinationen zur 1sten Klasse. Der Coeffizient des 3ten Gliedes ist $= S_2+lS_1$. Nun war S_2 die Summe der Combinationen zweiter Klasse der m zweiten Glieder unserer zuerst gegebenen m binomischen Faktoren, S_1 aber die Summe dieser m zweiten Glieder; also wird $lS_1=l(a+b+c+d+\ldots k)$ $=la+lb+lc+ld+\ldots lk$ die Summe derjenigen Combinationen zweiter Klasse sein, welche durch den Zutritt des Elementes l neu entstehen; somit S_2+lS_1 die Summe aller Combinationen der $m+1$ zweiten Glieder zur 2ten Klasse. Der Coeffizient des 4ten Gliedes ist $= S_3+lS_2$. Sein erster Theil S_3 war die Summe der Combinationen 3ter Klasse der m frühern zweiten Glieder a, b, c

bis k; S_2 aber die Summe ihrer Combinationen zur 2ten Klasse. Indem wir diese mit l multipliziren, bekommen wir in dem Produkt lS_2 die Summe derjenigen Combinationen 3ter Klasse, welche wegen des neu hinzugekommenen Elementes l neu entstehen; es wird folglich der Coeffizient S_3+lS_2 die Summe sämmtlicher Combinationen der $m+1$ zweiten Glieder zur 3ten Klasse sein u. s. f. Nehmen wir den Coeffizienten des drittletzten oder des $m$ten Gliedes, so ist derselbe $= S_{m-1}+lS_{m-2}$. Nun war S_{m-1} die Summe der Combinationen der m frühern Elemente zur $(m-1)$ten Klasse, S_{m-2} aber die Summe ihrer Combinationen zur $(m-2)$ten Klasse. Das Produkt lS_{m-2} enthält daher diejenigen Combinationen der $(m-1)$ten Klasse, welche durch den Zutritt des Elementes l neu entstanden und es ist somit $S_{m-1}+lS_{m-2}$ die Summe aller Combinationen der $m+1$ zweiten Glieder zur $(m-1)$ten Klasse. Der Coeffizient des $(m+1)$ten Gliedes heisst S_m+lS_{m-1} und enthält also 1., die eine Combination S_m der m frühern Elemente zur $m$ten Klasse und 2., in dem Produkt lS_{m-1} die sämmtlichen Combinationen $m$ter Klasse, welche wegen des Elementes l neu entstanden; die Summe beider — S_m+lS_{m-1} — ist somit die Summe sämmtlicher Combinationen der zweiten Glieder unserer $m+1$ binomischen Faktoren zur $m$ten oder vorletzten Klasse; das letzte Glied lS_m ist endlich das Produkt aller $m+1$ zweiten Glieder oder die Summe ihrer Combination zur $(m+1)$ten Klasse. Es ist somit das Produkt der $m+1$ binomischen Faktoren (Polynom 3) nach demselben Gesetz gebildet, wie das Produkt der m binomischen Faktoren (Polynom 1) und wenn daher jenes Bildungsgesetz für irgend eine Anzahl von Faktoren gilt, so muss es auch noch für die um 1 vermehrte Anzahl binomischer Faktoren gelten.

Nun haben wir aber dieses Gesetz durch unmittelbare Multiplikation erkannt bei 2, 3, 4 und 5 Faktoren; also muss es auch noch gelten für 6, daher auch für 7 u. s. f. Es ist somit wirklich

$$(4)\quad (x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\;\ldots\;(x+k)=$$
$$x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+S_3x^{m-3}+\ldots S_rx^{m-r}+\ldots S_{m-1}x+S_m,$$

wobei

$$\begin{aligned}
S_1&=a+b+c+d+\;\ldots\; k\\
S_2&=ab+ac+ad+\;\ldots\\
S_3&=abc+abd+abe+\;\ldots\\
S_4&=abcd+abce+\;\ldots\\
&\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\\
S_{m-1}&=abcd\;\ldots\; i+\;\ldots\\
S_m&=abcde\;\ldots\; ik.
\end{aligned}$$

244. Hieraus können wir nun unmittelbar den Binomialsatz ableiten. Denn führen wir die Voraussetzung ein, dass die zweiten Glieder unserer Binome alle $=a$ werden, so verwandelt sich die linke Seite der Gleichung (4) in $(x+a)^m$.

Auf der rechten Seite aber wird

$$S_1 = a+a+a+a+ \ldots = ma$$

$S_2 = a^2+a^2+a^2+a^2+ \ldots = \frac{m(m-1)}{1.2} a^2$; die Combinationen der zweiten Klasse verwandeln sich nämlich in 2te Potenzen von a und zwar kommt der Summand a^2 so oftmal vor, als es Combinationen von m Elementen zur 2ten Klasse gibt, also $\frac{m(m-1)}{1.2}$ mal.

S_3 war die Summe der Combinationen 3ter Klasse; diese werden alle $= a^3$; ihre Summe S_3 somit $= a^3+a^3+a^3+ \ldots$, wobei a^3 wieder so oftmal vorkommt, als es Combinationen der 3ten Klasse bei m Elementen gibt d. h. $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ mal. Es ist somit $S_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^3$.

Der Coeffizient S_r des $(r+1)$ten Gliedes war die Summe der Combinationen der m zweiten Glieder zur $r$ten Klasse. Wenn nun die zweiten Glieder alle $= a$, so werwandelt sich jede Combination der $r$ten Klasse in a^r; daher $S_r = a^r+a^r+a^r+a^r+ \ldots$ so oftmal genommen, als es bei m Elementen Combinationen der $r$ten Klasse gibt; es ist somit

$$S_r = \frac{m(m-1)(m-2) \ldots (m-r+1)}{1.2.3 \ldots r} a^r.$$

Der Coeffizient S_{m-1} des vorletzten oder $m$ten Gliedes war die Summe der Combinationen der m zweiten Glieder zur $(m-1)$ten Klasse; diese werden alle $= a^{m-1}$; daher $S_{m-1} = a^{m-1}+a^{m-1}+ \ldots = ma^{m-1}$, indem die Anzahl der Combinationen der $(m-1)$ten Klasse bei m Elementen $= m$ ist. Das letzte Glied S_m war das Produkt der m zweiten Glieder und wird daher $= a^m$; es geht somit die Gleichung (4) über in

$$(5)\ (x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^3x^{m-3}$$
$$+ \ldots \frac{m(m-1) \ldots (m-r+1)}{1.2.3 \ldots r} a^r x^{m-r} \ldots + ma^{m-1}x + a^m.$$

245. Die $m$te Potenz eines Binoms hat demnach stets $m+1$ Glieder, die 2te Potenz 3, die 3te 4, die vierte 5 etc. und die Coeffizienten sind:

$$1,\ m,\ \frac{m(m-1)}{1.2},\ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3},\ldots \frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1.2.3\ldots r},\ldots m,\ 1$$

Nun sind aber m, $\frac{m(m-1)}{1.2}$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ . . . . . $\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1.2.3\ldots r}$, ... m und 1 gerade die Combinationszahlen von m Elementen zur ersten, 2ten, 3ten, ... $r$ten . . . . ($m-1$)ten und $m$ten Klasse. Es ist somit, vom 2ten Gliede an gerechnet, der Coeffizient eines jeden Gliedes gleich der Anzahl der Combinationen von m Elementen zur sovielten Klasse, als diesem Gliede schon Glieder vorangehen. So ist der Coeffizient des 8ten Gliedes = der Anzahl der Combinationen von m Elementen zur 7ten Klasse, also $= \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-6)}{1.2.3\ldots 7}$; der Exponent von a ist ebenfalls gleich der Anzahl der dem Gliede vorangehenden Glieder, indess der Exponent von x gleich ist dem um die nämliche Zahl verminderten Exponenten des Binoms; das 8te Glied heisst demnach:

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-6)}{1.2.3\ldots 7}a^7x^{m-7}.$$

Nun bezeichnet man die Combinationszahl von m Elementen zur $r$ten Klasse d. h. den Quotienten des Produktes der r von m aus abnehmenden ganzen Zahlen durch das Produkt der r ersten ganzen Zahlen auch durch $\binom{m}{r}$, was gelesen wird: m über r, so dass also $\binom{m}{r} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1.2.3.4\ldots r}$; dann kann man die Binomialreihe auch etwas kürzer so schreiben:

$$(x+a)^m = x^m + \binom{m}{1}ax^{m-1} + \binom{m}{2}a^2x^{m-2} + \binom{m}{3}a^3x^{m-3} + \ldots \binom{m}{r}a^rx^{m-r} + \ldots \binom{m}{m-1}a^{m-1}x + \binom{m}{m}a^m$$

oder, da $\binom{m}{1} = \binom{m}{m-1} = m$ und $\binom{m}{m} = 1$

$$(6)\quad (x+a)^m = x^m + max^m + \binom{m}{2}a^2x^{m-2} + \binom{m}{3}a^3x^{m-3} + \ldots + ma^{m-1}x + a^m$$

246. Bezeichnen wir das ($r+1$)te Glied mit T_{r+1}, so haben wir

$$T_{r+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1.2.3\ldots r}a^rx^{m-r}.$$

Wir nennen dieses Glied auch das allgemeine Glied, weil wir aus demselben successive das 2te, 3te, 4te etc. bis letzte Glied ableiten können, wenn wir für r der Reihe nach setzen 1, 2, 3, 4 . . . bis m. In der That: Setzt man $r=1$, so kommt $T_2 = \frac{m}{1} ax^{m-1}$.

Um das 3te Glied zu bekommen, setzt man $r=2$; dann ist $m-r+1 = m-2+1 = m-1$; daher $T_3 = \frac{m(m-1)}{1 \, . \, 2} a^2 x^{m-2}$.

Setzt man, um aus T_{r+1} das letzte Glied abzuleiten, $r=m$, so ist $m-r+1 = m-m+1 = 1$ und man hat daher

$$T_{m+1} = \frac{m(m-1)(m-2) \ldots 3 \, . \, 2 \, . \, 1}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots m} a^m x^{m-m}$$

oder, da $\frac{m(m-1) \ldots 3 \, . \, 2 \, . \, 1}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots m} = 1$ und $x^{m-m} = x^0 = 1$,

$$T_{m+1} = a^m.$$

Um daher aus dem allgemeinen Gliede irgend ein Glied abzuleiten, darf man nur r gleich setzen der Anzahl der vorangehenden Glieder. Nur das erste Glied lässt sich nicht ohne weiter aus T_{r+1} ableiten; denn wir müssten r = der Anzahl der dem ersten vorangehenden Glieder d. h. = 0 setzen und bekämen daher sowohl im Zähler, als im Nenner ein Produkt von Null auf einander folgenden Faktoren.

Wenn wir nun die Uebereinkunft treffen, dass wir in der Folge unter einem Produkt von Null auf einander folgenden Faktoren nichts anderes als die Einheit verstehen, also $1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots r = 1$ setzen für den Fall, dass $r=0$, so bekommen wir aus dem allgemeinen Glied auch das erste, sobald wir nur $r=0$ setzen; denn wir erhalten dann: $T_{r+1} = T_1 = \frac{1}{1} a^0 x^{m-0} = x^m$. Es lassen sich somit ohne Ausnahme die sämmtlichen Glieder der Entwicklung von $(x+a)^m$ aus dem allgemeinen Gliede ableiten, sobald man nur festsetzt, dass ein Produkt von Null aufeinander folgenden Faktoren = 1 sein soll.

Wir ziehen nun aus dem binomischen Satz mehrere Consequenzen:

247. Die Coeffizienten derjenigen Glieder, die gleich weit vom ersten und letzten Gliede abstehen, sind einander gleich.

In jedem speziellen Fall finden wir diese Behauptung bestätigt; denn wenn wir der Reihe nach $m = 5$, 6, 7 etc. setzen, so kommt

$$(x+a)^5 = x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5$$
$$(x+a)^6 = x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+15a^4x^2+6a^5x+a^6$$
$$(x+a)^7 = x^7+7ax^6+21a^2x^5+35a^3x^4+35a^4x^3+21a^5x^2+7a^6x+a^7$$

wobei man sofort erkennt, dass wenn, wie früher bei den Progressionen, A_r das $r$te Glied vom Anfang und E_r das $r$te Glied vom Ende bezeichnet, A_2 und E_2, A_3 und E_3, A_4 und E_4 etc. wirklich gleiche Coeffizienten haben. Um aber die Gültigkeit dessen für jede beliebige Potenz nachzuweisen, leiten wir aus dem allgemeinen Glied irgend zwei Glieder ab, die gleichweit von den beiden äussersten abstehen z. B. A_5 und E_5, so erhalten wir zunächst A_5, wenn wir im allgemeinen Gliede $r = 4$ setzen, wodurch

$$A_5 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4.} a^4 x^{m-4}.$$

Um aber E_5 zu bekommen, bedenken wir, dass die Entwicklung im Ganzen $m+1$ Glieder enthält. Wenn wir also irgend ein Glied, wie E_5 in's Auge fassen, so kommen ausser ihm noch m Glieder vor; von diesen folgen 4 Glieder ihm nach, die übrigen $m-4$ werden ihm also vorangehen. Wir dürfen daher im allgemeinen Gliede nur $r = m-4$ setzen, wodurch

$$m-r+1 = m-(m-4)+1 = m-m+4+1 = 5, \text{ daher}$$

$$E_5 = \frac{m(m-1)(m-2) \ldots . 6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots . (m-4)} a^{m-4} x^4.$$

Dass nun der Coeffizient dieses Gliedes wirklich gleich dem von A_5, erkennt man leicht, wenn man beide auf denselben Nenner bringt, indem man entweder im Coeffizienten von A_5 Zähler und Nenner noch mit $5 \,.\, 6 \,.\, 7 \ldots . (m-4)$ multiplizirt, wodurch derselbe in $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3) \,.\, 5 \,.\, 6\; 7 \ldots (m-4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \ldots (m-4)} =$ $\frac{m(m-1)(m-2) \ldots 6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots (m-4)}$ übergeht, oder indem man Zähler und Nenner des Coeffizienten von E_5 durch das Produkt $5 \,.\, 6 \,.\, 7 \ldots (m-4)$ dividirt, wodurch dieser in $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$ sich verwandelt.

Statt in jedem speziellen Fall die Gleichheit der Coeffizienten durch Reduktion auf denselben Nenner nachzuweisen, ist es zweckmässiger, gleich das allgemeine Glied so zu transformiren, dass wenn man aus demselben zwei Glieder ableitet, die gleichweit von den beiden äussersten abstehen, die Gleichheit ihrer Coeffizienten sofort in die Augen springt.

Zu dem Ende multipliziren wir Zähler und Nenner von T_{r+1}

mit dem Produkt aller unter $m-r+1$ liegenden ganzen Zahlen, also mit $(m-r)(m-r-1)\ldots 3\,.\,2\,.\,1$, wodurch wir im Zähler das Produkt aller ganzen Zahlen von m bis 1 erhalten, so kommt:

$$T_{r+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots 3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots r\,.\,1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-r)}\, a^r x^{m-r}.$$

Um hieraus z. B. das 7te Glied vom Anfang und das 7te Glied vom Ende abzuleiten, ersetzen wir beidemal r durch die Zahl der dem zu bestimmenden Gliede vorangehenden Glieder, also im ersten Fall durch 6, im letzten durch $m-6$ und bekommen so:

$$1.\quad A_7 = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m}{1\,.\,2\,.\,3\ldots 6\,.\,1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-6)}\, a^6 x^{m-6}$$

$$2.\quad E_7 = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,m}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-6)\,.\,1\,.\,2\,.\,3\ldots 6}\, a^{m-6} x^6$$

Die Zähler dieser Coeffizienten sind von vorn herein gleich; die Nenner bestehen aus denselben Faktoren, nur in veränderter Reihenfolge; die Coeffizienten sind also wirklich gleich.

Zusatz. Wir haben oben gefunden, dass

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = \frac{m(m-1)\ldots 6\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-4)}$$

oder

$$\binom{m}{4} = \binom{m}{m-4}$$

Nun sind $\binom{m}{4}$ und $\binom{m}{m-4}$ die Combinationszahlen von m Elementen zur 4ten und zur $(m-4)$ten Klasse; wir können daher auch sagen: die Combinationszahl von m Elementen zur 4ten Klasse ist gleich der Combinationszahl von m Elementen zur $(m-4)$ten Klasse oder allgemein: die Anzahl der Combinationen von m Elementen zur $r$ten Klasse gleich der Anzahl ihrer Combinationen zur $(m-r)$ten Klasse.

248. Man kann aus den Coeffizienten der $m$ten Potenz eines Binoms die der nächst höhern Potenz ableiten, indem man je zwei benachbarte addirt; so ist der Coeffizient des 4ten mehr dem Coeffizienten des 5ten Gliedes in der $m$ten Potenz = dem Coeffizienten des 5ten Gliedes der $(m+1)$ten Potenz oder:

$$\binom{m}{3} + \binom{m}{4} = \binom{m+1}{4} \quad \text{Ebenso wäre}$$

$$\binom{m}{6} + \binom{m}{7} = \binom{m+1}{7}$$

und allgemein: $\binom{m}{r}+\binom{m}{r+1}=\binom{m+1}{r+1}$.

In der That: Es ist

$$\binom{m}{3}=\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$\binom{m}{4}=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

Indem wir Zähler und Nenner des ersten Bruches mit 4 multipliziren und die Resultate addiren, bekommen wir

$$\binom{m}{3}+\binom{m}{4}=\frac{4m(m-1)(m-2)+m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

$$=\frac{(4+m-3)m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}=\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

was $=\binom{m+1}{4}$.

Um ferner zu zeigen, dass $\binom{m}{r}+\binom{m}{r+1}=\binom{m+1}{r+1}$, haben wir:

$$\binom{m}{r}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots r}$$

$$\binom{m}{r+1}=\frac{m(m-1)\ldots.(m-r+1)(m-r)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots r(r+1)}$$

Multipliziren wir Zähler und Nenner des ersten mit $(r+1)$, und sondern dann im Zähler die gemeinschaftlichen Faktoren $m(m-1)\ldots(m-r+1)$ ab, so bekommen wir:

$$\binom{m}{r}+\binom{m}{r+1}=\frac{m(m-1)\ldots.(m-r+1)[r+1+m-r]}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.r(r+1)}$$

$$=\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots r(r+1)}=\binom{m+1}{r+1}$$

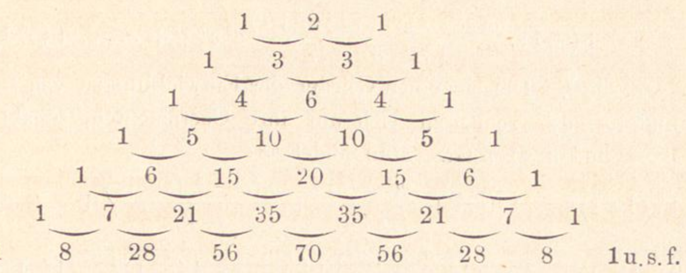
welche Gleichung wir in doppelter Weise lesen können:

a. Mit Rücksicht auf die Binomialreihe zeigt sie, dass der Coeffizient des $(r+1)$ten Gliedes der $m$ten Potenz mit dem Coeffizienten des $(r+2)$ten Gliedes zusammen den Coeffizienten des $(r+2)$ten Gliedes der $(m+1)$ten Potenz ausmacht,

b. dass wenn man zur Combinationszahl der $r$ten Klasse bei m Elementen die Combinationszahl der folgenden Klasse addirt, man als Summe gerade die Combinationszahl vom $(m+1)$ Elementen zur $(r+1)$ten Klasse erhält.

Das folgende Schema zeigt, wie man, von den Coeffizienten

der 2ten Potenz ausgehend, diejenigen der höhern Potenzen successive finden kann.



wo der durch Addition entstandene Coeffizient der folgenden Potenz je unter die zwei Coeffizienten der vorangehenden Potenz geschrieben ist, aus welchen er abgeleitet wurde.

249. Die Entwicklung von $(x-a)^m$ muss sich offenbar aus der von $(x+a)^m$ ergeben, wenn man nur überall a durch $-a$ ersetzt, was zur Folge hat, dass alle Glieder, welche a in ungeraden Potenzen enthalten, negativ werden. Man bekommt daher

$$(x-a)^m = x^m - max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2} a^2 x^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} a^3 x^{m-3}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} a^4 x^{m-4} - + \ldots \pm a^m$$

wo das letzte Glied a^m positiv oder negativ genommen werden muss, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Ebenso wird das $(r+1)$te Glied sein:

$T_{r+1} = \pm \frac{m(m-1)(m-2) \ldots . (m-r+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots . r} a^r x^{m-r}$, wo wieder das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem r gerade oder ungerade. Nun kann man statt $-a$ auch setzen: $(-1) \,.\, a$; also $(-a)^r = (-1.)^r \,.\, a^r$, welches Produkt von selbst positiv ausfällt, wenn r gerade und negativ, wenn r ungerade ist. Statt daher das allgemeine Glied in der Form

$\pm \frac{m(m-1)(m-2) \ldots (m-r+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots . r} a^r x^{m-r}$ zu schreiben und beizufügen, wann das obere oder das untere Vorzeichen genommen werden soll, ist's zweckmässiger, es in der Form

$+(-1)^r \,.\, \frac{m(m-1)(m-2) \ldots . (m-r+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots . r} a^r x^{m-r}$ zu schreiben, die für jedes spezielle r von selbst das richtige Vorzeichen liefert. Ebenso wird man das letzte Glied $\pm a^m$ zweckmässig durch $(-1)^m \,.\, a^m$ ersetzen. Somit bekommen wir:

$$(x-a)^m = x^m - m a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2} a^2 x^{m-2} + \ldots$$

$$+ (-1)^r . \frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots . r} a^r x^{m-r} + \ldots\ldots + (-1)^m a^m .$$

250. Die einzelnen Glieder der Entwicklungen von $(x+a)^m$ und $(x-a)^m$ reduziren sich auf ihre Coeffizienten, sobald man $x=1$ und $a=1$ setzt. Man findet so:

$$1., (1+1)^m = 1 + m + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \ldots . m+1$$

$$2., (1-1)^m = 1 - m + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \binom{m}{4} - \ldots + (-1)^r \binom{m}{r} + \ldots + (-1)^m$$

d. h. die Summe der Coeffizienten in der Entwicklung von $(x+a)^m$ ist gleich der $m$ten Potenz von 2, die Summe der Coeffizienten von $(x-x)^m$ aber ist gleich Null.

So ist die Summe der Coeffizienten von $(x+a)^7 = 2^7 = 128$, die von $(x-a)^7$ = Null. In der That ist $1+7+21+35+35+21+7+1=128$ und $1-7+21-35+35-21+7-1=0$. Es entspricht hier nämlich jedem positiven Coeffizienten ein gleich grosser negativer, wie überhaupt bei jeder ungeraden Potenz eines Binoms. Bei geraden Potenzen aber entspricht nicht je einem positiven Coeffizienten ein gleich grosser negativer; gleichwol ist die Summe der positiven Coeffizienten gleich der Summe der negativen, wie z. B. in

$$(x-a)^6 = x^6 - 6ax^5 + 15a^2x^4 - 20a^3x^3 + 15a^4x^2 - 6a^5x + a^6$$

wo die Summe der positiven $= 1+15+15+1 = 32$

„ „ „ „ negativen $= -6-20-6 = -32$.

251. Man kann auch aus irgend einem Gliede der Entwicklung von $(x+a)^m$ das nächstfolgende ableiten, indem man dasselbe mit dem Exponenten von x multiplizirt, das Produkt durch die Rangzahl dividirt, endlich den Exponenten von x um 1 vermindert, den von a um 1 erhöht. So würde man aus dem ersten Gliede von $(x+a)^7$ d. h. aus x^7 das zweite ableiten, indem man es mit 7 multiplizirt, durch 1 dividirt, den Exponenten von x um 1 vermindert, den von a um 1 vermehrt, wodurch man $7ax^6$ erhält. Wenn wir dieses wieder mit 6 multipliziren, durch die Rangzahl 2 dividiren, den Exponenten von x um 1 erniedrigen, den von a um 1 erhöhen, so bekommen wir das 3te Glied $= \frac{7 \cdot 6}{2} a^2 x^5 = 21 a^2 x^5$ u. s. f.

Um das allgemein nachzuweisen, leiten wir aus dem allgemeinen Glied T_{r+1} irgend zwei aufeinander folgende, z. B. das $n$te und $(n+1)$te Glied ab; das erste findet sich, wenn wir $r=n-1$, das zweite, wenn wir $r=n$ setzen. Dadurch kommt:

$$T_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} a^{n-1} x^{m-n+1}$$

$$T_{n+1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)(m-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1).n} a^n x^{m-n}.$$

Vergleichen wir nun T_{n+1} mit T_n, so enthält der Zähler von T_{n+1} den Faktor $m-n+1$, der Nenner aber den Faktor n mehr als T_n; überdiess ist in T_{n+1} der Exponent von a um 1 grösser, der von x um 1 kleiner, als in T_n. Da nun $m-n+1$ gerade der Exponent von x in T_n, so erkennt man, dass man wirklich das Glied T_n nur mit dem Exponenten $m-n+1$ des x multipliziren, durch die Rangzahl n dividiren, dann noch den Exponenten von a um 1 erhöhen, den von x um 1 vermindern müsste, um das Glied T_{n+1} zu erhalten.

252. Die Coeffizienten der Entwicklung von $(x+a)^m$ nehmen in der ersten Hälfte der Entwicklung von Glied zu Glied zu, in der zweiten Hälfte aber von Glied zu Glied ab.

Aus Nro. 251 erkennen wir, dass der Coeffizient von T_{n+1} aus dem von T_n erhalten wird durch Multiplikation mit $\frac{m-n+1}{n}$; der erste ist die Combinationszahl der $n$ten, der letzte die der $(n-1)$ten Klasse, so dass also

$$\overset{n}{C}_m = \overset{n-1}{C}_m \cdot \frac{m-n+1}{n}.$$

Das Gleiche ergibt sich uns durch Vergleichung der Combinationszahlen von m Elementen zur 2ten, 3ten, 4ten Klasse u. s. f. Man erkennt nämlich sofort, dass

$$\overset{2}{C}_m = \overset{1}{C}_m \cdot \frac{m-1}{2}$$

$$\overset{3}{C}_m = \overset{2}{C}_m \cdot \frac{m-2}{3}$$

$$\overset{4}{C}_m = \overset{3}{C}_m \cdot \frac{m-3}{4} \text{ u. s. f.}$$

allgemein:
$$\overset{r}{C}_m = \overset{r-1}{C}_m \cdot \frac{m-r+1}{r}$$

Es erscheint somit der Coeffizients $\overset{r}{C}_m$ des $(r+1)$ten Gliedes als das Produkt aus dem Coeffizienten $\overset{r-1}{C}_m$ des vorangehenden Gliedes in $\frac{m-r+1}{r}$. Dieses Produkt wird also grösser oder kleiner als der Multiplikand $\overset{r-1}{C}_m$ oder gleich demselben, je nachdem $\frac{m-r+1}{r} > 1$ oder < 1 oder $= 1$.

Es ist demnach $\overset{r}{C}_m > \overset{r-1}{C}_m$, wenn $\frac{m-r+1}{r} > 1$ oder $m-r+1 > r$ oder $m+1 > 2r$ oder $\frac{m+1}{2} > r$. Nun ist aber $\frac{m+1}{2}$ die halbe Anzahl der Glieder. Die Relation: $\overset{r}{C}_m > \overset{r-1}{C}_m$, wenn $\frac{m+1}{2} > r$ oder $r < \frac{m+1}{2}$, heisst daher in Worten: Der Coeffizient eines Gliedes ist grösser als der des vorangehenden, wenn die Zahl der vorangehenden Glieder kleiner ist als die halbe Anzahl aller Glieder, was stets in der ersten Hälfte der Entwicklung der Fall ist.

Wenn dagegen $\frac{m-r+1}{r} < 1$ oder $m-r+1 < r$ oder $m+1 < 2r$ und $\frac{m+1}{2} < r$, so ist $\overset{r}{C}_m < \overset{r-1}{C}_m$ d. h. wenn die Zahl der vorangehenden Glieder grösser ist als die halbe Anzahl aller Glieder, so ist der Coeffizient des folgenden Gliedes **kleiner** als der des vorangehenden, was immer in der zweiten Hälfte der Entwicklung stattfindet.

Ist endlich $\frac{m-r+1}{r} = 1$ oder $m-r+1 = r$ oder $m+1 = 2r$ oder $r = \frac{m+1}{2}$, so ist $\overset{r}{C}_m \,.\, \overset{r-1}{C}_m$ d. h. wenn die Zahl der vorangehenden Glieder gerade gleich ist der halben Anzahl aller Glieder, so ist der Coeffizient des nächsten Gliedes gleich dem des vorangehenden.

Anmerkung. Nur wenn die Anzahl $m+1$ aller Glieder eine gerade, ist $\frac{m+1}{2}$ eine ganze Zahl und nur dann gibt es ein Glied, dessen Coeffizient gerade gleich ist dem des vorangehenden. Ist dagegen $m+1$ eine ungerade Zahl, so kann r nie $= \frac{m+1}{2}$

sein und es gibt dann kein Glied, dessen Coeffizient dem des vorangehenden gleich sein könnte; gleichwol nehmen die Coeffizienten zu, so lange $r < \frac{m+1}{2}$, werden aber kleiner, sobald $r > \frac{m+1}{2}$; es gibt somit dann ein Mittelglied, dessen Coeffizient die aller übrigen Glieder übertrifft.

Wir sind nun im Stande, jede ganze Potenz irgend eines Binoms zu bilden. Wenn wir z. B. $(7a^2b+3ab^2)^5$ entwickeln wollten, so hätten wir zunächst:

$$(7a^2b+3ab^2)^5 = (7a^2b)^5 + 5\,.\,(7a^2b)^4\,.\,3ab^2 + 10\,.\,(7a^2b)^3\,.\,(3ab^2)^2$$
$$+10\,.\,(7a^2b)^2\,.\,(3ab^2)^3 + 5\,.\,7a^2b\,.\,(3ab^2)^4 + (3ab^2)^5.$$

Nun ist aber

1. $(7a^2b)^5 = 16807a^{10}b^5$
2. $5.(7a^2b)^4.\ 3ab^2 = 5.2401a^8b^4.3ab^2 = 36015a^9b^6$
3. $10.(7a^2b)^2.(3ab^2)^2 = 10.343a^6b^3.9a^2b^4 = 30870a^8b^7$
4. $10.(7a^2b)^2.(2ab^2)^3 = 10.49a^4b^2.27a^3b^6 = 13230a^7b^8$
5. $5.\ 7a^2b\ .\ (3ab^2)^4 = 5.\ 7a^2b\ .81a^4b^8 = 2835a^6b^9$
6. $(3ab^2)^5 = 243a^5b^{10} = 243a^5b^{10}$

daher $(7a^2b+3ab^2)^5 = 16807a^{10}b^5 + 36015a^9b^6 + 30870a^8b^7$
$+ 13230a^7b^8 + 2835a^6b^9 + 243a^5b^{10}$

Polynomischer Satz oder Entwicklung der $m$ten Potenz eines Polynoms.

253. Nach der Entwicklung von Nro. 244, Gleichung (5), hat man auch:

$$(1)\quad (a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{m-3}b^3$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}a^{m-4}b^4 + \ldots\ldots mab^{m-1} + b^m$$

d. h. die $m$te Potenz eines beliebigen Binoms ist gleich der $m$ten Potenz des ersten Gliedes mehr dem $m$fachen Produkt aus der $(m-1)$ten Potenz des ersten Gliedes in die erste Potenz des zweiten; mehr dem $\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}$ fachen Produkt aus der $(m-2)$ten Potenz des ersten Gliedes in das Quadrat des 2ten, mehr dem $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$ fachen Produkt aus der $(m-3)$ten Potenz des ersten Gliedes in die 3te Potenz des zweiten u. s. f. bis zur $m$ten Potenz des zweiten Gliedes.

Hiernach können wir auch die $m$te Potenz eines Trinoms ableiten, indem wir für einen Augenblick die Summe der beiden

ersten Glieder als **ein** Glied, das dritte aber als zweites Glied auffassen. Wir bekommen so zunächst:

$$[(a+b)+c]^m = (a+b)^m + m(a+b)^{m-1}c + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}(a+b)^{m-2}c^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(a+b)^{m-3}c^3 + \ldots . c^m$$

und wenn wir hier $(a+b)^m$ durch seinen Werth aus der Gleichung (1) ersetzen, so bekommen wir:

$$(a+b+c)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^{m-2}b^2 + \ldots b^m + m(a+b)^{m-1}c$$
$$(2) \qquad + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}(a+b)^{m-2}c^2 + \ldots . c^m$$

woraus wir erkennen, dass zur $m$ten Potenz der Summe beider ersten Glieder noch hinzukommt das $m$fache Produkt aus der $(m-1)$ten Potenz der Summe der beiden ersten Glieder in die erste Potenz des dritten, dann das $\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}$ fache Produkt aus der $(m-2)$ten Potenz der Summe beider ersten Glieder in das Quadrat des dritten u. s. f. bis zur $m$ten Potenz des 3ten Gliedes.

Um die $m$te Potenz eines 4gliedrigen Polynoms abzuleiten, fassen wir wieder zunächst die Summe der 3 ersten Glieder als **ein** Glied, das 4te als zweites Glied auf und erhalten demnach:

$$[(a+b+c)+d]^m = (a+b+c)^m + m(a+b+c)^{m-1}d +$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}(a+b+c)^{m-2}d^2 + \ldots . d^m,$$

wo wir nur $(a+b+c)^m$ wieder durch seinen Werth aus Gleichung (2) zu ersetzen brauchten. Es kommt also zur $m$ten Potenz der Summe der 3 ersten Glieder noch hinzu das $m$fache Produkt aus der $(m-1)$ten Potenz der Summe der 3 ersten Glieder in das 4te, dann das $\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}$ fache Produkt aus der $(m-2)$ten Potenz der Summe der 3 ersten Glieder in die 2te Potenz des 4ten u. s. f. bis zur $m$ten Potenz des 4ten Gliedes.

254. Entwicklung des allgemeinen Gliedes von $(a+b+c+d+\ldots)^m$.

Wir setzen zunächst $b+c+d+\ldots = x$; dann ist $(a+b+c+d+\ldots)^m = (a+x)^m = (x+a)^m$. Bezeichnen wir dessen allgemeines Glied mit X, so ist

$$X = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1.2.3\ldots r} a^r x^{m-r} \text{ oder}$$

nach Nro. 247 auch:

$$X = \frac{1.2.3\ldots\ldots m}{1.2.3\ldots r.1.2.3\ldots(m-r)} a^r x^{m-r} \quad (1)$$

Nun $x^{m-r} = (b+c+d+..)^{m-r} = (b+y)^{m-r} = (y+b)^{m-r}$, wenn $c+d+\text{etc.} = y$ gesetzt wird.

Es enthält $(y+b)^{m-r}$ nun $m-r+1$ Glieder und wenn wir als allgemeines Glied davon dasjenige nehmen, welches $a^{r'}$ enthält und es mit Y bezeichnen, so kann man dieses allgemeine Glied entsprechend der Gleichung (1) auch so schreiben:

$$Y = \frac{1.2.3\ldots\ldots(m-r)}{1.2.3\ldots r'.1.2.3\ldots(m-r-r')} b^{r'} y^{m-r-r'}$$

Setzen wir nun in (1) an die Stelle von x^{m-r} dessen allgemeines Glied Y, so erhalten wir:

$$X = \frac{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots(m-r)}{1.2.3\ldots r.1.2.3\ldots(m-r).1.2.3\ldots r'.1.2.3\ldots(m-r-r')} a^r b^{r'} y^{m-r-r'}$$

oder wenn wir Zähler und Nenner durch $1.2.3\ldots(m-r)$ dividiren:

$$X = \frac{1.2.3.4\ldots\ldots m}{1.2.3\ldots r.1.2.3\ldots r'.1.2.3\ldots(m-r-r')} a^r b^{r'} y^{m-r-r'} \quad (2)$$

und dieser Ausdruck repräsentirt alle diejenigen Glieder der $m$ten Potenz von $(a+b+c+d\ldots)^m$, welche a^r und $b^{r'}$ enthalten. Es ist nun hiebei

$y^{m-r-r'} = (c+d\ldots)^{m-r-r'} = (c+z)^{m-r-r'} = (z+c)^{m-r-r'}$, wenn $z = d+\ldots$. Die Entwicklung von $(z+c)^{m-r-r'}$ wird $m-r-r'+1$ Glieder enthalten und wenn wir mit Z deren allgemeines Glied bezeichnen, das etwa r'' Glieder vor sich haben mag, so wird

$$Z = \frac{1.2.3\ldots\ldots(m-r-r')}{1.2.3\ldots r''.1.2.3\ldots(m-r-r'-r'')} a^r b^{r'} z^{m-r-r'-r''}$$

Ersetzen wir nun im Ausdruck (2) $y^{m-r-r'}$ durch sein allgemeines Glied Z, so kommt $X =$

$$\frac{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots(m-r-r')}{1.2.3\ldots r.1.2.3\ldots r'.1.2.3\ldots(m-r-r').1.2.3\ldots r''.1.2.3\ldots(m-r-r'-r'')} a^r b^{r'} c^{r''} z^{m-r-r'-r''}$$

oder nach Entfernung der gemeinschaftlichen Faktoren in Zähler und Nenner:

$$X = \frac{1.2.3\ldots\ldots m}{1.2.3\ldots r.1.2.3\ldots r'.1.2.3\ldots r''.1.2.3\ldots(m-r-r'-r'')} a^r b^{r'} c^{r''} z^{m-r-r'-r''}.$$

Hätte das Polynom nur 4 Glieder, so wäre $z = d$ und indem man

zur Abkürzung $m-r-r'-r''=r'''$ setzt, bekäme man als allgemeines Glied von $(a+b+c+d)^m$:

$$X=\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots r.\,1.2.3\ldots r'.\,1.2.3\ldots r''.\,1.2.3\ldots r'''}\,a^r b^{r'} c^{r''} d^{r'''}$$

wo dann $r'''=m-r-r'-r''$ oder $r+r'+r''+r'''=m$ sein muss.

Versteht man, wie früher, unter einem Produkt von Null aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen die Einheit, so können wir aus dem Ausdruck X sämmtliche Glieder von $(a+b+c+d)^m$ ableiten, wenn wir nur für r, r', r'' und r''' successive alle positiven ganzen Zahlen einsetzen, welche der Bedingung genügen, dass $r+r'+r''+r'''=m$.

Um das erste Glied zu bekommen, würde man $r=m$ und daher $r'=r''=r'''=0$ setzen, wodurch die Produkte $1.2.3\ldots r'$, $1.2.3\ldots r''$ und $1.2.3\ldots r'''$ alle $=1$ werden, und bekäme so:

$$X=\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots m.1.1.1}\,a^m b^0 c^0 d^0=a^m.$$

Um ferner diejenigen Glieder zu bekommen, welche a^{m-1} enthalten, darf man nur $r=m-1$ und somit $r'+r''+r'''=1$ setzen. Man wird dabei so viele Glieder erhalten, als auf wie viele Arten der Bedingung $r'+r''+r'''=1$ Genüge geleistet werden kann; das wird erreicht:

1. durch $r=m-1$, $r'=1$ und $r''=r'''=0$, wodurch

$$X=\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots(m-1).1.1}\,a^{m-1}b^1c^0d^0=ma^{m-1}b;$$

2. durch $r=m-1, r''=1$ und $r'=r'''=0$, wodurch

$$X=\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots(m-1).1.1.1}\,a^{m-1}b^0c^1d^0=ma^{m-1}c;$$

endlich durch $r=m-1$, $r'''=1$ und $r'=r''=0$, wodurch

$$X=\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots(m-1).1.1.1}\,a^{m-1}b^0c^0d^1=ma^{m-1}d.$$

Suchen wir ferner die Glieder, welche a^{m-2} enthalten, so dürfen wir nur $r=m-2$ und daher $r'+r''+r'''=2$ setzen, welche Bedingung auf 6 Arten erfüllt werden kann:

1. durch $r'=2$ und $r''=r'''=0$
2. „ $r''=2$ und $r'=r'''=0$
3. „ $r'''=2$ und $r'=r''=0$
4. „ $r'=1$, $r''=1$ und $r'''=0$
5. „ $r'=r'''=1$ und $r''=0$
6. „ $r''=r'''=1$ und $r'=0$

Wir bekommen so successive

$$1.\quad X = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots.\,m}{1.2.3\ldots.(m-2)1.2.1.1}\; a^{m-2} b^2 c^0 d^0 = \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} a^{m-2} b^2$$

$$2.\quad X = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots.\,m}{1.2.3\ldots(m-2).1.1.2.1}\; a^{m-2} b^0 c^2 d^0 = \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} a^{m-2} c^2$$

$$3.\quad X = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots.\,m}{1.2.3\ldots(m-1).1.1.1.2}\; a^{m-2} b^0 c^0 d^2 = \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} a^{m-2} d^2$$

$$4.\quad X = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots.\,m}{1.2.3\ldots(m-2).1.1.1}\; a^{m-2} b^1 c^1 d^0 = m(m-1)\, a^{m-2} bc$$

$$5.\quad X = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots.\,m}{1.2.3\ldots(m-2).1.1.1}\; a^{m-1} b^1 c^0 d^1 = m(m-1) a^{m-2} bd$$

$$6.\quad X = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots.\,m}{1.2.3\ldots(m-2).1.1\,1}\; a^{m-2} b^0 c^1 d^1 = m(m-1) a^{m-2} cd.$$

Summe der $m$ten Potenzen der Glieder einer arithmetischen Progression und Summation der Kugelhaufen.

Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, die Summe der $m$ten Potenzen der Glieder einer arithmetischen Progression zu finden. Seien a_1, a_2, $a_3 \ldots$ bis a_r die r ersten Glieder, d die Differenz, so ist $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d$ etc... $a_{r+1} = a_r + d$. Indem wir jede dieser r Gleichungen mit $m+1$ potenziren, erhalten wir:

$$a_2^{m+1} = (a_1+d)^{m+1} = a_1^{m+1} + (m+1) a_1^m d + \frac{(m+1)m}{1\,.\,2} a_1^{m-1} d^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1\,.\,2\,.\,3} a_1^{m-2} d^3 + \ldots$$

$$a_3^{m+1} = (a_2+d)^{m+1} = a_2^{m+1} + (m+1) a_2^m d + \frac{(m+1)m}{1\,.\,2} a_2^{m-1} d^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1\,.\,2\,.\,3} a_2^{m-2} d^3 +$$

$$a_4^{m+1} = (a_3 + d)^{m+1} = a_3^{m+1} (+m+1) a_3^m d + \frac{(m+1)m}{1\,.\,2} a_3^{m-1} d^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1\,.\,2\,.\,3} a_3^{m-2} d^3 + \ldots$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$a_{r+1} = (a_r+d)^{m+1} = a_r^{m+1} + (m+1) a_r^m d + \frac{(m+1)m}{1\,.\,2} a_r^{m-1} d^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1\,.\,2\,.\,3} a_r^{m-2} d^3 + \ldots$$

Wenn wir nun alle diese r Gleichungen addiren und zu-

gleich die gemeinschaftlichen Glieder auf beiden Seiten weggelassen, so kommt: $a_{r+1}^{m+1} - a_1^{m+1} =$

$$(m+1)d\left[a_1^m + a_2^m + a_3^m + \ldots a_r^m\right] + \frac{(m+1)m}{1 \,.\, 2} d^2 \left[a_1^{m-1} + a_2^{m-1} + \ldots a_r^{m-1}\right] + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} d^3 \left[a_1^{m-2} + a_2^{m-2} + \ldots a_r^{m-2}\right] + \ldots$$

Bezeichnen wir nun mit S_1, S_2, $S_3 \ldots$ bis S_m die Summe der ersten, der zweiten, 3ten bis $m$ten Potenzen der r ersten Glieder a_1, a_2, $a_3 \ldots a_r$ unserer arithmetischen Progression, so ist

$$a_{r+1}^{m+1} - a_1^{m+1} = (m+1)dS_m + \frac{(m+1)m}{1 \,.\, 2} d^2 S_{m-1} + \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} d^3 S_{m-2} + \text{etc}$$

aus welcher S_m berechnet werden kann, wenn man S_{m-1}, S_{m-2} etc. kennt. Man findet

$$(2) \quad S_m = \frac{a_{r+1}^{m+1} - a_1^{m+1}}{(m+1)d} - \frac{m}{2} dS_{m-1} - \frac{m(m-1)}{2 \,.\, 3} d^2 S_{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \,.\, 3 \,.\, 4} d^3 S_{m-3} - \text{etc.}$$

Wenden wir das an auf die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3... bis n, so dürfen wir in (2) nur $a_1 = 1$, $a_{r+1} = n+1$, $d = 1$ und $r = n$ setzen, dann kommt:

$$(3) \quad S_m = \frac{(n+1)^{m+1} - 1}{m+1} - \frac{m}{2} S_{m-1} - \frac{m(m-1)}{2 \,.\, 3} S_{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \,.\, 3 \,.\, 4} S_{m-3} \quad \text{etc.}$$

Hieraus finden wir nun

1. für $m = 1$:

$$S_1 = \frac{(n+1)^2 - 1}{2} - \frac{1}{2} S_0,$$

also die Summe der ersten Potenzen ausgedrückt durch die Summe der nullten Potenzen. Nun

$S_0 = 1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots n^0 = 1 + 1 + 1 + \ldots = n$; daher

$$S_1 = \frac{(n+1)^2 - 1}{2} - \frac{1}{2} n = \frac{(n+1)^2 - 1 - n}{2} = \frac{n^2 + 2n + 1 - 1 - n}{2}$$

$S_1 = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$, was wir auch von früher schon wissen.

2. für $m = 2$ kommt

$S_2 = \frac{(n+1)^3 - 1}{3} - S_1 - \frac{1}{3} S_0$ oder, für S_1 und S_0 die Werthe eingesetzt:

$$S_2 = \frac{(n+1)^3-1}{3} - \frac{n^2+n}{2} - \frac{1}{3}n = \frac{2(n+1)^3-2-3n^2-3n-2n}{6}$$

$$S_2 = \frac{2n^3+6n^2+6n+2-2-3n^2-3n-2n}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

oder $S_2 = \frac{2n^3+2n^2+n^2+n}{6} = \frac{2n^2(n+1)+n(n+1)}{6}$

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Um die Summe der 3ten Potenzen zu finden, setzen wir $m = 3$ und bekommen

$S_3 = \frac{(n+1)^4-1}{4} - \frac{3}{2} S_2 - S_1 - \frac{1}{4} S_0$. Nun ist aber

$S_2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$, $S_1 = \frac{n^2+n}{2}$ und $S_0 = n$; daher

$$S_3 = \frac{(n+1)^4-1}{4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2n^3+3n^2+n}{6} - \frac{n^2+n}{2} - \frac{1}{4}n$$

$$S_3 = \frac{3(n^4+4n^3+6n^2+4n+1)-3-6n^3-9n^2-3n-6n^2-6n-3n}{12}$$

$$S_3 = \frac{3n^4+6n^3+3n^2}{12} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} = \frac{(n^2+n)^2}{4}$$

$S_3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = S_1^2$ d. h. die Summe der 3ten Potenzen ist das Quadrat von der Summe der ersten Potenzen der n ersten natürlichen Zahlen.

256. Berechnung der Kugelhaufen. Man bedient sich nun der obigen Formeln, um die Anzahl der Kugeln zu bestimmen, welche in Zeughäusern gewöhnlich zu rechteckigen, quadratischen oder dreieckigen Haufen aufgeschichtet sind.

α. In einem rechteckigen Kugelhaufen bildet die Grundfläche d. h. die unterste Schichte ein Rechteck. Die Kugeln der 2ten Schichte kommen in die durch die erste Schichte gebildeten Zwischenräume zu liegen. Wenn z. B. die längere Seite der Basis 9, die kürzere 6 Kugeln enthielte, so würde die 2te Schichte auf der längern Seite 8, auf der kürzern 5 Kugeln enthalten. Auf diese zweite Schichte wird eine dritte gelegt mit 7 Kugeln auf der längern und 4 auf der kürzern Seite; auf diese folgt eine 4te Schichte mit 6 Kugeln auf der längern und 3 auf der kürzern Seite, hierauf eine 5te Schichte mit 5 Kugeln auf der längern und 2 auf der kürzern Seite; endlich hierauf noch eine 6te Schichte mit 4 Kugeln auf der längern und einer auf der kürzern Seite.

Wir haben also gerade so viele Schichten als Kugeln auf der kürzern Seite sich finden. Ist daher m die Anzahl der Kugeln auf der längern, n die der Kugeln auf der kürzern Seite, so besteht der Haufen aus n Schichten, in der ersten hat es n Reihen mit je m Kugeln, in der zweiten $n-1$ Reihen mit je $m-1$ Kugeln, in der 3ten $n-2$ Reihen mit je $m-2$ Kugeln u. s. f., in der obersten endlich eine Reihe mit $m-(n-1)=m-n+1$ Kugeln.

Setzen wir daher $m-n=r$, so ist die Anzahl der Kugeln der obersten, aus nur einer Reihe bestehenden Schichte $=$ $r+1$; die zweite Schichte (von oben) enthält dann 2 Reihen, jede mit $r+2$ Kugeln, die 3te 3 Reihen mit je $r+3$ Kugeln u. s. f., endlich die unterste enthält n Reihen mit je $r+n$ Kugeln. Bezeichnet daher S_r die Anzahl aller Kugeln dieses rechteckigen Haufens, so ist

$S_r=(r+1)+2(r+2)+3(r+3)+\ldots n(r+n)$

$S_r=r+2r+3r+4r+\ldots nr+1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots n^2$

$S_r=r(1+2+3+4+\ldots n)+1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots n^2$

oder

$$S_r=\frac{r(n^2+n)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_r=\frac{3r(n^2+n)+n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{oder}$$

$$S_r=\frac{n(n+1)(3r+2n+1)}{6}.$$

β. Ist die Grundfläche des Kugelhaufens quadratisch, so enthält die oberste Schichte nur eine Kugel. Man hat daher in der vorigen Formel nur $r=0$ zu setzen, um die Zahl der in einem solchen Haufen vorkommenden Kugeln zu erhalten, die $=$ $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ wird. Dasselbe ergibt sich übrigens auch unmittelbar aus folgender Betrachtung: Der quadratische Kugelhaufen hat zur Grundfläche eine quadratförmige Kugelschichte; die darauf ruhenden Schichten sind ebenfalls Quadrate, deren jedes auf einer Seite eine Kugel weniger enthält, als die unter ihm liegende Schichte, bis endlich die oberste Schichte nur noch eine Kugel hat. Wenn daher n die Anzahl der Kugeln auf einer Seite der Grundfläche, so ist n^2 die Anzahl der Kugeln der untersten, $(n-1)^2$ die der zweiten, $(n-2)^2$ die der dritten Schichte u. s. f. Bezeichnet daher S_q die Gesammtzahl aller im quadratischen Kugelhaufen befindlichen Kugeln, so ist

$$S_q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

γ. Um bei einer dreiseitigen Kugelpyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, die Anzahl aller Kugeln zu finden, überlegen wir, dass bei der untersten Schichte die Mittelpunkte der äusersten Kugeln ein gleichseitiges Dreieck bilden, dass dann in die leeren Räume der untersten Schichte wieder Kugeln gelegt werden, die als zweite Schichte ein neues gleichseitiges Dreieck bilden, von dessen Seiten jede eine Kugel weniger enthält, als die der untersten Schichte, und dass dann so fortgefahren wird, bis endlich nur noch eine Kugel gelegt werden kann, welche die oberste Schichte bildet.

Die oberste Schichte enthält daher 1 Kugel
„ 2te „ „ „ 3 Kugeln
die 3te enthält eine neue Reihe mit 3 Kugeln, also 6 „
„ 4te „ „ „ „ „ 4 „ „ 10 „
„ 5te „ „ „ „ „ 5 „ „ 15 „
„ 6te „ „ „ „ „ 6 „ „ 21 „
„ 7te „ „ „ „ „ 7 „ „ 28 u. s. f.

Sei endlich n die Anzahl der Kugeln auf einer Seite der untersten Schichte, so enthält diese Schichte n Reihen, von welchen die erste 1, die zweite 2, die 3te 3, die 4te 4, . . . die $n$te n Kugeln fasst. Es ist somit die Anzahl aller in der untersten Schichte enthaltenen Kugeln $= 1+2+3+4+ \ldots n$, welche Summe aber $= S_1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$ ist. Setzt man nun in diesem Ausdruck für n successive 1, 2, 3, 4 etc., so erhält man offenbar die Zahl der in den einzelnen Schichten enthaltenen Kugeln, von der obersten ausgehend. Bezeichnet man also mit S_d die Anzahl sämmtlicher in dieser dreiseitigen Pyramide enthaltenen Kugeln, so ist

$$S_d = \frac{1^2+1}{2} + \frac{2^2+2}{2} + \frac{3^2+3}{3} + \frac{4^2+4}{2} + \frac{5^2+5}{2} + \ldots \frac{n^2+n}{2} \text{ oder}$$

$$S_d = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots n^2}{2} + \frac{1+2+3+4+\ldots+n}{2}$$

$$S_d = \frac{S_2}{2} + \frac{S_1}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2.6} + \frac{n(n+1)}{2.2}$$

$$S_d = \frac{n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)}{12} = \frac{n(n+1)(2n+4)}{12}$$

$$S_d = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Beispiele: Enthielte bei einer dreiseitigen Kugelpyramide eine Seite der Grundfläche 42 Kugeln, so wäre $n=42$ und daher die Zahl aller Kugeln:

$$S_d = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{42.43.44}{6} = 7.43.44 = 13244.$$

Würde aber bei einer Kugelpyramide mit quadratischer Grundfläche eine Seite der Grundfläche 42 Kugeln enthalten, so wäre die Anzahl aller Kugeln

$$S_q = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{42.43.85}{6} = 25585.$$

Wenn endlich gefragt wird: Wie gross ist die Anzahl der Kugeln eines rechteckigen Kugelhaufens, wenn die längere Seite der Basis 45, die kürzere aber 30 Kugeln zählt? so benutzen wir die Formel:

$$S_r = \frac{n(n+1)(3r+2n+1)}{6},$$

worin r die um eine Einheit verminderte Anzahl Kugeln der obersten Reihe, n dagegen die Anzahl der Schichten bezeichnet, die auch gleich ist der Anzahl der Kugeln auf der kleinern Seite der Basis. Nun ist aber, wie wir gesehen haben, $r=m-n$, also hier $r=45-30=15$; somit

$$S_r = \frac{30.31.(3.15+2.30+1)}{6} = \frac{30.31.(45+60+1)}{6}$$

$$S_r = \frac{30.31.3.106}{6} = 16430.$$

Vierter Abschnitt.

Von den imaginären und den complexen Zahlen.

257. Bei Ausziehung gerader Wurzeln aus negativen Zahlen sind wir früher auf die sogenannten imaginären d. h. auf Zahlen gestossen, die sich weder genau, noch näherungsweise durch die positive oder die negative Einheit ausdrücken lassen. So ist $\sqrt{-49}$ weder $+7$, noch -7, noch eine dem absoluten Werthe nach von $+7$ oder -7 verschiedene Zahl. Es ist nun $\sqrt{-49} = \sqrt{49.(-1)} = \pm 7\sqrt{-1}$; ebenso $\sqrt{-5} = \pm\sqrt{5}.\sqrt{-1}$, $\sqrt{-a^2} = \pm a\sqrt{-1}$. Eine solche imaginäre Zahl erscheint demnach als das

Produkt der Grösse $\sqrt{-1}$ mit einer positiven oder negativen, kommensurabeln oder inkommensurabeln Zahl, entsteht somit aus $\sqrt{-1}$ auf dieselbe Weise, wie die reellen Zahlen aus der positiven Einheit. Man fasst daher $\sqrt{-1}$ als neue Einheit auf, nennt sie die imaginäre Einheit und bezeichnet sie nach allgemein üblichem Gebrauch durch i.

Allgemeiner als diese imaginären Zahlen sind diejenigen imaginären Symbole, auf welche wir bei Auflösung der quadratischen Gleichungen kamen und welche die Form haben: $\alpha \pm \beta i$ wo α und β reelle Zahlen bedeuten. Diese Symbole bestehen aus einem reellen und einem ganz imaginären Theil und werden desshalb complexe Zahlen genannt. Die complexe Zahl ist die allgemeinste Zahlform: aus ihr geht die reelle und die imaginäre Zahl durch blosse Spezialisirung hervor. Setzt man nämlich $\beta = 0$ in $\alpha + \beta i$, so erhält man die reelle Zahl α; wird dagegen $\alpha = 0$ gesetzt, so bekommt man die rein imaginäre Zahl βi.

258. Es ist ohne Weiteres klar, dass zwei complexe Zahlen $\alpha + \beta i$ und $\alpha' + \beta' i$ nicht einander gleich sein können, ausser wenn ihre reellen und ihre imaginären Theile einzeln einander gleich sind, dass also die Gleichung

$$\alpha + \beta i = \alpha' + \beta' i$$

zerfällt in die beiden Gleichungen:

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta'.$$

Denn aus $\qquad \alpha + \beta i = \alpha' + \beta' i$ folgt:

$$\alpha - \alpha' + (\beta - \beta')i = 0$$

Da nun der reelle Theil $\alpha - \alpha'$ niemals von dem imaginäre $(\beta - \beta')i$ aufgehoben werden kann, so muss $\alpha - \alpha' = 0$ und $\beta - \beta' = 0$ d. h. es muss $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ sein.

Damit ist auch zugleich gezeigt, dass eine complexe Zahl nur dann $= 0$ sein kann, wenn der reelle Bestandtheil und der Coeffizient von i einzeln $= 0$ sind, dass also die Gleichheit $\alpha + \beta i = 0$ erfordert: $\alpha = 0$ und $\beta = 0$.

Complexe Zahlen, welche, wie $\alpha + \beta i$ und $\alpha - \beta i$, in den reellen Theilen übereinstimmen und sich nur durch das Vorzeichen des imaginären Theiles unterscheiden, werden conjugirte complexe Zahlen genannt, und der absolute Werth der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate des reellen Theiles und des reellen Faktors vom imaginären Theil heisst Modulus der complexen Zahl. So wäre also der

Modul von $3+4i=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

Modul von $7-8i=\sqrt{49+64}=\sqrt{113}$

Modul von $\alpha\pm\beta i=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

Der Modulus einer reellen Zahl ist somit nichts anderes als ihr absoluter Werth.

259. Potenzen der imaginären Einheit.

Es ist $(+\sqrt{-1})^1=+\sqrt{-1}$

$(+\sqrt{-1})^2=-1$, unmittelbar nach der Bedeutung der Wurzelgrösse.

$(+\sqrt{-1})^3=(+\sqrt{-1})^2.(\sqrt{-1})=-\sqrt{-1}$

$(+\sqrt{-1})^4=[(+\sqrt{-1})^2]^2=[-1]^2=+1.$

Alle höhern Potenzen der imaginären Einheit lassen sich auf diese 4 ersten zurückführen. Denn in Bezug auf den Divisor 4 können wir die ganzen Zahlen in 4 Klassen bringen: 1., solche, welche durch 4 theilbar sind, — 2., solche, welche, durch 4 getheilt, den Rest 1, 3., solche, welche, durch 4 getheilt, den Rest 2, und endlich solche, welche, durch 4 getheilt, den Rest 3 liefern. Sie sind somit alle enthalten in den Formen: $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, wo n irgend eine positive ganze Zahl bedeutet. Man hat daher

1. $(+\sqrt{-1})^{4n}=[(+\sqrt{-1})^4]^n=+1$
2. $(+\sqrt{-1})^{4n+1}=(+\sqrt{-1})^{4n}.\sqrt{-1}=+\sqrt{-1}$
3. $(+\sqrt{-1})^{4n+2}=(+\sqrt{-1})^{4n}.(\sqrt{-1})^2=(+1).(-1)=-1$
4. $(+\sqrt{-1})^{4n+3}=(+\sqrt{-1})^{4n}.(\sqrt{-1})^3=(+1).(-\sqrt{-1})=-\sqrt{-1}$

oder

1. $(\sqrt{-1})^{4n}=+1$ 3. $(+\sqrt{-1})^{4n+1}=+\sqrt{-1}$

2. $(+\sqrt{-1})^{4n+2}=-1$ 4. $(+\sqrt{-1})^{4n+3}=-\sqrt{-1}$

d. h. alle geraden Potenzen von $+\sqrt{-1}$ sind reell und zwar $=+1$, wenn der Exponent ein Vielfaches von 4, und $=-1$, wenn der Exponent eine gerade, aber nicht durch 4 theilbare Zahl ist; alle ungeraden Potenzen von $+\sqrt{-1}$ sind imaginär und zwar $=+\sqrt{-1}$, wenn der Exponent, durch 4 getheilt, 1 zum Rest, und $=-\sqrt{-1}$, wenn derselbe, durch 4 getheilt, 3 zum Rest lässt.

260. Bildliche Darstellung der imaginären und der complexen Zahlen.

Obschon die imaginären Zahlen weder durch die positive, noch durch die negative Einheit, weder genau, noch näherungs-

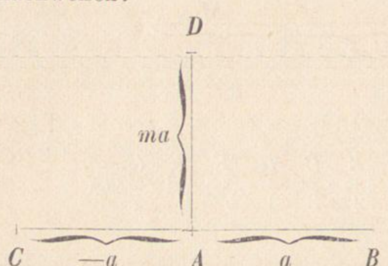
F' $6i$
E' $5i$
D' $4i$
C' $3i$
B' $2i$
A' i
X' —5 —4 —3 —2 —1 O A 1 B 2 C 3 D 4 E 5 F 6 G 7 X
$-i$
$-2i$
$-3i$
$-4i$
$-5i$

weise sich ausdrücken lassen und ihr Auftreten bei der Auflösung der Gleichungen stets auf einen innern Widerspruch und damit auf die Unmöglichkeit der Lösung hindeutet, so ist es doch keineswegs gerechtfertigt, dieselben, wie es früher geschah, als wirklich unmögliche d. h. gar nicht denkbare Zahlen zu betrachten. Mit nicht minderem Recht könnte man schon jede irrationale Zahl, wi $\sqrt{5}$, als unmöglich ansehen, indem es in der That geradezu unmöglich ist, den Werth von $\sqrt{5}$ genau auszudrücken d. h. eine ganze oder gebrochene Zahl ausfindig zu machen, deren Quadrat genau $= 5$ wäre. Wirklich lassen die imaginären Zahlen eben so gut, wie die reellen, eine geometrische Veranschaulichung zu. Denkt man sich nämlich auf einer Geraden XX' irgend einen festen Punkt O als Anfangs- oder Nullpunkt gewählt und trägt von diesem Punkt aus mit ganz beliebiger Zirkelöffnung gleiche Distanzen etwa nach rechts ab, so sind diese vom Nullpunkt aus gezählten Distanzen OA, OB, OC, OD, OE, OF, etc. geometrische Bilder für die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc. und die gleich grossen, nach entgegengesetzter Richtung gezählten Distanzen sind dann die Bilder für die negativen Zahlen —1, —2, —3, —4 etc.;

die einzelnen Punkte A, B, C, D etc. selber aber werden Zahlörter der Zahlen 1, 2, 3, 4 etc. genannt.

In ganz gleicher Weise können wir die imaginären Zahlen geometrisch darstellen als Distanzen vom gleichen Anfangs- oder Nullpunkt aus, aber in einer andern und zwar in einer zur Achse der reellen Zahlen senkrechten Richtung abgetragen.

Die innere Berechtigung hiezu lässt sich folgendermassen nachweisen:

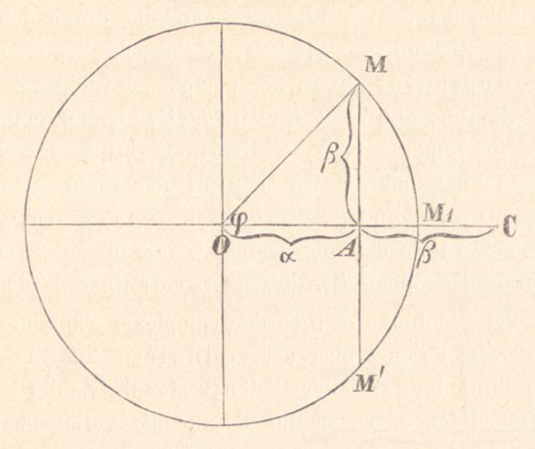


Sei $AB=a$ eine ganz beliebige Strecke, so wird bekanntlich die gleich grosse, direkt entgegengesetzte Strecke AC durch $-a$ bezeichnet. Ihr Ausdruck $-a$ kann analytisch aus a durch Multiplikation mit dem Faktor -1 abgeleitet werden, indess geometrisch die Strecke a durch Drehung um 180^0 in $-a$ übergeführt wird. Es kommt somit die Multiplikation einer Strecke a mit dem Faktor -1 geometrisch einer Drehung derselben um 180^0 gleich, und es entsteht daher die Frage: Wenn wir die Strecke a, statt um 180^0, bloss um 90^0 drehen, sie also in eine zur ersten senkrechte Lage bringen, wie lässt sich dann diese Richtungsänderung analytisch ausdrücken?

Da wollen wir mit m den noch unbekannten Faktor bezeichnen, mit welchem man die Strecke a multipliziren müsste, um die nämliche, auf der ersten senkrecht stehende Strecke zu erhalten, um also a von der Lage AB in die Lage AD überzuführen, so wäre also ma die auf a senkrecht stehende Strecke oder die in die Lage AD übergeführte Strecke AB. Drehen wir die Strecke $AD=ma$ noch einmal um 90^0, bringen sie also in die Lage AC, so haben wir nach der dem m beigelegten Bedeutung diese Drehung des ma durch Multiplikation mit m auszudrücken, so dass $m.ma=m^2a$ der analytische Ausdruck für AC wäre. Allein es ist auch $AC=-a$; somit $m^2a=-a$, $m^2=-1$ und $m=\sqrt{-1}$.

Wenn daher a eine beliebige Strecke, so wäre $a\sqrt{-1}$ oder ai dieselbe, auf der ersten senkrechte Strecke. Indem wir daher auf der zur XX' senkrechten Achse YY' die Distanzen 1, 2, 3, 4 etc. abtragen, bekommen wir in ihren Endpunkten A', B', C', D' etc. die Zahlörter der imaginären Zahlen i, $2i$, $3i$, $4i$ etc. und die gleichen, von O aus nach unten abgetragenen Distanzen

liefern uns geometrische Bilder der negativen imaginären Zahlen $-i$, $-2i$, $-3i$, $-4i$ etc.



Hieraus ergibt sich aber auch sofort die geometrische Bedeutung der complexen Zahl $\alpha+\beta i$. Offenbar würde die Strecke $\alpha+\beta$ erhalten, wenn wir auf der X Achse von O aus zuerst $OA=\alpha$ abtrügen und dann von A aus noch $AC=\beta$. Allein wir sollen von A aus nicht um β, sondern um βi fortschreiten; wir müssen also entweder die von A aus abgetragene Strecke $AC=\beta$ noch um 90^0 drehen, also in die Lage AM bringen, oder dann gleich von A aus, statt in der X Achse um β vorwärts zu gehen, um die Distanz β in einer zur X Achse senkrechten Richtung fortschreiten. Handelt es sich um $\alpha-\beta i$, so müsste die Distanz β von A aus, statt nach oben, nach unten abgetragen werden. Es wäre demnach der Punkt M der Zahlort der complexen Zahl $\alpha+\beta i$ und M' der Zahlort der complexen Zahl $\alpha-\beta i$. Die complexe Zahl $\alpha+\beta i$ selber aber wird durch die gebrochene Linie OAM repräsentirt. Wir haben also kurz das Resultat: Der Zahlort der complexen Zahl $\alpha+\beta i$ ist nichts anderes als ein Punkt in der Ebene, dessen rechtwinklige Coordinaten α und β sind.

Nun könnten wir zum Punkt M statt mittelst rechtwinkliger Coordinaten auch durch die Polarkoordinaten $OM=\varrho$ und Winkel $MOX=\varphi$ gelangen, d. h. dadurch, dass wir von O aus einen Strahl zögen, der mit der positiven Richtung der reellen Zahlenachse den Winkel φ bildet, und dann auf demselben die Distanz $OM=\varrho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ = dem Modulus der complexen Zahl abtrügen. Ein geradliniger Weg von der Länge $\varrho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ von O aus un-

ter dem Winkel φ führt uns also ebenfalls zum Zahlort der complexen Zahl $\alpha+\beta i$ und wir können daher diesen geradlinigen Weg OA, bei welchem aber die Länge ϱ und die durch den Winkel φ bestimmte Richtung zugleich in Betracht kommen, ebenfalls als Repräsentanten der complexen Zahl $\alpha+\beta i$ betrachten. Das gibt uns nun ein Mittel in die Hand, die complexe Zahl $\alpha+\beta i$ auf eine andere, für die Rechnung bequemere Form zu bringen. Man hat nämlich, wie sich aus der Figur sofort erkennen lässt: $\alpha=\varrho\cos\varphi$ und $\beta=\varrho\sin\varphi$; daher $\alpha+\beta i=\varrho\cos\varphi+\varrho i\sin\varphi$ $=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, so dass die complexe Zahl in ein Produkt von zwei Faktoren verwandelt ist, dessen erster Faktor ϱ nichts anderes ist als der Modulus $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ der complexen Zahl, dessen zweiter Faktor $\cos\varphi+i\sin\varphi$ aber der reduzirte Ausdruck genannt wird. Der Winkel φ, den der Radius vector des Zahlortes mit der festen Achse bildet oder die ihn bestimmende Bogenzahl heisst auch das Argument des reduzirten Ausdruckes.

Die absolute Länge von OM ist $=\varrho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$; dagegen ist der Werth von OM mit Rücksicht auf Grösse und Richtung zugleich $=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Fällt $OM=\varrho$ mit der X Achse zusammen d. h. ist $\varphi=0$, so wird die Zahl $\alpha+\beta i=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ durch ϱ dargestellt; für $\varphi=90^0$ durch ϱi, für $\varphi=180^0$ durch $-\varrho$, für einen ganz beliebigen Winkel φ aber durch $\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Man hat also, um den geometrischen Repräsentanten der complexen Zahl $\alpha+\beta i$ zu erhalten, den Abstand ihres Zahlortes vom Nullpunkt mit 1, i, -1, $-i$ oder 1 zu multipliziren, je nachdem der Leitstrahl desselben mit der Richtung der positiven Zahlenachse einen Winkel von 0, 90, 180, 270 oder 360 Graden bildet, und mit $\cos\varphi+i\sin\varphi$, wenn derselbe mit der X Achse den Winkel φ bildet. Es ist somit $\cos\varphi+i\sin\varphi$ die Zahl, mit der man eine Strecke ϱ zu multipliziren hat, um sie in eine Lage überzuführen, die mit der ersten den Winkel φ einschliesst. Man kann daher den Faktor $\cos\varphi+i\sin\varphi$ auch den Richtungs- oder Drehungskoeffizienten heissen. In der That geht $\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ der Reihe nach in ϱ, ϱi, $-\varrho$, $-\varrho i$ und ϱ über, wenn man successive $\varphi=0^0$, 90^0, 180^0, 270^0 und 360^0 setzt.

Anmerkung. Es scheint uns hier der Ort, auf eine zwar häufig vorkommende, aber nichts desto weniger ganz unrichtige und den denkenden Leser sehr störende Ausdrucksweise aufmerksam zu machen, welche die complexen Zahlen als durch Punkte

in der Ebene darstellbar erklärt. Der Punkt als solcher kann, wo er auch in der Ebene liegen mag, nie das geometrische Bild einer andern Zahl, als der absoluten Null sein. Wie das geometrische Bild der reellen Zahl 3 unbestritten nur das Dreifache der die Einheit vorstellenden, übrigens ganz willkürlich gewählten Strecke ist, so können auch die rein imaginäre und die complexe Zahl zu ihrem geometrischen Bilde nur eine Linie und durchaus nicht einen Punkt haben. Nicht die Zahlörter der Zahlen 2, $3i$, $4+5i$ repräsentiren daher die genannten Zahlen, sondern ihre Abstände vom Nullpunkt, nach Grösse und Richtung zugleich aufgefasst, sind die Repräsentanten oder die geometrischen Bilder der Zahlen 2, $3i$, oder $4+5i$, und es ist daher durchaus nicht erlaubt, von Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division etc. von Punkten zu sprechen.

261. Wenn wir nun die complexen Zahlen denselben Rechnungsoperationen unterwerfen, wie die reellen, so bekommen wir zunächst:

1. $(\alpha+\beta i)+(\alpha'+\beta' i)=\alpha+\beta i+\alpha'+\beta' i=(\alpha+\alpha')+(\beta+\beta')i$
2. $(\alpha+\beta i)-(\alpha'+\beta' i)=\alpha+\beta i-\alpha'-\beta' i=(\alpha-\alpha')+(\beta-\beta')i$

d. h. sowol die Summe als die Differenz zweier complexen Zahlen ist wieder eine complexe Zahl.

Für die Multiplikation, Division, Potenzirung und Wurzelausziehung ist die zweite Form der complexen Zahl viel bequemer. Man hat einmal:

1. $\varrho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot\varrho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\ldots\varrho_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n)$
$=\varrho_1\varrho_2\varrho_3\ldots\varrho_n(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\ldots(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n)$

2. $\dfrac{\varrho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{\varrho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\dfrac{\varrho_1}{\varrho_2}\cdot\left(\dfrac{\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2}\right)$

3. $[\varrho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)]^m=\varrho_1^m\ (\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)^m$

so dass wir uns also nur noch mit der Multipikation, Division und Potenzirung von reduzirten Ausdrücken zu befassen haben.

262. Lehrsatz: *Reduzirte Ausdrücke werden mit einander multiplizirt, indem man nur ihre Bogenzahlen (Argumente) addirt und die Summe als Bogenzahl des reduzirten Ausdruckes beibehält.*

Haben wir zunächst zwei reduzirte Ausdrücke $\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1$ und $\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2$ zu multipiliziren, so kommt:

$$(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=\cos\varphi_1\ \cos\varphi_2+i\sin\varphi_1\ \cos\varphi_2$$
$$+i\cos\varphi_1\ \sin\varphi_2-\sin\varphi_1\ \sin\varphi_2$$

oder

$$=\cos\varphi_1\ \cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i\ [\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2]$$
$$=\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\ \sin(\varphi_1+\varphi_2).$$

Der Satz gilt also einmal für zwei Faktoren. Haben wir ein Produkt aus 3 Faktoren, so ist $(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_5 + i\sin\varphi_2)$ $(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3)$ zunächst gleich dem Produkt der zwei ersten multiplizirt mit dem dritten, also =

$$[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)](\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3)$$

Hier aber haben wir wieder nur zwei Faktoren, für welche der Satz bereits bewiesen; daher das obige Produkt

$$= \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3).$$

Man kann nun leicht zeigen, dass wenn dieser Satz für irgend eine Anzahl z. B. n Faktoren gilt, er auch noch gelten muss für die um 1 vermehrte Anzahl von Faktoren.

In der That: Setzen wir zur Abkürzung

$$(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\ldots(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_u) = P_n$$

$$(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\ldots\ldots(\cos\varphi_{n+1} + i\sin\varphi_{n+1}) = P_{n+1}$$

und $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots \varphi_n = \Phi_n$, und nehmen wir für einen Augenblick an, dass

$$P_n = \cos\Phi_n^x + i\sin\Phi_n, \text{ dann ist } P_{n+1} =$$

$P_n \cdot (\cos\varphi_{n+1} + i\sin\varphi_{n+1}) = \cos(\Phi_n + i\sin\Phi_n)(\cos\varphi_{n+1} + i\sin\varphi_{n+1})$, was aber nach dem bereits Bewiesenen

$= \cos(\Phi_n + \varphi_{n+1}) + \sin(\Phi_n + \varphi_{n+1})$ oder

$= \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots \varphi_n + \varphi_{n+1}) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots \varphi_n + \varphi_{n+1})$

d. h. sobald der Satz für n Faktoren gilt, so muss er auch noch für $n+1$ Faktoren gelten. Für 2 und 3 Faktoren ist er aber direkt bewiesen worden; daher gilt er allgemein.

Zusatz: Hat man zwei reduzirte Ausdrücke zu multipliziren, deren Bogenzahlen gerade entgegengesetzt sind, wie $\varphi + i\sin\varphi$ mit $\cos - \varphi + i\sin - \varphi$, so berücksichtigen wir, dass $\cos - \varphi = \cos\varphi$ und $\sin - \varphi = -\sin\varphi$; somit

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos - \varphi + i\sin - \varphi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$
$$= \cos^2\varphi - i^2\sin^2\varphi = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

263. Lehrsatz. *Reduzirte Ausdrücke werden durch einander dividirt, indem man die Bogenzahl des Divisors von der Bogenzahl des Dividenden subtrahirt und die Differenz zur Bogenzahl des Quotienten macht.*

Sei $\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1$ zu dividiren durch $\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2$, so können wir den Quotienten zunächst in Bruchform darstellen und dann noch Zähler und Nenner multipliziren mit der Differenz der Grössen, deren Summe wir im Nenner haben. Wir bekommen so:

$$\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}$$

$$= \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{(\cos\varphi_2)^2 - (i\sin\varphi_2)^2}$$

$$= \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\sin\varphi_1 + i[\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2]}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi}$$

$$= \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

264. Lehrsatz: *Ein reduzirter Ausdruck wird mit einer beliebigen Zahl m potenzirt, indem man nur die Bogenzahl mit m multiplizirt und das Produkt als Bogenzahl des reduzirten Ausdruckes beibehält.* Es ist also

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + i\sin m\varphi$$

Für den Fall, dass m eine positive ganze Zahl, folgt der Satz unmittelbar aus 262; denn man hat dann

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \ldots \ldots (m\,\text{mal})$$
$$= \cos(\varphi + \varphi + \varphi + \ldots) + i\sin(\varphi + \varphi + \varphi + \ldots)$$
$$= \cos m\varphi + i\sin m\varphi.$$

So lange nun der Exponent m eine positive ganze Zahl, gilt die obige Formel für ganz beliebige Bogenzahlen φ, gilt also auch, wenn wir als Bogenzahl $\frac{\varphi}{m}$ wählen. Daher hat man auch:

$$\left(\cos\frac{\varphi}{m} + i\sin\frac{\varphi}{m}\right)^m = \cos m\frac{\varphi}{m} + i\sin m\frac{\varphi}{m} = \cos\varphi + i\sin\varphi;$$

daher $\cos\frac{\varphi}{m} + i\sin\frac{\varphi}{m} = \sqrt[m]{\cos\varphi + i\sin\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{1}{m}}$,

also auch umgekehrt: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{\varphi}{m} + \sin\frac{\varphi}{m}$

Der Satz gilt also auch für solche gebrochenen Exponenten, deren Zähler $= 1$.

Ist nun der Exponent ein beliebiger Bruch $\frac{n}{m}$, so kann man diesen als Produkt aus $\frac{1}{m}$ in n auffassen und hat daher

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{n}{m}} = \left[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{1}{m}}\right]^n = \left[\cos\frac{\varphi}{m} + i\sin\frac{\varphi}{m}\right]^n$$

und da hier der Exponent n wieder eine ganze positive Zahl, hat man:

$$\left[\cos\frac{\varphi}{m} + i\sin\frac{\varphi}{m}\right]^n = \cos\frac{n}{m}\varphi + i\sin\frac{n}{m}\varphi;\ \text{also}$$

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{n}{m}} = \cos\frac{n}{m}\varphi + i\sin\frac{n}{m}\varphi$, womit der Satz für beliebige positive Exponenten bewiesen ist.

Sei endlich der Exponent eine negative, ganze oder gebrochene Zahl, so haben wir zunächst:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-m} = \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m} = \frac{1}{\cos m\varphi + i\sin m\varphi}$$

$$= \frac{\cos m\varphi - i\sin m\varphi}{\cos^2 m\varphi - i^2\sin^2 m\varphi} = \frac{\cos m\varphi - i\sin m\varphi}{1}$$

$$= \cos m\varphi - i\sin m\varphi = \cos -m\varphi + i\sin -m\varphi.$$

Somit wäre der Satz (Moivre'sche Formel) für beliebige Exponenten bewiesen, da — wie früher in No. 171 gezeigt wurde — die für kommensurable Zahlen bewiesenen Operationen auch für inkommensurable Zahlen gelten.

265. Wir haben in No. 258 gesehen, dass $\alpha + \beta i$ nur $= 0$ sein kann, wenn $\alpha = 0$ und $\beta = 0$, so dass dann auch der Modulus $\varrho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 0$ d. h.: Damit eine complexe Zahl $= 0$ werde, muss ihr Modul $= 0$ sein. Umgekehrt wenn der Modulus einer complexen Zahl $= 0$, so muss sie selber $= 0$ sein; denn aus $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 0$ folgt: $\alpha^2 = 0$, $\beta^2 = 0$ oder $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

266. Ein Produkt mehrerer complexer Faktoren wird = Null, sobald ein Faktor desselben = 0 und umgekehrt kann ein Produkt complexer Faktoren nicht = 0 werden, wenn nicht einer seiner Faktoren = 0.

Sei der Faktor $\alpha + \beta i = 0$, indess alle übrigen Faktoren von Null verschieden seien; das Produkt dieser letzten ist dann eine Complexe von der Form $A + Bi$; daher das ganze Produkt

$$= 0.(A + Bi) = 0.A + 0.Bi = 0.$$

Um die umgekehrte Behauptung einzusehen, wollen wir annehmen, alle auf $\alpha + \beta i$ folgenden Faktoren seien von Null verschieden, so ist ihr Produkt wieder eine Complexe von der Form $A + Bi$; daher das ganze Produkt $= (\alpha + \beta i)(A + Bi)$.

Ist nun dieses Produkt $= 0$, so kann in der Gleichung

$$(\alpha + \beta i)(A + Bi) = 0$$

auf beiden Seiten durch den von Null verschiedenen Faktor $A + Bi$ dividiren und bekommt dann

$$\alpha + \beta i = 0, \text{ w. z. b. w.}$$

267. Quadratwurzel aus einem Binom von der Form $A + Bi$.

Wir haben in Nro. 150 die Quadratwurzel aus einem Binom von der Form $A \pm \sqrt{B}$ gezogen und gefunden, dass

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

Ersetzen wir nun hier $\sqrt{B}$ durch $B\sqrt{-1}$ oder Bi oder B durch $B^2 i^2 = -B^2$, so geht die Gleichung über in

$$\sqrt{A \pm Bi} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 + B^2}}{2}}$$

Da aber $\sqrt{A^2 + B^2} > A$, so ist $\sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 + B^2}}{2}}$ stets imaginär, und um diese imaginäre Grösse auf die gewöhnliche Form zu bringen, setzen wir

$$\frac{A - \sqrt{A^2 + B^2}}{2} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2} - A}{2} \cdot (-1)$$

daher $\sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{A^2 + B^2} - A}{2}} . \sqrt{-1} = i\sqrt{\frac{\sqrt{A^2 + B^2} - A}{2}}$

Wir bekommen daher die Gleichung:

$$\sqrt{A \pm Bi} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{A^2 + B^2} - A}{2}}.$$

Fünfter Abschnitt.

Allgemeine Auflösung der Gleichungen des dritten Grades.

---

268. Bestimmung der cubischen Wurzeln der Einheit. Wir haben früher aus Analogie geschlossen, dass die $m$te Wurzel aus einer Zahl m verschiedene Werthe haben muss und wollen nun versuchen, die 3 Cubikwurzeln der Einheit zu bestimmen. Bezeichnen wir mit x jede Zahl, die, zur 3ten Potenz erhoben, 1 gibt, so müsste also $x^3 = 1$ oder $x^3 - 1 = 0$ sein. Es ist aber $x^3 - 1$ theilbar durch $x - 1$ und der Quotient $= x^2 + x + 1$ (Nro. 45). Man hat daher die identische Gleichung: $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$; somit kann man die Gleichung $x^3 - 1 = 0$ (1) ersetzen durch: $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ (2) welche sogleich zerfällt in die zwei andern:

$$\alpha., \quad x - 1 = 0 \text{ und } \beta., \quad x^2 + x + 1 = 0.$$

Aus (α) folgt $x = 1$; aus (β): $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$. Bezeichnen

wir daher mit x_1, x_2 und x_3 die 3 Wurzeln der Gleichung (2), so ist

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \text{ und } x_3 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Die Einheit hat also ausser 1 noch 2 complexe Cubikwurzeln. Wirklich überzeugt man sich leicht, dass

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = 1 \text{ und } \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = 1$$

und findet überdiess, dass $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ und $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ d. h. dass von den zwei complexen Cubikwurzeln der Einheit eine jede das Quadrat der andern ist. Bezeichnet daher α die eine, so ist die andere $= \alpha^2$.

269. Bestimmung der cubischen Wurzeln aus einer beliebigen reellen Zahl. Bezeichnet wieder x jede Zahl, welche, zur 3ten Potenz erhoben, N gibt, so müsste also $x^3 = N$ oder $x^3 - N = 0$ (1) sein. Ob nun N positiv oder negativ sei, stets existirt eine reelle Zahl, die, zur 3ten Potenz erhoben, N gibt. Wenn n diese durch unmittelbare Wurzelausziehung erhältliche 3te Wurzel von N bedeutet, so könnte man die Gleichung (1) auch so schreiben: $x^3 - n^3 = 0$ (1).

Nun ist $x^3 - n^3$ wieder theilbar durch $x - n$ und der Quotient $= x^2 + nx + n^2$; daher $x^3 - n^3 = (x-n)(x^2+nx+n^2)$ und man hat somit statt (1) die Gleichung

$$(x-n)(x^2+nx+n^2) = 0 \quad (2),$$

welche sofort zerfällt in

$$1.,\ x - n = 0 \text{ und } 2.,\ x^2 + nx + n^2 = 0.$$

Aus der 1sten folgt $x = n$; aus der 2ten:

$$x = -\frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} - n^2} = -\frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{-3n^2}{4}} = -\frac{n}{2} \pm \frac{n}{2}\sqrt{-3}.$$

Die 3 cubischen Wurzeln von $N = n^3$ wären demnach:

$$1.,\ x_1 = n,\ 2.,\ x_2 = n\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{3}\right) \text{ und } 3.,\ x_3 = n\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$$

$$\text{oder } x_1 = n,\ x_2 = n\alpha \text{ und } x_3 = n\alpha^2.$$

d. h. die 3 Cubikwurzeln einer Zahl N werden erhalten, wenn man die durch unmittelbare Wurzelausziehung gefundene 3te Wurzel mit den 3 cubischen Wurzeln der Einheit multiplizirt.

270. Jede Gleichung 3ten Grades ist in der allgemeinen Form $Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ enthalten, worin die Coeffizienten einzelner auf das erste folgender Glieder auch $=0$ sein können. Es sind daher folgende spezielle Fälle möglich:

1. $D=0$ also $Ax^3+Bx^2+Cx=0$
2. $C=0$ „ „ $Ax^3+Bx^2+D=0$
3. $B=0$ „ „ $Ax^3+Cx+D=0$
4. $D=C=0$, „ $Ax^3+Bx^2=0$
5. $D=B=0$, „ $Ax^3+Cx=0$
6. $B=C=0$, „ $Ax^3+D=0$
7. $B=C=D=0$, $Ax^3=0$

Von diesen lassen sich 1, 4 und 5 sofort in zwei Gleichungen zerlegen, deren eine vom 1sten, die andere vom 2ten Grade ist. So ist

$Ax^3+Bx^2+Cx=x(Ax^2+Bx+C)=0$, welche zerfällt in
$x=0$ und $Ax^2+Bx+C=0$.

Ebenso $Ax^3+Bx^2=x^2(Ax+B)=0$, die zerfällt in
$x^2=0$ und $Ax+B=0$.

Endlich $Ax^3+Cx=x(Ax^2+B)=0$, welche in
$x=0$ und $Ax^2+B=0$ zerfällt.

Die Gleichung (6) ist eine reine cubische Gleichung, deren Wurzeln sich nach Nro. 269 bestimmen lassen.

Die Gleichung $Ax^3=0$ gibt $x^3=0$, also 3 Wurzeln alle $=0$. Somit bleiben noch übrig

$Ax^3+Bx^2+D=0$, $Ax^3+Cx+D=0$ und die allgemeine Gleichung $Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$, in welcher keiner der Coeffizienten gleich Null ist. Wir werden zeigen, wie man durch Wegschaffung des Gliedes mit x^2 zwei von diesen Gleichungen auf die Gleichung $Ax^3+Cx+D=0$ reduziren kann.

Betrachten wir die Gleichung $Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$, in der sämmtliche Coeffizienten von Null verschieden sind, so können wir dieselbe durch Division mit dem Coeffizienten des ersten Gliedes auf die Form $x^3+ax^2+bx+c=0$ bringen. Setzen wir nun $x=y-\frac{a}{3}$, so bekommen wir:

$$x^3=\left(y-\frac{a}{3}\right)=y^3-ay^2+\frac{a^2y}{3}-\frac{a^3}{27}$$

$$ax^2=a\left(y-\frac{a}{3}\right)^2=ay^2-\frac{2}{3}a^2y+\frac{a^3}{9}$$

$$bx=b\left(y-\frac{a}{3}\right)=by-\frac{ab}{3}$$

$$c=c=c$$

daher $x^3+ax^2+bx+c=y^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)y+\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right)$

und es geht somit unsere Gleichung über in

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0,$$

eine Gleichung von der Form $x^3+Px+Q=0$. Natürlich lässt sich auch die Gleichung $x^3+ax^2+c=0$ auf diese Form bringen, so dass wir uns also nur mit der Gleichung $x^3+Px+Q=0$ zu beschäftigen brauchen. Wir wollen nun, um die im Laufe der Entwicklung entstehenden Brüche zu vermeiden, $P=3p$ und $Q=2q$ setzen d. h. die Gleichung in der Form $x^3+3px+2q=0$ betrachten, wo also p den 3ten Theil des Coeffizienten von x und q die Hälfte des absoluten Gliedes bedeutet und überdiess p und q als reelle Zahlen vorausgesetzt werden.

271. Um die Gleichung $x^3+3px+2q=0$ (1) aufzulösen, setzen wir $x=a+b$ d. h. gleich der Summe zweier noch unbestimmt gelassenen Grössen, bilden dann eine Gleichung 3ten Grades, welche die Wurzel $x=a+b$ zulässt und suchen dann a und b so zu bestimmen, dass diese zweite Gleichung mit (1) identisch wird. Durch Cubirung von $x=a+b$ kommt:

$x^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ oder $x^3-3a^2b-3ab^2-a^3-b^3=0$

oder $x^3-3ab(a+b)-a^3-b^3=0$ oder, da $a+b=x$:

$$x^3-3abx-(a^3+b^3)=0 \quad (2)$$

Damit diese mit (1) identisch werde, muss

$$ab=-p \text{ und } a^3+b^3=-2q \quad (3)$$

sein. Indem wir die erste dieser Gleichungen cubiren, bekommen wir zur Bestimmung von a^3 und b^3 statt (3) die 2 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a^3b^3 &= -p^3 \\ a^3+b^3 &= -2q \end{aligned}\right\} (4)$$

Wir kennen also die Summe und das Produkt der beiden Grössen a^3 und b^3, könnten sie demnach finden durch Auflösung einer quadratischen Gleichung, welche $2q$ zum Coeffizienten des zweiten Gliedes und $-p^3$ zum absoluten Gliede hätte. Da wir aber die Summe a^3+b^3 bereits kennen, so können wir auch noch die Differenz suchen, indem wir die zweite Gleichung unter (4) quadriren und von dem Resultat das 4fache der ersten subtrahiren. Wir bekommen so:

$$a^6-2a^3b^3+b^6=4q^2+4p^3$$

somit $a^3-b^3=2\sqrt{q^2+p^3}$ und haben

also: $\alpha.$, $a^3+b^3=-2q$

$\beta.$, $a^3-b^3=2\sqrt{q^2+p^3}$, woraus folgt:

$$a^3=-q+\sqrt{q^2+p^3}$$

$$b^3 = -q - \sqrt{q^2+p^3} \text{ und daher}$$

$$a = \sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}$$

$$b = \sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}} \text{ ; somit}$$

$$x = a+b = \sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}} + \sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}},$$

welches Resultat unter dem Namen der Cardan'schen Formel bekannt ist.

272. Nach No. 269 hat die 3te Wurzel aus einer Grösse 3 verschiedene Werthe, die man erhält, wenn man den durch unmittelbare Wurzelausziehung gefundenen Werth mit den 3 cubischen Wurzeln der Einheit multiplizirt. Bezeichnen wir mit A und B die durch direkte Wurzelausziehung erhältlichen Werthe von a und b, so wären die Werthe

von a : A, $A\alpha$, $A\alpha^2$

die von b : B, $B\alpha$ $B\alpha^2$

und wenn wir nun jeden Werth von a mit jedem Werth von b verbinden, so bekommen wir für x folgende 9 Werthe:

1., $x = A+B$	4., $x = A\alpha+B$	7., $x = A\alpha^2+B$
2., $x = A+B\alpha$	5., $x = A\alpha+B\alpha$	8., $x = A\alpha^2+B\alpha$
3., $x = A+B\alpha^2$	6., $x = A\alpha+B\alpha^2$	9., $x = A\alpha^2+B\alpha^2$

Eine Gleichung dritten Grades lässt aber nur 3 Wurzeln zu; es frägt sich also: 1., woher kommt es, dass wir scheinbar 9 Auflösungen bekommen und 2., welche derselben genügen unserer Gleichung?

Es waren a und b so zu bestimmen, dass sie den 2 Gleichungen (3) genügten. Statt dieser wurden aber die Gleichungen (4) benutzt, deren erste durch Cubirung der Gleichnng $ab = -p$ entstand. Nun könnte aber $a^3b^3 = -p^3$ ebenso gut durch Cubirung einer der zwei Gleichungen $ab = -p\alpha$ und $ab = -p\alpha^2$ entstanden sein. Indem wir also statt der Gleichungen (3) die Gleichungen (4) benutzten, bekamen wir alle Werthe von a und b, welche ausser der Gleichung $a^3+b^3 = -2q$ noch einer der 3 Gleichungen: $ab = -p$, $ab = -p\alpha$ und $ab = -p\alpha^2$ genügen, wodurch die Zahl der Werthe von x verdreifacht wurde.

Wir haben nun bloss diejenigen Werthe von a und b zu benutzen, welche ausser der Bedingung $a^3+b^3 = -2q$ noch der Bedingung $ab = -p$ genügen, deren Produkt also reell ausfällt und das ist bloss bei dem 1sten, 6ten und 8ten der obigen Werthe von x der Fall. Wir bekommen also:

1., $x_1 = A+B$, 2., $x_2 = A\alpha+B\alpha^2$ und 3., $x_3 = A\alpha^2+B\alpha$

und wenn wir jetzt für α und α^2 noch ihre Werthe einführen, so finden wir:

1. $x_1 = A + B$

2. $x_2 = A\alpha + B\alpha^2 = A\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) + B\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) =$
$$-\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\sqrt{-3}$$

3. $x_3 = A\alpha^2 + B\alpha = A\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) + B\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) =$
$$-\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\sqrt{-3}$$

wobei also A und B die durch direkte Wurzelausziehung erhältlichen Werthe von a und b oder die Wurzelgrössen

$$A = \sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}} \text{ und } B = \sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}$$

in ihrem arithmetischen Sinn bedeuten.

273. Fassen wir diese Werthe von A und B in's Auge, so bemerken wir, dass das Vorzeichen der Grösse q^2+p^3 unter dem Quadratwurzelzeichen entscheidet, ob $\sqrt{q^2+p^3}$ und damit A und B selber reell oder imaginär ausfalle. Wir wollen daher nach einander die Fälle prüfen, wo

$$1., \; q^2+p^3>0 \quad 2., \; q^2+p^3=0 \text{ und } 3., \; q^2+p^3<0$$

Ist 1., $q^2+p^3>0$, so ist $\sqrt{q^2+p^3}$ reell und da wir $\sqrt{q^2+p^3}$ bloss in eindeutigem Sinne nehmen, positiv; somit werden die Grössen $-q+\sqrt{q^2+p^3}$ und $-q-\sqrt{q^2+p^3}$ jedenfalls reell, entweder positiv oder negativ ausfallen; daher werden auch die 3ten Wurzeln daraus d. h. A und B selber reell sein. Es ist somit die erste Wurzel $x_1 = A+B$ jedenfalls reell; dagegen werden die beiden andern Wurzeln x_2 und x_3 imaginär sein, weil zu dem reellen Theil $-\frac{A+B}{2}$ noch der imaginäre Bestandtheil $\frac{A-B}{2}\sqrt{-3}$ hinzukommt.

Ist 2., $q^2+p^3=0$, so verschwindet $\sqrt{q^2+p^3}$ und es reduziren sich sowol A als B auf $\sqrt[3]{-q}$. Es wird daher $A = B$ und somit $x_1 = A+B = 2\sqrt[3]{-q}$. Der imaginäre Bestandtheil von x_2 und x_3, nämlich $\frac{A-B}{2}\sqrt{-3}$ fällt weg und man bekommt $x_2 = x_3 = -\frac{A+B}{2}$ $= -A = -\sqrt[3]{-q}$.

Ist 3., endlich $q^2+p^3<0$, also negativ, was, da q^2 ausschliesslich positiv, nur möglich ist, wenn p negativ, so müssen A

und B imaginär ausfallen und es erscheinen dann alle 3 Wurzeln x_1, x_2 und x_3 in imaginärer Form. Nun können aber, wie sich später zeigen wird, die imaginären Wurzeln immer nur paarweise vorkommen; es muss also von den 3 Wurzeln x_1, x_2 und x_3 jedenfalls eine reell sein; ja es stellt sich sogar heraus, dass gerade in diesem 3ten Fall, wo die Cardan'sche Formel alle 3 Wurzeln in imaginärer Form liefert, die sämmtlichen Wurzeln reell sein müssen. Das lässt sich schon zum Voraus folgendermassen einsehen: Es muss jedenfalls Gleichungen des 3ten Grades geben, deren sämmtliche Wurzeln reell und ungleich sind; denn setzen wir z. B. $(x-1)(x-5)(x-7)=0$, so liefert die Ausführung der Multiplikation eine Gleichung 3ten Grades mit den Wurzeln 1, 5 und 7. Da nun im ersten Fall, wo $q^2+p^3>0$, nur eine Wurzel reell, die beiden andern aber imaginär sind, im 2ten Fall aber, wo $q^2+p^3=0$, zwar alle 3 Wurzeln reell, aber zwei davon einander gleich sind, so lässt sich schon daraus erkennen, dass im 3ten Fall, wo $q^2+p^3<0$, die Wurzeln reell und ungleich werden. Indessen lässt sich das auch direkte darthun. Die Wurzel $x_1=A+B$ wird jedenfalls einmal reell, sonst müssten geradezu alle 3 Wurzeln imaginär ausfallen, was unmöglich ist. Man darf daher nur noch zeigen, dass der in x_2 und x_3 vorkommende Bestandtheil $\frac{A-B}{2}\sqrt{-3}$ reell sein muss. Nun ist A^3-B^3 theilbar durch $A-B$ und der Quotient $= A^2+AB+B^2$; daher auch

$$A-B=\frac{A^3-B^3}{A^2+AB+B^2}=\frac{A^3-B^3}{A^2+2AB+B^2-AB}=\frac{A^3-B^3}{(A+B)^2-AB}$$

Da aber $A+B=x_1$, und $AB=-p$, so hat man

$A-B=\frac{A^3-B^3}{x_1^2+p}$ und weil $A^3=-q+\sqrt{q^2+p^3}$ und $B^3=-q-\sqrt{q^2+p^3}$, so findet man

$$A-B=\frac{2\sqrt{q^2+p^3}}{x_1^2+p}\text{; daher }\frac{A-B}{2}=\frac{\sqrt{q^2+p^3}}{x_1^2+p};$$

$$\text{somit }\frac{A-B}{2}\sqrt{-3}=\frac{\sqrt{q^2+p^3}}{x_1^2+p}\cdot\sqrt{-3}=\frac{\sqrt{-3(q^2+p^3)}}{x_1^2+p}.$$

Nun ist aber $q^2+p^3<0$ und somit $-3(q^2+p^3)$ positiv und daher auch der Bestandtheil $\frac{A-B}{2}\sqrt{-3}$ reell. Trotzdem können diese 3 reellen Wurzeln mittelst der Cardan'schen Formel nicht gefunden werden; sie dient also bloss für die beiden ersten Fälle,

in welchen entweder nur **eine** Wurzel reell ist oder dann zwar alle 3 Wurzeln reell, aber zwei davon einander gleich sind.

Beispiel. Sei $x^3+12x+63=0$ die aufzulösende Gleichung, so zeigt die Vergleichung mit $x^3+3px+2q=0$, dass $p=\frac{12}{3}=4$ und $q=\frac{63}{2}$; daher

$$q^2+p^3=(\tfrac{63}{2})^2+4^3=\tfrac{3969}{4}+64=\tfrac{4225}{4};$$

$$\sqrt{q^2+p^3}=\frac{\sqrt{4225}}{2}=\frac{65}{2},$$

daher $A=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}=\sqrt[3]{-\frac{63}{2}+\frac{65}{2}}=\sqrt[3]{\frac{2}{2}}=1$

$$B=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}=\sqrt[3]{-\tfrac{63}{2}-\tfrac{65}{2}}=\sqrt[3]{-\tfrac{128}{2}}=\sqrt[3]{-64}=-4.$$

Somit $x_1=A+B=1-4=-3$

$$x_2=-\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\sqrt{-3}=-\frac{1-4}{2}+\frac{1+4}{2}\sqrt{-3}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{-3}$$

$$x_3=-\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\sqrt{-3}=-\frac{1-4}{2}-\frac{1+4}{2}\sqrt{-3}=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\sqrt{-3}$$

274. Die Grösse $\sqrt{q^2+p^3}$ wird zuweilen irrational, während $A=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}$ selber doch so zerlegbar ist, dass $x_1=A+B$ rational ausfällt. Man hat alsdann einen Ausdruck von der Form $\sqrt[3]{A\pm\sqrt{B}}$, wo möglich, auf ein Binom zu reduziren. Dass das zu suchende Binom nicht aus Wurzelgrössen 2ten Grades zusammengesetzt sein, also nicht die Form $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ haben kann, erkennt man daraus, dass $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^3$ aus lauter irrationalen Theilen besteht; dagegen ist $(a\pm\sqrt{b})^3$ aus rationalen und irrationalen Theilen zusammengesetzt, wird also von der Form $A\pm\sqrt{B}$ sein. Wir setzen daher

$$\sqrt[3]{A\pm\sqrt{B}}=a\pm\sqrt{b}$$

und untersuchen nun, ob a und b sich so bestimmen lassen, dass diese Gleichung eine identische wird.

Als Beispiel für diesen Fall nehmen wir die Gleichung:

$$x^3-\tfrac{15}{2}x+290\tfrac{1}{2}=0$$

Hier ist $$p=-\frac{5}{2},\ q=\frac{290\frac{1}{2}}{2}=\frac{581}{4};$$

daher $$q^2+p^3=\left(\frac{581}{4}\right)^2-\frac{125}{8}=\frac{337561-250}{16}=\frac{337311}{16}$$

und $$\sqrt{q^2+p^3}=\frac{\sqrt{337311}}{4};\text{ somit}$$

$$A=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}=\sqrt[3]{-\frac{581}{4}+\frac{\sqrt{337311}}{4}}=\sqrt[3]{\frac{-581+\sqrt{337311}}{4}}$$

wo $\sqrt{337311}$ irrational ist. Um nun zu erfahren, ob vielleicht dennoch A sich in einen rationalen und einen irrationalen Theil zerlegen lasse, multipliziren wir Zähler und Nenner des Radikanden mit 2, damit aus dem Nenner die 3te Wurzel gezogen werden kann. Dann bekommen wir:

$$A = \sqrt[3]{\frac{-581+\sqrt{337311}}{4}} = \sqrt[3]{\frac{-1162+2\sqrt{337311}}{8}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-1162+2\sqrt{337311}}$$

Die Zerlegung von 337311 in Primfaktoren gibt $337311 = 3^3 . 31^2 . 13 = (3 . 31)^2 . 39$, dadurch wird

$A = \frac{1}{2}\sqrt[3]{-1162+186\sqrt{39}}$. Nun setzen wir

$\sqrt[3]{-1162+186\sqrt{39}} = a+\sqrt{b}$ oder

$-1162+186\sqrt{39} = a^3+3ab+(3a^2+b)\sqrt{b}$

woraus folgt: 1., $a^3+3ab = -1162$

2., $(3a^2+b)\sqrt{b} = 186\sqrt{39}$.

Die letzte Gleichung zerfällt wieder in:

$3a^2+b = 186$ und $\sqrt{b} = \sqrt{39}$,

so dass wir zur Bestimmung von a und b die 3 Gleichungen haben:

1., $a^3+3ab = -1162$

2., $3a^2+b = 186$

3., $\sqrt{b} = \sqrt{39}$.

Die Aufgabe ist also im Allgemeinen nicht lösbar. Wir können aus den 2 letzten a und b bestimmen und dann noch sehen, ob deren Werthe auch der ersten Gleichung Genüge leisten. Wenn das der Fall ist, so wird die Zerlegung von $\sqrt[3]{-1162+186\sqrt{39}}$ möglich sein, sonst nicht. Aus (3) folgt nun: $b = 39$. Diess in (2) gesetzt gibt:

$3a^2 = 186-39 = 147$

$a^2 = 49$

$a = \pm 7$

Von diesen beiden Werthen von a genügt nur -7 auch der ersten Gleichung; daher

$\sqrt[3]{-1162+186\sqrt{39}} = -7+\sqrt{39}$; ebenso wird

$\sqrt[3]{-1162-186\sqrt{39}} = -7-\sqrt{39}$; somit

$$A = \frac{1}{2}\sqrt[3]{-1162+186\sqrt{39}} = \frac{-7+\sqrt{39}}{2}$$

$$B = \frac{1}{2}\sqrt[3]{-1162 - 186\sqrt{39}} = \frac{-7-\sqrt{39}}{2};$$

daher $x_1 = A+B = \dfrac{-7+\sqrt{39}-7-\sqrt{39}}{2} = -7.$

Aus den Werthen von A und B ergibt sich auch:

$$\frac{A+B}{2} = -\frac{7}{2} \text{ und } \frac{A-B}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{39}\text{; daher}$$

$$x_2 = -\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\sqrt{-3} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{39}.\sqrt{-3} = \frac{7+3\sqrt{-13}}{2}$$

$$x_3 = -\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}.\sqrt{-3} = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{39}.\sqrt{-3} = \frac{7-3\sqrt{-13}}{2}$$

Man überzeugt sich leicht, dass jede dieser 3 Wurzeln die gegebene Gleichung verifizirt. So ist z. B.

$$x_2^3 - \tfrac{15}{2}x_2 + 290\tfrac{1}{2} = \left(\frac{7+3\sqrt{-13}}{2}\right)^3 - \frac{15}{2}\left(\frac{7+3\sqrt{-13}}{2}\right) + 290\tfrac{1}{2}$$

$$= \frac{343+441\sqrt{-13}-2457-351\sqrt{-13}}{8} - \frac{105+45\sqrt{-13}}{4} + \frac{581}{2}$$

$$= \frac{243+90\sqrt{-13}-2457-210-90\sqrt{-13}+2324}{8}$$

$$= \frac{2667-2667+90\sqrt{-13}-90\sqrt{-13}}{8} = \frac{0}{8} = 0.$$

275. Irreduktibler Fall. Wir haben gesehen, dass wenn in der Gleichung $x^3+3px+2q=0$ $q^2+p^3<0$, die 3 Wurzeln reell und ungleich, aber mittelst der Cardan'schen Formel nicht erhältlich sind. Dieser Fall heisst der irreduktible und kann nur eintreten, wenn der Coeffizient $3p$ von x negativ und überdiess noch p^3 dem absoluten Werthe nach grösser ist als q^2. Wir wollen nun mit $3p$ den absoluten Werth des Coeffizienten von x, mit $2q$ aber, wie bisher, das bekannte Glied bezeichnen, so lautet die Gleichung:

$$(1)\quad x^3-3px+2q=0$$

Die Identifizirung dieser Gleichung mit der in No. 271 gebildeten Gleichung (2) gibt zur Bestimmung von a und b die zwei Gleichungen

$$ab = p \text{ und } a^3+b^3 = -2q.$$

Aus $ab=p$ folgt: $b = \dfrac{p}{a}$; daher

$$x = a+b = a+\frac{p}{a} = \sqrt{p}\left(\frac{a}{\sqrt{p}} + \frac{\sqrt{p}}{a}\right),$$ wo nun

$a=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2-p^3}}$. Allein $q^2-p^3=-(p^3-q^2)$, wo nun p^3-q^2 positiv ist, weil $p^3>q^2$; somit $a=\sqrt[3]{-q+\sqrt{(p^3-q^2)}\sqrt{-1}}$ und daher

$$\frac{a}{\sqrt{p}}=\frac{\sqrt[3]{-q+\sqrt{(p^3-q^2)}\sqrt{-1}}}{\sqrt{p}}=\frac{\sqrt[3]{-q+\sqrt{(p^3-q^2)}\sqrt{-1}}}{\sqrt[3]{\sqrt{p^3}}}$$

$$\frac{a}{\sqrt{p}}=\sqrt[3]{-\frac{q}{\sqrt{p^3}}+\frac{\sqrt{(p^3-q^2)}\sqrt{-1}}{\sqrt{p^3}}}=\sqrt[3]{-\frac{q}{\sqrt{p^3}}+\sqrt{\left(1-\frac{q^2}{p^3}\right)}\sqrt{-1}}$$

Nun ist nach Voraussetzung $q^2<p^3$, also $q<\sqrt{p^3}$ und $\frac{q}{\sqrt{p^3}}<1$, ebenso $\frac{q^2}{p^3}<1$. Es ist somit $-\frac{q}{\sqrt{p^3}}$ ein positiver oder negativer ächter Bruch und kann daher dem Cosinus eines noch zu bestimmenden Winkels φ gleich gesetzt werden. Wir denken uns also den Winkel φ so gewählt, dass $\cos\varphi=-\frac{q}{\sqrt{p^3}}$; dann ist $\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\sqrt{1-\frac{q^2}{p^3}}$ und somit

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{\sqrt{p^3}}+\sqrt{\left(1-\frac{q^2}{p^3}\right)}\sqrt{-1}}=\sqrt[3]{\cos\varphi+i\sin\varphi}=\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}$$

Wenn aber $\frac{a}{\sqrt{p}}=\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}$, so ist

$$\frac{\sqrt{p}}{a}=\frac{1}{\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}}=\cos\frac{\varphi}{3}-i\sin\frac{\varphi}{3}$$

und somit:

$$x=\sqrt{p}\left(\frac{a}{\sqrt{p}}+\frac{\sqrt{p}}{a}\right)=\sqrt{p}\left[\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}+\cos\frac{\varphi}{3}-i\sin\frac{\varphi}{3}\right]$$

oder $x=2\sqrt{p}\cos\frac{\varphi}{3}$.

Allein diese Formel gibt uns nur e i n e n Werth für x, während wir 3 Werthe als Wurzeln bekommen sollten. Nun ist aber leicht zu zeigen, dass die obige Formel uns alle 3 Wurzeln liefert, wenn wir nur φ ersetzen durch alle Bogenzahlen, welche mit φ die nämlichen trigonometrischen Funktionen besitzen, also durch $\varphi+2n\pi$, wo n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet, so dass also die vollständige Lösung ausgedrückt wäre durch $x=2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi+2n\pi}{3}\right)$. In der That ist

1., für $n=0$: $x_1=2\sqrt{p}\cos\frac{\varphi}{3}$

2., „ $n=1$: $x_2=2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)$. Nun ist $\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)$ verschieden von $\cos\frac{\varphi}{3}$, somit auch x_2 verschieden von x_1.

3., für $n=2$: $x_3=2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi+4\pi}{3}\right)$, wo $\cos\left(\frac{\varphi+4\pi}{3}\right)$ sowol von $\cos\frac{\varphi}{3}$, als von $\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)$ verschieden und daher x_3 von x_1 und x_2 verschieden ist.

4., für $n=3$ ist $x_4=2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi+6\pi}{3}\right)$. Nun ist $\cos\left(\frac{\varphi+6\pi}{3}\right)$ $=\cos\left(\frac{\varphi}{3}+2\pi\right)=\cos\frac{\varphi}{3}$; somit $x_4=x_1$

5., für $n=4$ ist $x_5=2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi+8\pi}{3}\right)$. Nun $\cos\left(\frac{\varphi+8\pi}{3}\right)=$ $\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}+2\pi\right)=\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)$; somit $x_5=x_2$

6., für $n=5$ ist $x_6=2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi+10\pi}{3}\right)$; allein $\cos\left(\frac{\varphi+10\pi}{3}\right)=$ $\cos\left(\frac{\varphi+4\pi}{3}+2\pi\right)=\cos\left(\frac{\varphi+4\pi}{3}\right)$; somit $x_6=x_3$ und so würden sich die 3 ersten Werthe x_1, x_2 und x_3 periodisch wiederholen.

Wir bekommen daher als Auflösung

$$x_1=2\sqrt{p}\cos\frac{\varphi}{3}$$

$$x_2=2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)$$

$$x_3=2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi+4\pi}{3}\right), \text{ wobei } \cos\varphi=-\frac{q}{\sqrt{p^3}}.$$

Führen wir statt der Bogenzahl den Winkel ein, so ist $\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\varphi+360^0}{3}\right)=\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^0\right)=$ $-\cos\left(\frac{\varphi}{3}-60^0\right)$;

ferner $\cos\left(\frac{\varphi+4\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^0\right)=-\cos\left(\frac{\varphi}{3}+60^0\right)$, so dass also die 3 Wurzeln wären:

$$x_1 = 2\sqrt{p}\cos\frac{\varphi}{3}$$

$$x_2 = -2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{3} - 60^0\right)$$

$$x_3 = -2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 60^0\right)$$

worin p den 3ten Theil vom absoluten Werth des Coeffizienten von x bezeichnet.

Beispiel. Sei $x^3 - 15{,}3471x + 17{,}23075 = 0$ die gegebene Gleichung, so ist

$$p = \frac{15{,}3471}{3} = 5{,}1157$$

$$q = \frac{17{,}23075}{2} = 8{,}615375;\ \text{daher}$$

$$\cos\varphi = -\frac{q}{\sqrt{p^3}} = -\frac{8{,}615375}{(5{,}1157)^{\frac{3}{2}}}$$

Da $\cos\varphi$ hier negativ, so ist φ stumpf; bezeichnen wir daher mit φ' seinen spitzen Supplementarwinkel, so ist

$$\cos\varphi' = \frac{8{,}615375}{(5{,}1157)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Nun}\log 8{,}615375 = 0{,}9352742$$

$$\tfrac{3}{2}\log 5{,}1157 = 1{,}0633576$$

$$\text{daher}\ \log\cos\varphi' = 9{,}8719166 - 10$$

$$\varphi' = 41^0\ 52'\ 34{,}3''$$

$$\text{und somit}\ \varphi = 180^0 - \varphi' = 138^0\ 7'\ 25{,}7''$$

$$\frac{\varphi}{3} = 46^0 2' 28{,}6''$$

Berechnung von x_1. Es ist $x_1 = 2\sqrt{p}\cos\frac{\varphi}{3}$.

$$\text{Nun}\ \log 2 = 0{,}3010300$$

$$\log\sqrt{p} = 0{,}3544525$$

$$\log\cos\frac{\varphi}{3} = 9{,}8414469 - 10$$

$$\log x_1 = 0{,}4969294$$

$$x_1 = \text{Num}\log 0{,}4969294 = 3{,}14.$$

Bestimmung von x_2. Es ist $x_2 = -2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{3} - 60^0\right)$

oder $x_2 = -2\sqrt{p}\cos -13^0 57' 31{,}4'' = -2\sqrt{p}\cos 13^0 57' 31{,}4''$

und somit $-x_2 = 2\sqrt{p}\cos 13^0 57' 31{,}4''$

Nun $\log 2 = 0,3010300$

$\log\sqrt{p} = 0,3544525$

$\log\cos 13^0 57'31,4'' = 9,9869820-10$

$\log -x_2 = 0,6424645$

$-x_2 = \text{Num}\log 0,6424645 = 4,39$

und $x_2 = -4,39.$

Bestimmung von x_3. Es ist $x_3 = -2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+60^0\right)$

oder $x_3 = -2\sqrt{p}\cos 106^0 2'58,6'' = 2\sqrt{p}\sin 16^0\ 2'\ 28,6''$

Num $\log 2 = 0,3010300$

$\log\sqrt{p} = 0,3544525$

$\log\sin 16^0 2'28,6'' = 9,4414278-10$

$\log x_3 = 0,0969103$

$x_3 = 1,25.$

Beispiele zur Uebung!

1., $x^3-28x-48=0$. Wurzeln: 6, —4 und —2

2., $x^3-12,7333x+17,473332=0$

2,11, —4,12 und 2,01 die Wurzeln.

3., $x^3-20,278339x-33,52926507=0$

Wurzeln: 5,173, dann —3,043 und —2,13.

4., $x^3-92,7991x+185,61711=0$

Wurzeln: —10,51, 8,41 und 2,1

5., $x^3-19,1344x+29,328=0$

Wurzeln: 3,12, 1,88 und —5.

6., $x^3-44,1756x-90,558=0$

—2,34, —5,16 und 7,5 die Wurzeln.

7., $x^3-75,16x+248,4=0$; Wurzeln: —10, 4,6 und 5,4.

Sechster Abschnitt.

Unendliche Reihen.

A. Einleitende Begriffsbestimmungen.

276. Wir schicken hier einige für die zwei letzten Abschnitte nothwendige Definitionen voraus.

Man nennt eine Grösse constant, wenn sie als während derselben Untersuchung immer den nämlichen Werth beibehaltend ge-

dacht wird. Wenn wir also sagen: In dem Ausdruck ax soll a eine Constante bedeuten, so heisst das: Man kann zwar unter a jeden beliebigen Werth verstehen; allein der einmal gewählte Werth wird so lange beibehalten, als nicht ausdrücklich gesagt wird, dass man dem a eine andere Bedeutung beilegen will. Umgekehrt nennen wir eine Grösse variabel, wenn wir geradezu voraussetzen, dass sie successive verschiedene Werthe annehme. Gewöhnlich bezeichnet man die Constanten mit den Anfangs-, die Variabeln mit den Endbuchstaben des Alphabetes. Hiebei stellen wir uns nun immer vor, dass die Aenderung der Variabeln nach dem Gesetz der Stetigkeit vor sich gehe d. h. dass sie nie von einem Werthe a zu einem andern b übergehe, ohne alle möglichen Zwischenzustände zu durchlaufen (Bewegung eines Punktes auf einer geradlinigen oder krummlinigen Bahn, Verlauf der Zeit etc.). Es folgt hieraus, dass jeder spätere Werth der Variabeln x zwar nie gleich dem vorangehenden sein darf, dass aber der Unterschied zweier aufeinanderfolgenden Werthe derselben unter jede noch so kleine endliche Zahl herabgedrückt, also der Null beliebig nahe gebracht werden kann, dass er — wie man zu sagen pflegt — unendlich klein sein muss.

277. Begriff der Funktion. Bedeutet x eine variable Grösse, indess a, b, c etc. constante Zahlen vorstellen, so ist klar, dass die Ausdrücke ax, $\frac{a}{x}$, x^m, a^x, $\sin x$, $\cos x$ etc. sich ändern mit x d. h. dass jedem andern Werth des x im Allgemeinen auch ein oder mehrere andere Werthe von ax, $\frac{a}{x}$, x^m etc. entsprechen. Diese Ausdrücke sind daher ebenfalls variable Grössen, deren Aenderungen aber abhängig sind von den Aenderungen des x. Dieses Abhängigkeitsverhältniss drücken wir in der allgemeinsten Weise dadurch aus, dass wir sagen, es seien dieselben Funktionen von x, womit über die Natur dieses Abhängigkeitsverhältnisses noch gar nichts vorgeschrieben ist. In diesem Sinne ist das Gedeihen der Früchte eine Funktion der Witterung, der Stand der Quecksilbersäule im Thermometer eine Funktion der Temperatur, überhaupt jede Erscheinung eine Funktion der sie bedingenden Ursachen, ohne dass wir desshalb immer im Stande wären, das Abhängigkeitsgesetz durch eine mathematische Formel auszudrücken. Wir beschränken uns hier auf solche Funktionen von x, welche durch analytische Ausdrücke gegeben sind und bezeichnen

die Abhängigkeit eines Ausdruckes y von der Variabeln x dadurch, dass wir schreiben: $y=f(x)$. Jede beliebige Funktion von x d. h. jeder beliebige von x abhängige Ausdruck, kann also durch $f(x)$ bezeichnet werden. Eine andere Funktion derselben Variabeln dagegen wird durch ein anderes Funktionszeichen φ, ψ, F, g, etc. angedeutet. Es bezeichnen demnach $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $F(x)$ etc. verschiedene, im Uebrigen ganz willkürliche Funktionen derselben Variabeln x.

Wäre ferner $f(x)=2+5x+7x^2$, so wäre $f(y)=2+5y+7y^2$, $f(1)=2+5+7=14$, $f(0)=2$. Ebenso würden $f(2)$, $f(10)$, $f(\frac{1}{2})$ diejenigen Werthe bedeuten, welche $f(x)$ annimmt, wenn in ihr für x gesetzt wird 2, 10 oder $\frac{1}{2}$.

Enthält ein Ausdruck mehrere Variable, z. B. x und y, oder x, y und z, so wird er im ersten Fall durch $f(x, y)$ oder $\varphi(x, y)$ etc., im letzten durch $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$ etc. bezeichnet.

Hat man eine Funktion nur einer Variabeln x, so gehört entweder zu jedem Werth von x nur ein Werth der Funktion, oder es entsprechen einem Werthe der Variabeln x zugleich mehrere Werthe der Funktion. Im ersten Fall heisst die Funktion eine eindeutige oder einwerthige, im letzten eine mehrdeutige oder mehrwerthige Funktion. So sind ax, $a+bx+cx^2$, $\sin x$, $\cos x$ etc. eindeutige Funktionen von x, dagegen ist $\sqrt{x}$ eine zweideutige Funktion, weil jedem Werth des x zwei Werthe von $\sqrt{x}$ entsprechen, die dem absoluten Werthe nach gleich, dem Zeichen nach entgegengesetzt sind, und $\sqrt[n]{x}$ würde sogar — wie sich später zeigt — eine $n$werthige Funktion sein. Man thut indessen zur Vereinfachung der Auffassung gut, diese verschiedenen, in $\sqrt[n]{x}$ enthaltenen Zweige zu trennen und jeden als eine besondere Funktion aufzufassen. So würde die zweideutige Funktion $y=\sqrt{a^2-x^2}$ zerfallen in die beiden eindeutigen Funktionen $y_1=+\sqrt{a^2-x^2}$ und $y_2=-\sqrt{a^2-x^2}$ und da kann man nun von jeder derselben sagen, dass jedem Werth der Variabeln x ein und nur ein Werth von y zugehört.

278. Stetigkeit der Funktion. $y=f(x)$ heisst eine stetige Funktion von x, wenn bei stetiger Aenderung der Variabeln x auch die Funktion y nicht von einem Werthe zu einem andern übergeht, ohne successive alle möglichen Zwischenzustände zu durchlaufen. Offenbar ist dazu erforderlich, dass eine unendlich kleine Aenderung der Variabeln auch immer nur eine

unendlich kleine Aenderung der Funktion nach sich ziehe. Im Allgemeinen ist eine Funktion stetig und es findet ein Unterbruch der Stetigkeit nur an einzelnen Stellen d. h. für spezielle Werthe der Variabeln statt. So ist $f(x)$ eine zwischen $x=a$ und $x=b$ stetige Funktion, wenn, während x von a bis b stetig sich ändert, auch $f(x)$ von $f(a)$ bis zu $f(b)$ nur dadurch gelangt, dass es successive alle möglichen Zwischenwerthe von $f(a)$ bis $f(b)$ durchläuft. Bezeichnet ω eine unendlich kleine Zahl, so wäre $f(x)$ an der Stelle $x=c$ unstetig, wenn die beiden Funktionswerthe $f(c)$ und $f(c+\omega)$ eine endliche Differenz darböten, wenn also die Differenz $f(c+\omega)-f(c)$ nicht mehr verschwindend klein wäre; denn alsdann würde, wenn x an der Stelle c um unendlich wenig (nämlich um ω) sich ändert, $f(x)$ nicht mehr um unendlich wenig, sondern um die endliche Grösse $f(c+\omega)-f(c)$ sich ändern; es würde also an der Stelle $x=c$ der unendlichen kleinen Aenderung des x (Uebergang desselben von c zu $c+\omega$) die als endlich vorausgesetzte Aenderung $f(c+\omega)-f(c)$ entsprechen.

279. Grenzwerth einer Veränderlichen und einer Funktion. Lässt man in dem Bruch $\frac{n}{n+1}$ das n alle positiven ganzen Zahlen von 0 bis $+\infty$ durchlaufen, so nimmt $\frac{n}{n+1}$ successive die Werthe $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ u. s. f. an; er wächst also immer bis er für $n=\infty$ unendlich nahe an 1 kommt. Der Bruch $\frac{n}{n+1}$ ist also so beschaffen, dass er bei fortwährend wachsendem n sich der Einheit immer mehr und mehr nähert, dabei aber doch stets kleiner als 1 bleibt, und dass man n so gross wählen kann, dass der Unterschied zwischen 1 und $\frac{n}{n+1}$ kleiner wird, als jede noch so kleine Zahl δ. Ebenso ist, wie wir früher sahen, $\sqrt[m]{a}$ eine Zahl, welche mit unbegrenzt wachsendem m der Einheit sich immer mehr nähert und zwar von oben, wenn $a>1$, und von unten, wenn a kleiner als 1, und man kann den Unterschied zwischen $\sqrt[m]{a}$ und 1 unter jede beliebige Kleinheit herabdrücken; aber für $a>1$ bleibt $\sqrt[m]{a}$ stets über, für $a<1$ dagegen stets unter 1. Wir sagen nun: Die Grössen $\frac{n}{n+1}$ und $\sqrt[m]{a}$ convergiren mit unendlich wachsendem n und m gegen die Grenze 1 und schreiben:

$$\text{Grenze}\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=\infty} = 1 \text{ oder } \lim_{n=\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1;$$

ebenso $\lim_{m=\infty}\left(\sqrt[m]{a}\right) = 1$. Allgemein sagen wir: Eine in Veränderung begriffene Grösse y nähere sich der Grenze A, wenn man diese Annäherung so weit treiben kann, dass der Unterschied zwischen y und A dem absoluten Werthe nach kleiner wird, als jede noch so kleine Zahl ω und wenn überdiess nach dem Durchgang durch diese Stelle die Funktion y noch bestänig über oder beständig unter A bleibt, je nachdem sie sich der Grenze A von oben oder von unten nähert. So würde $y = \frac{a}{x}$ bei unendlich wachsendem x sich der Grenze 0 nähern, $\frac{3}{x} + 7$ aber der Grenze 7; wir könnten daher schreiben:

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{a}{x}\right) = 0 \text{ und } \lim_{x=\infty}\left(\frac{3}{x}+7\right) = 7.$$

280. Algebraische und transcendente Funktionen. Jeder analytische Ausdruck, in welchem die Variable keiner andern, als einer oder mehrern der 6 ersten Operationen unterworfen ist und bei welchem diese Operationen nicht in unendlicher Anzahl vorkommen, heisst eine algebraische Funktion von x. So ist $A+Bx^{\alpha}+Cx^{\beta}+Dx^{\gamma}+Ex^{\delta}$, wenn A, B, C, D und E constante Zahlen, die Exponenten α, β, γ, δ ebenso beliebige posisive oder negative, ganze oder gebrochene Zahlen vorstellen, eine algebraische Funktion von x, weil die Variable x darin nur solchen Operationen unterworfen ist, welche die 6 ersten nicht übersteigen und überdiess die Zahl dieser Operationen eine endliche ist. Wenn dagegen x als Exponent oder unter einem logarithmischen oder goniometrischen Funktionszeichen vorkommt, wie in a^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ etc., oder wenn x einer unendlichen Anzahl von Operationen unterworfen ist, so heisst der Ausdruck, selbst wenn diese Operationen den 6 ersten angehören, eine transcendente Funktion. Es gehört also $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots$ in infinitum zu den transcendenten Funktionen.

Sind bei einem Polynome die Exponenten nur positive oder negative ganze Zahlen, so heisst das Polynom rational; enthält es die Variable unter einem Wurzelzeichen oder mit gebrochenem Exponenten, so heisst es eine irrationale Funktion.

$\dfrac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots Px^m}{a+bx+cx^2+\ldots qx^n}$ ist der allgemeine Ausdruck ei-

ner rationalen algebraischen Funktion. Ist, wie hier, der Zähler vom $m$ten, der Nenner aber vom $n$ten Grade, so heisst die Funktion ächt gebrochen, wenn der Grad n des Nenners grösser ist, als der Grad des Zählers, dagegen unächt gebrochen, sobald der Grad des Zählers grösser als der des Nenners oder doch gleich demselben ist, sobald also $m > n$ oder $m = n$.

Sind endlich im Nenner die Coeffizienten b, c, d etc. alle $= 0$ d. h. ist der Nenner vom nullten Grade, so heisst die Funktion eine ganze algebraische Funktion, wie

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots Px^m}{a} = \frac{A}{a} + \frac{B}{a}x + \frac{C}{a}x^2 + \ldots \frac{P}{a}x^m$$

Es leuchtet ein, dass jede unächt gebrochene rationale Funktion durch Division in eine ganze und eine ächt gebrochene zerlegt werden kann.

B. Kriterien der Convergenz unendlicher Reihen.

281. Eine Aufeinanderfolge von Zahlen, die nach einem bestimmten Gesetz gebildet sind, heisst, wofern sie sich in's Unbegrenzte fortsetzt, eine unendliche Reihe. Die einzelnen Zahlen werden die Glieder der Reihe genannt. Eine solche unendliche Reihe ist aufzufassen als eine bestimmte Rechnungsvorschrift und es sind die Operationen genau in der angedeuteten Weise auszuführen. So bedeutet die Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ in inf., dass zu 1 addirt werden soll $\frac{1}{2}$; zur Summe beider $\frac{1}{4}$ u. s. f. Ebenso bedeutet die Reihe

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots.$$

dass man successive zu bilden habe: $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; dann $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$; $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{6}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$ u. s. f. Von dieser bestimmten Rechnungsvorschrift darf man im Allgemeinen nicht willkürlich abweichen und es ist keineswegs immer erlaubt, die einmal gegebene Anordnung der Glieder willkürlich abzuändern d. h. man darf den für ein Polynom mit endlicher Gliederzahl gültigen Satz über Aenderung in der Reihenfolge der Glieder nicht ohne Weiteres auf eine unendliche Reihe übertragen. So ist, wie wir später sehen werden,

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$ in inf $= \log 2$, während die Reihe

$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots=\frac{3}{2}\log 2$,

obschon sie die nämlichen Glieder, wie die erste, nur in einer andern Anordnung enthält. Noch weniger dürfte man die Summe der obigen Reihe ersetzen durch die Differenz zwischen der

Summe aller positiven und der Summe aller negativen Glieder, also durch $P-Q$, wenn

$$P=1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}+ \ldots \text{ in inf.}$$

$$Q=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{8}+ \ldots \text{ in inf.,}$$ wo P und Q beide ∞ gross sind, ihre Differenz also völlig unbestimmt ist.

282. Betrachten wir die unendliche Reihe

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\ldots u_n+u_{n+1}+\ldots u_{n+m}+\ldots$$

und bezeichnen wir mit S_n die Summe der n ersten Glieder, setzen also $S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots u_n$, so ist zunächst klar, dass diese Summe S_n von der Anzahl n der genommenen Glieder abhängt. Wenn wir nun in dem Ausdruck S_n das n immer grösser werden lassen, so sind folgende 3 Fälle möglich:

1. Entweder wird S_n mit unbegrenzt wachsendem n einer bestimmten endlichen Grenze A sich nähern, so dass man hat: $\lim_{(n=\infty)} S = A$. In diesem Fall schreibt man:

$$A=u_1+u_2+u_3+u_4+ \ldots \text{ in infinitum}$$

und nennt dann A die Summe jener unendlichen Reihe. Das wäre z. B. der Fall bei der Reihe:

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+ \ldots \text{ in inf., wo } \lim_{(n=\infty)} S_n=2,$$

da jede in's Unendliche fortgehende abnehmende geometrische Progression zur Grenze ihrer Summe den Quotienten aus ihrem ersten Gliede durch die um den Quotienten verminderte Einheit $\left(\frac{a}{1-q}\right)$ hat.

2. oder es wird S_n mit unbegrenzt wachsendem n selber über alle Grenzen wachsen, also $\lim_{(n=\infty)} S_n=\infty$ sein was der Fall wäre bei

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+ \ldots \text{ in inf.}$$

3. oder endlich wird S_n bei unbegrenzt wachsendem n gar keiner festen Grenze sich nähern, sondern zwischen bestimmten Zahlen hin und her schwanken, wie z. B. in $1-1+1-1+1-1+\ldots$ in inf., wo S_n abwechselnd $=0$ oder $=1$ wird, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Im ersten Fall wird die Reihe convergent, im 2ten und 3ten aber divergent genannt. Eine unendliche Reihe heisst demnach convergent, wenn die Summe ihrer n ersten Glieder bei unendlich wachsendem n sich einer bestimmten endlichen Grenze nähert; in jedem andern Fall heisst sie divergent.

283. Man erkennt nun sofort, dass eine erste und unerlässliche Bedingung für die Convergenz einer unendlichen

Reihe die ist, dass ihre Glieder gegen Null convergiren. Eine steigende unendliche Reihe hat selbstverständlich eine über alle Grenzen wachsende Summe. Aber selbst eine abnehmende Reihe ist nie convergent, wenn ihre Glieder nicht gegen Null convergiren. So nehmen z. B. in $\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\ldots\frac{n+1}{n}$ die Glieder auch ab, aber nicht gegen Null, sondern gegen 1 und da muss die Summe der n ersten Glieder mit unendlich wachsendem n selber über alle Grenzen wachsen, die Reihe also divergent sein als eine Summe von ∞ vielen Summanden, die sämmtlich von endlicher Grösse, ja sogar grösser als 1 sind. Soll also die Möglichkeit einer Convergenz vorhanden sein, so müssen die Glieder vor Allem aus gegen Null convergiren. Indessen ist diese Bedingung allein noch keineswegs hinreichend zur Convergenz einer unendlichen Reihe. So ist z. B. die Reihe der reziproken Werthe der natürlichen Zahlen, d. h. die Reihe

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\ldots \text{ in inf.}$$

eine unendliche Reihe, deren Glieder zwar gegen Null convergiren, die aber gleichwohl nicht convergent ist. Um das einzusehen, gruppiren wir ihre Glieder, wie folgt:

$$1+\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8})+(\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{11}+\ldots\tfrac{1}{16})+\ldots$$
$$+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots\frac{1}{2n}\right)+\ldots$$

und vergleichen diese mit der Reihe

$$1+\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8})+(\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{16}+\ldots\tfrac{1}{16})+\ldots \text{etc.},$$

die aus der ersten entsteht, wenn wir in jeder Klammer alle Glieder gleich dem letzten machen, so ist der Werth der ersten Reihe offenbar grösser, als derjenige der zweiten. Allein diese 2te Reihe hat zur Summe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$ in inf., also eine über alle Grenzen wachsende Zahl; die erstere hat eine noch grössere Summe, ist also jedenfalls divergent.

Die Glieder der Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ convergiren nicht rasch genug gegen Null, um eine endliche Summe hervorzubringen. Dagegen ist — wie wir von früher wissen — jede abnehmende geometrische Progression eine convergente Reihe.

Wir haben hier die Divergenz einer unendlichen Reihe durch Vergleichung mit einer anderen Reihe nachgewiesen, die noch divergent ausfiel, obschon ihre Glieder kleiner waren, als die der ersten. Umgekehrt können wir häufig die Convergenz einer un-

endlichen Reihe durch Vergleichung mit einer andern, bereits als convergent bekannten Reihe darthun.

284. Lehrsatz: *Eine unendliche Reihe mit lauter positiven Gliedern ist stets convergent, wenn die Summe der n ersten Glieder bei unendlich wachsendem n endlich bleibt.*

Sei $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots u_n$ diese Reihe.

Da alle Glieder positiv sind, so muss S_n mit wachsendem n immer grösser werden. Sobald aber S_n stets endlich bleibt, so können wir sämmtliche positiven Zahlen in zwei Gruppen bringen:

1. eine Gruppe solcher, welche von der im Wachsthum begriffenen Zahl S_n einmal erreicht und nachher noch überschritten werden,
2. eine Gruppe solcher, welche von S_n nicht erreicht werden.

Unter den Zahlen der letzten Gruppe ist eine die kleinste und diese Zahl ist die Grenze, der sich S_n mit unendlich wachsendem n immer mehr nähert, ohne sie je zu überschreiten; die Reihe ist demnach convergent.

Zusatz. Es ist ohne Weiteres klar, dass dieser Satz nicht mehr gelten würde, wenn die Reihe auch negative Glieder hätte; denn dann könnte man aus dem Umstand, dass S_n einen endlichen Werth behält, noch keineswegs schliessen, dass es sich auch einer endlichen Grenze nähere, wie wir das bei der oscillirenden Reihe $1-1-1+1-$ etc. gesehen haben.

285. Lehrsatz: *Wenn die Glieder einer unendlichen Reihe sämmtlich positiv und von einer bestimmten Stelle an kleiner sind, als die entsprechenden Glieder einer als convergent bekannten Reihe, so muss sie ebenfalls convergent sein.*

Sei $$S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots \text{ in inf. } (1)$$
eine convergente Reihe und
$$s = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \ldots \text{ in inf. } (2)$$
eine zweite Reihe, von welcher etwa die zwei ersten Glieder mit denen der ersten übereinstimmen, während vom 3ten Gliede an ihre sämmtlichen Glieder kleiner als die entsprechenden Glieder der ersten Reihe sein mögen, so hat man also:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_2 \\ v_3 &< u_3 \\ v_4 &< u_4 \\ &\ldots\ldots \\ v_n &< u_n \end{aligned}$$

woraus folgt, dass $s_n < S_n$.

Da aber nach Voraussetzung die Reihe (1) convergent, so hat S_n einen endlichen Werth, wie gross auch n gewählt werden mag; somit hat auch s_n einen endlichen Werth und die Reihe (2) ist daher nach dem vorigen Satze convergent.

286. Lehrsatz: *Eine unendliche Reihe von lauter positiven Gliedern ist immer convergent, wenn von einem bestimmten Gliede an der Quotient eines jeden Gliedes durch das vorangehende angebbar kleiner ist als* 1, *und divergent, wenn dieser Quotient angebbar grösser ist als* 1.

Um das nachzuweisen, betrachten wir nur den Theil unserer Reihe, mit dessen erstem Gliede unsere Voraussetzung beginnt. Sei also in $u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\dots$ der Quotient irgend eines Gliedes durch das vorhergehende angebbar kleiner als 1, etwa kleiner als die unter 1 liegende Zahl e, so hat man unmittelbar nach dieser Voraussetzung

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < e \qquad u_{n+1} < e u_n$$

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < e \quad \text{oder} \quad u_{n+2} < e u_{n+1} \qquad (\alpha)$$

$$\frac{u^{n}+3}{u_{n+2}} < e \qquad u_{n+3} < e u_{n+2}$$

Diese Ungleichheiten (α) werden nicht gestört, wenn man in der zweiten rechts den Faktor u_{n+1} durch die grössere Zahl eu_n, ferner in der dritten u_{n+2} durch die grössere Zahl e^2u_n u. s. f. ersetzt. Man bekommt so:

$$u_{n+1} < eu_n$$
$$u_{n+2} < e^2u_n$$
$$u_{n+3} < e^3u_n$$
$$u_{n+4} < e^4u_n$$
$$\dots\dots\dots$$

woraus durch Addition und Hinzufügung von u_n auf beiden Seiten sich ergibt:

$$u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\dots < u_n+e\,u_n+e^2u_n+e^3u_n+\dots$$

oder $u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\dots < u_n(1+e+e^2+e^3+\dots)$

Da aber $e<1$, so ist $1+e+e^2+e^3+\dots$ eine abnehmende geometrische Progression, deren Summe $= \frac{1}{1-e}$ und somit hat das mit u_n beginnende Stück unserer Reihe eine Summe kleiner als $\frac{u}{1-e}$; die ganze zu untersuchende Reihe $u_1+u_2+u_3+\dots$ $u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\dots$ ist somit convergent.

Nehmen wir dagegen an, dass vom Gliede u_n an der Quotient eines jeden Gliedes durch das vorhergehende stets angebbar grösser als 1 ausfalle, etwa beständig grösser als die über 1 liegende Zahl h, und betrachten wir wieder das Stück der Reihe, mit dessen erstem Gliede unsere Voraussetzung erfüllt ist, also das Stück: $u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ldots$, so ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > h \qquad u_{n+1} > hu_n$$

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} > h \text{ oder } u_{n+2} > hu_{n+1} \quad (\beta)$$

$$\frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} > h \qquad u_{n+3} > hu_{n+2}$$

Diese Ungleichheiten (β) bleiben ungestört, wenn man rechts u_{n+1} durch die kleinere Zahl hu_n, u_{n+2} durch die ebenfalls kleinere Zahl h^2u_n u. s. f. ersetzt. Man bekommt daher folgende Ungleichheiten:

$$u_{n+1} > hu_n$$
$$u_{n+2} > h^2u_n$$
$$u_{n+3} > h^3u \quad \text{u. s. f.,}$$

woraus durch Addition und Hinzufügung von u_n auf beiden Seiten sich ergibt:

$$u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ldots > u_n+hu_n+h^2u_n+h^3u_n+\ldots$$

Nun haben wir rechts eine geometrische Progression, deren Quotient $h>1$; die Summe dieser Progression wächst über alle Grenzen; daher wird auch die Summe der Glieder links über alle Grenzen wachsen und die gegebene Reihe demnach divergent sein.

Nehmen wir z. B. die Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{2\,.\,3\,.\,4}+\ldots\ldots$$

so ist diese offenbar convergent; denn es ist

$$\frac{u_2}{u_1}=\frac{1}{2},\ \frac{u_3}{u_2}=\frac{1}{3},\ \frac{u_4}{u_3}=\frac{1}{4}$$

Der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ bleibt also vom zweiten Gliede an beständig unter $\frac{1}{2}$; die Reihe ist somit nach dem bewiesenen Satze convergent.

Die Convergenz dieser Reihe würde aber auch sofort klar bei Vergleichung derselben mit der geometrischen Progression $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$, deren Glieder, vom zweiten an sämmtlich grösser sind, als die entsprechenden Glieder obiger Reihe. Es ist daher

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{2\,.\,3\,.\,4}+\ldots<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots.$$

Die letzte ist convergent; daher die erte ebenfalls convergent. Betrachten wir ferner die Reihe

$$1+x+\frac{x^2}{1\,.\,2}+\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}+\ldots,$$

so erkennen wir sofort, dass sie nach Weglassung des ersten Gliedes für $x=1$ in die vorige übergeht, also convergent ist, und noch mehr wird sie es sein für $x<1$. Um aber zu erfahren, ob sie auch für $x>1$ noch convergent sei, bilden wir den Quotienten $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Nun ist

$$u_{n+1}=\frac{x^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n};\quad u_n=\frac{x^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)};$$

daher $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}\,.\,\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)}{x^{n-1}}=\frac{x}{n}.$$

Dieser Quotient $\frac{x}{n}$ hat aber für ein unendlich wachsendes n bei jedem endlichen Werth von x zur Grenze Null; somit ist die Reihe auch für jedes endliche x noch convergent.

Anmerkung 1. Wenn $x>1$, so nehmen die Glieder der obigen Reihe anfänglich zu bis zu einer bestimmten Stelle, von welcher an sie abzunehmen beginnen. So bekäme man für $x=5$:

$$1+5+\frac{5^2}{2}+\frac{5^3}{1.2.3}+\frac{5^4}{1.2.3.4}+\frac{5^5}{1.2.3.4.5}+\frac{5^6}{1.2.3\ldots6}+\ldots$$

oder $$1+5+12\tfrac{1}{2}+20\tfrac{5}{6}+26\tfrac{1}{24}+26\tfrac{1}{24}+21\tfrac{101}{144}+\ldots$$

Diese Reihe ist also bis zum 5ten Gliede eine zunehmende; das 6te Glied wird gleich dem 5ten und von da an ist jedes folgende Glied kleiner als das vorangehende; der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ also vom 6ten Gliede an kleiner als 1.

Betrachten wir ferner die Reihe

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots.$$

so ist der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^{n+1}}{n+1}:\frac{x^n}{n}=\frac{nx^{n+1}}{(n+1)x^n}=\frac{nx}{n+1}=\frac{n}{n+1}x.$

Man erkennt sogleich, dass für ein unendlich wachsendes n der Faktor $\frac{n}{n+1}$ der Grenze 1 und das Produkt $\frac{n}{n+1}\,.\,x$ der Grenze x sich nähert, dass daher diese Reihe convergent für $x<1$

und divergent für $x=1$ und $x>1$. Für $x=1$ verwandelt sie sich in die Reihe der reziproken Werthe der natürlichen Zahlen, deren Divergenz bereits bewiesen wurde.

Die Reihe $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2^r}+\frac{x^3}{3^r}+\frac{x^4}{4^r}+\ldots\frac{x^n}{n^r}+\ldots$ fällt ebenfalls convergent oder divergent aus, je nachdem x kleiner oder grösser als 1 ist. Denn es ist

$$u_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)^r} \text{ und } u_n=\frac{x^n}{n^r};$$

somit $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)^r}\cdot\frac{n^r}{x^n}=\frac{n^r}{(n+1)^r}.x=\left(\frac{n}{n+1}\right)^r.x$$

Nun nähert sich $\left(\frac{n}{n+1}\right)^r$ mit unbegrenzt wachsendem n der Grenze 1 und somit $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ der Grenze x; es wird somit für $x<1$ die Reihe convergent, für $x>1$ aber divergent ausfallen.

Anmerkung 2. Wenn $\lim_{n=\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=1$, so bleibt die Convergenzfrage unentschieden, indem dann die Reihe bald convergent, bald divergent ausfallen kann. Man hat daher in einem solchen Fall noch eine besondere Untersuchung anzustellen.

Die obige allgemeine Reihe: $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2^r}+\frac{x^3}{3^r}+\frac{x^4}{4^r}+\ldots$ geht für $x=1$ und $r=2$ in die Reihe der reziproken Werthe von den Quadraten der natürlichen Zahlen, für $n=3$ in die Reihe der Cuben, für $r=\frac{1}{m}$ in die Reihe der $m$ten Wurzeln aus den reziproken Werthen der natürlichen Zahlen über und in allen diesen Fällen ist $\lim_{n=\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=1$. Man muss daher besonders untersuchen, in welchen von diesen Fällen sie convergent, in welchen sie divergent ausfällt.

Als Beispiel nehmen wir die Reihe

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots,$$

wo $u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$ und somit $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{(n+1)^2}:\frac{1}{n^2}=\frac{n^2}{(n+1)^2}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$, was für $n=\infty$ zu $1^2=1$ wird.

Um nun die Convergenzfrage zu entscheiden, gruppiren wir die Glieder in folgender Weise:

$$(\alpha)\ 1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}\right)+\left(\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\dots\frac{1}{15^2}\right)+\dots$$

und vergleichen diese Reihe mit der folgenden:

$$(\beta)\ 1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}\right)+\left(\frac{1}{8^2}+\frac{1}{8^2}+\dots\frac{1}{8^2}\right)+\dots,$$

so ist offenbar $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}$

$$\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}<\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2} \text{ u. s. f.}$$

Es hat also die Reihe (α) eine kleinere Summe, als die Reihe (β). Nun ist aber

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}=\frac{4}{4^2}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{8^2}+\frac{1}{8^2}+\dots\frac{1}{8^2}(8\,\text{mal}) = \frac{8}{8^2}=\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{16^2}+\frac{1}{16^2}+\dots\frac{1}{16^2}(16\,\text{mal})=\frac{16}{16^2}=\frac{1}{16} \text{ u. s. f.}$$

Wenn wir daher mit S die Summe der Glieder unserer Reihe (α) bezeichnen, so ist

$S<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$ in inf. d. h. es ist S kleiner als die Summe der Glieder einer abnehmenden geometrischen Progression, deren Anfangsglied $= 1$, deren Quotient $= \frac{1}{2}$. Diese Progression ist convergent; unsere Reihe somit ebenfalls convergent.

Noch rascher convergiren die Reihen der reziproken Werthe der höhern Potenzen der natürlichen Zahlen

z. B. $$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\dots$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\dots$$

$$1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{5^5}+\dots \text{ u. s. f.}$$

Denn mit Ausnahme des ersten Gliedes sind sämmtliche Glieder dieser Reihe kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe (α); da diese aber convergent, so müssen die andern ebenfalls convergent sein.

Betrachten wir dagegen die Reihe

$$1+\frac{1}{\sqrt[m]{2}}+\frac{1}{\sqrt[m]{3}}+\frac{1}{\sqrt[m]{4}}+\frac{1}{\sqrt[m]{5}}+\ldots$$

wo m irgend eine positive ganze Zahl > 1 bedeutet, so ist der Quotient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}}:\frac{1}{\sqrt[m]{n}}=\frac{\sqrt[m]{n}}{\sqrt[m]{n+1}}=\sqrt[m]{\frac{n}{n+1}},$$

und dieser nähert sich für ein unendlich wachsendes n ebenfalls der Grenze 1. Diese Reihe ist aber offenbar divergent, wie sich aus der Vergleichung derselben mit der harmonischen Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ in inf. sofort ergibt.

287. Bisher haben wir nur Reihen mit lauter positiven Gliedern betrachtet. Wenn aber eine Reihe neben positiven Gliedern auch negative enthält, so ist zunächst klar, dass sie allemal convergent sein muss, sobald die Reihe der absoluten Werthe ihrer Glieder convergent ist. Denn die Summe der n ersten Glieder ist in diesem Fall gleich dem Ueberschuss der Summe der positiven Glieder (A_n) über die Summe der negativen (B_n) oder umgekehrt, also $= A_n - B_n$ oder $B_n - A_n$. Nun hat aber nach Voraussetzung die Summe der n ersten Glieder einen endlichen Werth, wenn man alle Glieder positiv nimmt d. h. A_n+B_n behält einen endlichen Werth; somit werden auch A_n und B_n selber endliche Werthe behalten und daher wird auch die Differenz A_n-B_n endlich bleiben und gegen eine endliche Grenze convergiren, die nichts anderes ist, als die Differenz der Grenzwerthe von A_n und B_n. Die Reihe ist demnach convergent.

Es geht hieraus auch ohne Weiteres hervor, dass Lehrsatz 286 auch auf Reihen mit positiven und negativen Gliedern ausdehnbar ist, d. h. dass auch eine solche Reihe stets convergent sein muss, sobald von einem bestimmten Gliede an der Quotient aus einem Gliede durch das vorhergehende dem absoluten Werthe nach stets angebbar kleiner als 1 ausfällt, da ja alsdann die Reihe der absoluten Werthe ihrer Glieder noch convergent ist.

288. Lehrsatz. *Eine Reihe ist stets convergent, wenn sie erstens einen regelmässigen Zeichenwechsel darbietet und wenn zweitens ihre Glieder gegen Null convergiren.*

Sei $u_1-u_2+u_3-u_4+u_5-u_6+\ldots$ in inf.

unsere Reihe, in welcher u_1, u_2, u_3, u_4 etc. abnehmende und zwar gegen Null convergirende Zahlen bedeuten, so können wir

diese Reihe, ohne an der Aufeinanderfolge der Glieder das Mindeste zu ändern, in folgenden zwei Formen schreiben:

1. $u_1 - u_2 + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + (u_7 - u_8) + \ldots . (S_n)$
2. $u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - (u_6 - u_7) - \ldots . (S_{n+1})$

Aus der ersten Form erkennen wir, dass die Summe dieser aus lauter positiven Differenzen bestehenden Reihe jedenfalls positiv und zwar grösser als das erste Glied $u_1 - u_2$ sein muss. Aus der zweiten Form erkennen wir aber auch, dass der Betrag derselben kleiner sein muss als u_1, da ja von der Zahl u_1 lauter positive Grössen subtrahirt werden. Es liegt somit die Summe S zwischen $u_1 - u_2$ und u_1, bleibt also unter allen Umständen von endlicher Grösse. Sie kann aber auch nicht zwischen zwei endlichen Zahlen hin und her schwanken; denn wenn wir die erste Summe mit S_n, die zweite mit S_{n+1} bezeichnen, so wird offenbar die erste, weil aus lauter positiven Gliedern bestehend, mit wachsendem n immer grösser; umgekehrt wird die zweite (S_{n+1}) mit wachsendem n immer kleiner, da hier der Minuend constant ist, der Subtrahend dagegen mit n wächst. Da aber beide stets zwischen $u_1 - u_2$ und u_1 liegen, so muss es eine zwischen diesen zwei Zahlen liegende feste Grenze geben, der sich S_{n+1} von oben, S_n aber dagegen von unten nähert; folglich ist die Reihe convergent.

Diese wenigen Sätze reichen vollkommen aus, um die Convergenz der in den Kreis unserer Betrachtung fallenden unendlichen Reihen zu beurtheilen. Bei den nun folgenden Reihenentwicklungen stützen wir uns auf folgenden Satz:

289. Lehrsatz: *Sollen zwei nach fallenden oder steigenden Potenzen der Variabeln x geordnete Polynome für alle möglichen Werthe von x einander gleich sein (d. h. sollen sie identisch sein), so müssen die Coeffizienten der gleichhohen Potenzen von x auf beiden Seiten einander gleich sein.*

Sei $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ (1) eine identische Gleichung, so behaupten wir:

$$A_0 = a_0, \quad A_1 = a_1, \quad A_2 = a_2, \quad A_3 = a_3 \text{ etc.}$$

Beweis: Die Gleichung (1) gilt nach Voraussetzung für jeden Werth von x, also auch für $x = 0$, woraus folgt: $A_0 = a_0$. Indem wir diese von Gleichung (1) subtrahiren, und zugleich beide Seiten durch x dividiren, kommt

$$(2) \quad A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots$$

Diese Gleichung ist ebenfalls eine identische, gilt also auch

für $x=0$, woraus folgt: $A_1=a_1$. Indem wir diese von (2) subtrahiren und das Resultat durch x dividiren, kommt

$$(3) \quad A_2+A_3x+\ldots=a_2+a_3x+\ldots$$

die wieder eine identische Gleichung ist, daher für $x=0$ das Resultat liefert: $A_2=a_2$ u. s. f., w. z. b. w.

Zusatz. Man könnte die Gleichung (1) auch so schreiben:

$$(\alpha) \quad A_0-a_0+(A_1-a_1)x+(A_2-a_2)x^2+(A_3-a_3)x^3+\ldots=0$$

und da nun, wie wir gesehen haben, die Identität der Gleichung (1) erfordert, dass $A_0=a_0$, $A_1=a_1$, $A_2=a_2$ etc., so stellt sich heraus, dass in der identischen Gleichung (α) die sämmtlichen Coeffizienten einzeln $=0$ sein müssen. Man kann daher den obigen Lehrsatz auch so aussprechen: Soll ein Polynom identisch $=0$ sein, so müssen seine sämmtlichen Coeffizienten einzeln $=0$ sein.

C. Entwicklung einiger Funktionen in unendliche Reihen.

290. Bei den nun folgenden Reihenentwicklungen werden wir uns der Methode der unbestimmten Coeffizienten bedienen und dabei immer den Gang einschlagen, dass wir für den nämlichen Ausdruck zwei unendliche Reihen aufzustellen suchen, durch deren Identifizirung sich dann das zwischen den zu bestimmenden Coeffizienten bestehende Abhängigkeitsgesetz ergibt. Hiebei setzen wir allerdings zuerst a priori die Möglichkeit einer Entwicklung der Funktion in eine unendliche Reihe von bestimmter Form voraus werden aber jedesmal durch eine Convergenzuntersuchung die Berechtigung nachweisen, die gegebene Funktion der gefundenen unendlichen Reihe gleich zu setzen und das Werthengebiet angeben, innerhalb dessen die Reihe den Werth der Funktion repräsentirt.

Es ist nämlich keineswegs ohne Weiteres erlaubt, eine auf irgend einem Wege erhaltene unendliche Reihe der erzeugenden Funktion gleichzusetzen. Nur wenn die erhaltene Reihe convergent ausfällt, kann sie als den Werth jener Funktion repräsentirend angesehen werden. So wenn wir z. B. die Funktion $\frac{a}{1-x}$ durch Ausführung der Division entwickeln, so erhalten wir nach Bestimmung der n ersten Glieder des Quotienten den Rest ax^n und es ist daher $\frac{ax^n}{1-x}$ der Bruch, welcher dem aus n Gliedern bestehenden gan-

zen Quotienten noch beigefügt werden muss, um den vollständigen Quotienten zu bekommen, d. h. es ist

$$(1)\quad \frac{a}{1-x} = a+ax+ax^2+ax^3+\ldots ax^{n-1}+\frac{ax^n}{1-x}$$

Nun erkennt man sofort Folgendes:

1. Wenn $x<1$, so wird x^n und damit auch das Restglied $\frac{ax^n}{1-x}$ mit unendlich wachsendem ~~x~~ /n verschwinden, so dass in diesem Fall wirklich $a+ax+ax^2+\ldots$ in inf. $=\frac{a}{1-x}$ gesetzt werden kann.

2. Ist dagegen $x>1$, so wird x^n über alle Grenzen wachsen und das Restglied $\frac{ax^n}{1-x}$ ist eine über alle Grenzen wachsende negative Zahl, die stets der Reihe beigefügt werden müsste, um den Werth des Quotienten $\frac{a}{1-x}$ zu bekommen; es wird also in diesem Fall die unendliche Reihe $a+ax+ax^2+ax^3+\ldots$ in inf. nicht $=\frac{a}{1-x}$ gesetzt werden dürfen.

3. Ist endlich $x=1$, so wird das Restglied $\frac{a}{1-x}=\frac{a}{1-1}=\infty$ und es wäre auch hier sinnlos, die unendliche Reihe $=\frac{a}{1-x}$ zu setzen.

So werden wir auch zeigen, dass $(a+x)^m = a^m\left(1+\frac{x}{a}\right)^m$ für ein positives gebrochenes, sowie für ein negatives m in eine unendliche Reihe entwickelt werden kann, deren Coeffizienten nach demselben Gesetz gebildet sind, wie wenn m eine ganze positive Zahl, dass aber die so erhaltene unendliche Reihe gar nicht immer den Werth von $(a+x)^m$ repräsentirt, sondern nur dann, wenn $a>x$ oder $\frac{x}{a}<1$ ist.

Exponentialreihen. Reihen für a^x und e^x.

291. Wenn überhaupt eine nach steigenden Potenzen von x geordnete unendliche Reihe existirt, welche den Werth von a^x darstellt, so werden wir sie vorläufig von der Form $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots.$ voraussetzen dürfen. Soll dieselbe identisch $=a^x$ sein, so muss

sie für $x = 0$ auf $a^0 = 1$ sich reduziren, das von x unabhängige Glied derselben also $= 1$ sein. Wir können daher setzen:

$$(1)\quad a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \ldots.$$

worin A, B, C, D, E etc. noch zu bestimmende, von x unabhängige Coeffizienten bedeuten. Es müsste dann natürlich ebenso

$$(2)\quad a^y = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + \ldots.$$

Wenn wir diese Gleichungen mit einander multipliziren und berücksichtigen, dass für jedes reelle x und y man hat $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ und rechts gleich nach steigenden Potenzen von y ordnen, so kommt:

$$(3)\ a^{x+y} = (1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + ..) + (A + A^2x + ABx^2 + ACx^3 + ADx^4 + \ldots)y$$
$$+ (B + BAx + B^2x^2 + BCx^3 + \ldots)y^2 + \ldots$$

Wir können aber noch eine zweite unendliche Reihe für a^{x+y} erhalten, wenn wir in der hypothetisch angenommenen Reihe (1) die Variable x durch $x+y$ ersetzen, wodurch wir bekommen:

$$a^{x+y} = 1 + A(x+y) + B(x+y)^2 + C(x+y)^3 + D(x+y)^4 + E(x+y)^5 + \ldots$$

oder, entwickelt und nach steigenden Potenzen von y geordnet:

$$(4)\ a^{x+y} = (1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + ..) + (A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \ldots)y$$
$$+ (B + 3Cx + 6Dx^2 + 10Ex^3 + \ldots)y^2 + \ldots$$

Die rechten Seiten von (3) und (4) müssen, da beide den Werth von a^{x+y} darstellen sollen, identisch sein, man hat daher

$$(\alpha)\ 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$$
$$(\beta)\ A + A^2x + ABx^2 + ACx^3 + ADx^4 + .. = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + ..$$
$$(\gamma)\ B + BAx + B^2x^2 + BCx^3 + \ldots = B + 3Cx + 6Dx^2 + 10Ex^3 + \ldots..$$

u. s. f. Die erste ist auch der Form nach eine identische und kann daher nicht zur Bestimmung des Abhängigkeitsverhältnisses zwischen den Coeffizienten A, B, C, D etc. dienen, wohl aber die 2te (α), welche unter Anwendung des Satzes No. 289 gibt:

$$A = A,\ A^2 = 2B,\ AB = 3C,\ AC = 4D,\ AD = 5E \text{ u. s. f.}$$

oder $B = \frac{A^2}{2}$; $C = \frac{A^3}{2 \cdot 3}$; $D = \frac{A^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$; $E = \frac{A^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$

Setzen wir diese Werthe in Gleichung (1) ein, so kommt

$$(6):\ a^x = 1 + Ax + \frac{A^2}{2}x^2 + \frac{A^3}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{A^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \frac{A^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + ..$$

so dass wir also nur noch A zu bestimmen brauchen, um sämmtliche Coeffizienten zu kennen. Nun muss die Gleichung (6) gelten für jeden Werth von x. Indem wir $Ax = 1$ oder $x = \frac{1}{A}$ setzen, reduzirt sich die rechte Seite auf eine Summe bestimmter Zahlen und wir haben daher zur Bestimmung von A die Gleichung:

(7) $a^{\frac{1}{A}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \ldots$ in inf.,

welche Summe wir offenbar leicht mit einem beliebigen Grade von Genauigkeit berechnen können. Wir wollen den Werth derselben mit e bezeichnen, so haben wir: $a^{\frac{1}{A}} = e$ oder

$$\frac{1}{A} \log a = \log e, \text{ woraus } A = \frac{\log a}{\log e}$$

Die gesuchte Exponentialreihe wäre demnach

$$(8)\quad a^x = 1 + \left(\frac{\log a}{\log e}\right) x + \left(\frac{\log a}{\log e}\right)^2 \cdot \frac{x^2}{2} + \left(\frac{\log a}{\log e}\right)^3 \cdot \frac{x^3}{2\,.\,3} + \left(\frac{\log a}{\log e}\right)^4 \cdot \frac{x^4}{2\,.\,3\,.\,4} + \ldots\ldots$$

Wenn wir hier $a = e$ setzen, so bekommen wir die sogenannte natürliche Exponentialreihe, welche, da $\frac{\log a}{\log e} = \frac{\log e}{\log e} = 1$, lauten wird:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \frac{x^5}{1.\,2.\,3\,.\,4\,.\,5} + \ldots\,.$$

oder, zur Abkürzung: $1\,.\,2\,.\,3 \ldots n = n!$ gesetzt:

$$(9).\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\,.$$

Bei Bestimmung der Quotienten $\frac{\log a}{\log e}$ kann man die Logarithmen von a und von e in einem beliebigen Logarithmensystem nehmen. Denkt man sich dieselben genommen in einem System mit der Basis e, so ist $\log e = 1$ und wenn wir $\log e$ kurz durch $\mathrm{Log}\, a$ bezeichnen, so können wir die Gleichung (8) auch so schreiben:

$$(8\alpha):\quad a^x = 1 + (\mathrm{Log}\, a)\,.\,x + (\mathrm{Log}\, a)^2 . \frac{x^2}{2!} + (\mathrm{Log}\, a)^3 \frac{x^3}{3!} + \ldots\,.$$

Würden wir dagegen in Gleichung (8) die Logarithmen von a und e in einem System mit der Basis a nehmen, so wäre $\log a = 1$ und wir bekämen:

$$a^x = 1 + \frac{x}{\log e} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\log e}\right)^2 + \frac{1}{2\,.\,3}\left(\frac{x}{\log e}\right)^3 + \ldots\,.$$

oder $a^x = y$ gesetzt, so dass $x = \log y$:

$$(10)\quad y = 1 + \left(\frac{\log y}{\log e}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\log y}{\log e}\right)^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{\log y}{\log e}\right)^3 + \ldots\,.$$

worin $\log y$ und $\log e$ in dem System mit der Basis a zu nehmen sind. Diese Reihe lehrt die Zahl y bestimmen, wenn man ihren Logarithmus kennt.

292. Nachweis, dass die Zahl e zwischen 2 und 3 liegt und inkommensurabel ist. Es ist

$$e=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\ldots \text{ in inf.},$$

besteht also aus 2 mehr einer Summe von lauter positiven Gliedern, ist daher jedenfalls >2. Um aber einzusehen, dass $e<3$, vergleichen wir den auf 2 folgenden Theil von e mit der geometrischen Progression $\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{2.2.2}+\ldots$, deren Glieder mit Ausnahme des ersten sämmtlich grösser sind als die entsprechenden Glieder der ersten, so wird also

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots$$

Die Progression rechts hat aber zur Summe $\frac{a}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$ $=1$; es ist also $\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots$ kleiner als 1 und somit $e<3$. Um noch einzusehen, dass e inkommensurabel, wollen wir für einen Augenblick annehmen, es könnte e kommensurabel, etwa $=\frac{p}{q}$ sein, wo p und q positive ganze Zahlen bedeuten, so dass

$$\frac{p}{q}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\ldots\frac{1}{2.3\ldots q}+\frac{1}{2.3\ldots q(q+1)}+\frac{1}{2.3..q(q+1)(q+2)}+\ldots$$

Multipliziren wir beide Seiten dieser Gleichung mit $2.3.4\ldots q$, so kommt

$$2.3.4\ldots(q-1)p=2.2.3\ldots q+3.4\ldots q+\ldots 1+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\ldots$$

Links haben wir ein Produkt von ganzen Zahlen, was wieder eine ganze Zahl M sein wird; die q ersten Glieder rechts sind ebenfalls ganze Zahlen, deren Summe wir mit N bezeichnen wollen, so erhalten wir:

$$M=N+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}+\ldots$$

Allein die Summe der auf N folgenden ächten Brüche ist offenbar kleiner als die Summe der geometrischen Progression $\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^3}+\ldots$, welche $\frac{1}{q+1}$ als erstes Glied und

zugleich als Quotienten hat und deren Summe daher $= \frac{\frac{1}{q+1}}{1-\frac{1}{q+1}}$

$= \frac{1}{q}$. Es würde uns also die Annahme, dass $e = \frac{p}{q}$ sein könnte, auf den Schluss führen, dass eine ganze Zahl mehr einem Bruch, der $< \frac{1}{q}$, gleich einer ganzen Zahl sein könnte, was unmöglich ist; die Annahme ist daher unzulässig.

293. Convergenzuntersuchung. Wir wollen noch untersuchen, für welche Werthe der Variabeln x die Reihen (8), (9) und (10) convergent bleiben.

Nehmen wir zunächst die einfachere Reihe (9), so ist

$$u_{n+1} = \frac{x^n}{1.2.3.4\ldots n}; \quad u_n = \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

woraus folgt $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n}$. Dieser Quotient nähert sich bei unendlich wachsendem n der Grenze Null; er bleibt also von einer gewissen Stelle an jedenfalls beständig kleiner als 1, somit ist die Reihe convergent für jedes beliebige endliche x. Würde man z. B. $x = 1000$ setzen, so wäre der Quotient aus dem 1001ten Gliede durch das vorangehende $= \frac{1000}{1000} = 1$; der Quotient aus dem 1002ten Gliede durch das 1001te $= \frac{1000}{1001}$ und von da an bleibt der Quotient eines jeden spätern Gliedes durch das vorangehende beständig kleiner als 1; somit ist die Reihe auch für $x = 1000$ convergent.

Bei der allgemeinern Reihe (8) hat man:

$$u_{n+1} = \left(\frac{\log a}{\log e}\right)^n \cdot \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}; \quad u_n = \left(\frac{\log a}{\log e}\right)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

somit
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\log a}{\log e} \cdot \frac{x}{n}$$

Da nun der erste Faktor constant, der zweite $\left(\frac{x}{n}\right)$ aber bei unendlich wachsendem n sich der Grenze Null nähert für jedes endlliche x, so wird auch das Produkt $\left(\frac{\log a}{\log e}\right) \cdot \frac{x}{n}$ noch dieselbe Eigenschaft besitzen und somit die Reihe (8) ebenfalls convergent sein; nur wird für Werthe von a, die grösser als e, die Reihe (8) langsamer convergiren, als die Reihe (9), weil man in (8) weiter

als in (9) fortschreiten muss, um an die Stelle zu gelangen, von welcher an der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ beständig kleiner als 1 wird.

Betrachten wir endlich die Reihe (10), so wird hier $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{\log y}{\log e}\right) \cdot \frac{1}{n}$, was für ein unbegrenzt wachsendes n die Null zur Grenze hat; es ist daher auch diese Reihe convergent für jedes endliche y.

294. Logarithmische Reihen. Wir verbinden hier die Variable x noch mit einer Constanten und suchen $\log(1+x)$ in eine unendliche Reihe zu entwickeln und nicht etwa $\log x$, welche, da $\log 0 = -\infty$, für $x = 0$ divergent ausfallen müsste. Die Reihe für $\log(1+x)$ muss einmal so beschaffen sein, dass sie für $x=0$ sich auf $\log 1 = 0$ reduzirt; sie wird also kein von x unabhängiges Glied enthalten können und wir setzen daher

$$(1) \quad \log(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \ldots$$

Es frägt sich also nur, ob die Constanten A, B, C, D etc. sich so bestimmen lassen, dass die Reihe rechts identisch wird mit $\log(1+x)$. Wir lassen nun x in $x+y$ übergehen und bekommen so

$$\log(1+x+y) = A(x+y) + B(x+y)^2 + C(x+y)^3 + D(x+y)^4 + E(x+y)^5 + \ldots$$

oder, entwickelt und nach steigenden Potenzen von y geordnet:

$$(2) \quad \log(1+x+y) =$$
$$(Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots) + (A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+5Ex^4+\ldots)\,y$$
$$+ (B+3Cx+6Dx^2+\ldots)\,y^2 + \ldots$$

Nun ist $1+x+y = (1+x)\left(1+\frac{y}{1+x}\right)$; daher

$$\log(1+x+y) = \log(1+x) + \log\left(1+\frac{y}{1+x}\right).$$ Für $\log\left(1+\frac{y}{1+x}\right)$ bekommen wir aber sofort eine nach steigenden Potenzen von y geordnete Reihe, wenn wir in (1) x ersetzen durch $\frac{y}{1+x}$, wodurch

$$\log\left(1+\frac{y}{1+x}\right) = A \cdot \frac{y}{1+x} + B\left(\frac{y}{1+x}\right)^2 + C\left(\frac{y}{1+x}\right)^3 + D\left(\frac{y}{1+x}\right)^4 + \ldots$$

und somit

$$(3) \quad \log(1+x+y) = \log(1+x) + \frac{A}{1+x} \cdot y + \frac{B}{(1+x)^2} y^2 + \frac{C}{(1+x)^3} \cdot y^3 + \ldots$$

Diese in (2) und (3) für $\log(1+x+y)$ erhaltenen unendlichen Reihen müssen identisch sein, woraus nach 289 folgt:

(α) $Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots = \log(1+x)$

(β) $A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+5Ex^4+\ldots = \dfrac{A}{1+x}$

(γ) $B+3Cx+6Dx^2+\ldots\ldots = \dfrac{B}{(1+x)^2}$ u. s. f.

Hier ist (α) die ursprüngliche, hypothetisch angenommene Reihe, liefert uns also keine Relation zur Bestimmung der Coeffizienten; dagegen folgt aus (β):

$$(A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+5Ex^4+\ldots)(1+x) = A$$

oder entwickelt:

$$A+(2B+A)x+(3C+2B)x^2+(4D+3C)x^3+(5E+4D)x^4+\ldots = A$$

oder

(4) $(2B+A)x+(3C+2B)x^2+(4D+3C)x^3+(5E+4D)x^4+\ldots = 0$

was wieder eine identische Gleichung ist; daher nach No. 289. Zusatz:

$$2B+A=0 \mid 3C+2B=0 \mid 4D+3C=0 \mid 5E+4D=0 \text{ etc.}$$

woraus $B=-\dfrac{A}{2}$, $C=+\dfrac{A}{3}$, $D=-\dfrac{A}{4}$, $E=+\dfrac{A}{5}$ u. s. f.

Somit haben wir einmal:

$\log(1+x) = Ax - \dfrac{A}{2}x^2 + \dfrac{A}{3}x^3 - \dfrac{A}{4}x^4 + \dfrac{A}{5}x^5 -$ etc. oder

(5) $\log(1+x) = A\left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots\ldots\right)$

295. Bestimmung von A. Indem wir beide Seiten der Gleichung (5) durch x dividiren, kommt

$$\frac{\log(1+x)}{x} = A\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \ldots\ldots\right),$$

aus welcher für $x=0$ folgt:

$\left[\dfrac{\log(1+x)}{x}\right]_{x=0} = A.$ Es ist somit A gleich dem Werth, welchen der Quotient $\dfrac{\log(1+x)}{x}$ für $x=0$ annimmt. Allein es ist

$\left[\dfrac{\log(1+x)}{x}\right]_{x=0} = \dfrac{\log 1}{0} = \dfrac{0}{0}$ d. h. es erscheint der Werth von A zunächst in der Form der Unbestimmtheit. Dass er aber gleichwol nicht unbestimmt sein kann, ist selbstverständlich, da $\log(1+x)$ nicht beliebige Werthe haben kann. Um den wahren Werth von A zu finden, setzen wir $x=\dfrac{1}{m}$; dann ist

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{\log\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\frac{1}{m}} = m \log\left(1+\frac{1}{m}\right) = \log\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

und da dem $x=0$ der Werth $m=\infty$ entspricht, so hätten wir

$$A = \left[\frac{\log(1+x)}{x}\right]_{x=0} = \left[\log\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]_{m=\infty}$$

Nun ist für ein beliebiges positives und ganzes m:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+m.\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}.\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{1}{m}\right)^3 + \ldots,$$

welche wir auch so schreiben können:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+1+\frac{1}{1\,.\,2}.\frac{m(m-1)}{m\,.\,m} + \frac{1}{1.2.3}.\frac{m(m-1)(m-2)}{m\,.\,m\,.\,m} +$$

$$\frac{1}{1.2.3.4}.\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{m\,.\,m\,.\,m\,.\,m} + \ldots$$ oder endlich

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 2+\frac{1}{2}.\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{2\,.\,3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) +$$

$$\frac{1}{2.3.4}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right) + \ldots\ldots$$

Diese Gleichung gilt für jedes positive ganzzahlige x. Lässt man nun m immer grösser und grösser werden, so convergiren die Subtrahenden $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}$ etc. sämmtlich gegen die Grenze Null und für $m=\infty$ hat man

$$\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]_{m=\infty} = 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\ldots,$$

welche Reihe nichts anderes ist als e; daher

$$A = \left[\frac{\log(1+x)}{x}\right]_{x=0} = \left[\log\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]_{m=\infty} = \log e.$$

Die Gleichung (5) geht daher über in:

$$(6)\quad \log(1+x) = \log e\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots\right)$$

Offenbar würde die Berechnung dieser Reihe am einfachsten, wenn $\log e = 1$ wäre; das ist der Fall, sobald man e als Basis des Logarithmensystems wählt; man nennt dieses Logarithmensystem mit der Basis e das n a t ü r l i c h e und wenn wir, wie in Nro. 291, Gleichung (8α) den natürlichen Logarithmus durch Log. bezeichnen, so bekommen wir aus (6) die Reihe:

$$(7)\quad \mathrm{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \text{etc.}$$

Diese Reihe ist nach Satz 288 convergent für <1 und auch noch für $x=1$; dagegen wird sie divergent, sobald $x>1$; denn der absolute Werth des Quotienten $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ist $= \frac{n}{n+1}\,x$ und wird für $x>1$ von einem bestimmten Gliede an beständig grösser als 1.

Ersetzen wir in Gleichung (7) x durch $-x$, so kommt

$$(8)\ \mathrm{Log}(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \text{etc.}$$

und diese Reihe ist nur noch convergent für $x<1$; für $x=1$ geht sie — dem absoluten Werthe nach — über in die Reihe der reziproken Werthe der natürlichen Zahlen, deren Divergenz früher gezeigt wurde.

Durch Subtraktion der Gleichungen (7) und (8) kommt

$$\mathrm{Log}(1+x) - \mathrm{Log}(1-x) = 2x + 2.\frac{x^3}{3} + 2.\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^7}{7} + \dots \text{ oder}$$

$$(9)\ \mathrm{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\dots\right]$$

die auch nur für $x \overline{\gtrless} 1$ entschieden convergent ist; denn da $u_{n+1} = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ und $u_n = \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, so wird $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n-1}{2n+1}.x^2$, welcher Quotient nur für $x<1$ entschieden unter 1 bleibt.

Um jedoch eine für Berechnung der Logarithmen bequemere Reihe zu bekommen, führen wir eine neue Variable z ein, welche mit x zusammenhängt durch die Relation:

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+z}{n}, \text{ aus welcher folgt: } x = \frac{z}{2n+z}.$$

Ersetzen wir nun in Gleichung (9) $\frac{1+x}{1-x}$ durch $\frac{n+z}{n}$ und gleichzeitig x durch $\frac{z}{2n+z}$, so erhalten wir:

$$\mathrm{Log}\left(\frac{n+z}{n}\right) = 2\left[\frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^7 + \dots\right]$$

oder, da $\mathrm{Log}\left(\frac{n+z}{n}\right) = \mathrm{Log}(n+z) - \mathrm{Log}\,n$,

$$(10)\ \mathrm{Log}(n+z) =$$

$$\mathrm{Log}\,n + 2\left[\frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{z}{2n+2}\right)^7 + \dots\right]$$

welche nun convergent ist für jedes beliebige endliche z, indem der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n-1}{2n+1}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^2$ für jeden Werth von z entschieden kleiner als 1 bleibt. Diese Reihe convergirt sehr rasch und ist desshalb zur Berechnung der Logarithmen in hohem Grade geeignet. Noch bequemer ist die, welche aus derselben hervorgeht, wenn man $z=1$ setzt und welche lautet:

(11) $\text{Log}(n+1) =$

$$\text{Log}\, n + 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2n+1}\right) + \ldots\right]$$

mittelst welcher man aus dem Logarithmus einer beliebigen Zahl n den Logarithmus der um 1 grösseren Zahl finden kann.

296. Mittelst dieser Reihe (11) kann man die Logarithmen der Primzahlen berechnen; die der zusammengesetzten Zahlen ergeben sich daraus unmittelbar. Wollte man z. B. Log 2 berechnen, so brauchte man nur $n = 1$ zu setzen, wodurch $2n+1 = 2+1 = 3$ und da $\text{Log}\,1 = 0$, so hätte man:

$$\text{Log}\,2 = 2[\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3})^3 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3})^5 + \tfrac{1}{7}(\tfrac{1}{3})^7 + \tfrac{1}{9}(\tfrac{1}{3})^9 + \ldots]$$

Zur Berechnung von Log 3 setzen wir $n+1 = 3$, also $n = 2$, $2n+1 = 5$; daher $\text{Log}\,3 = \text{Log}\,2 + 2[\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{5})^3 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{5})^5 + \tfrac{1}{7}(\tfrac{1}{5})^7 + \ldots]$

Um die Berechnung in möglichst zweckmässiger Weise vorzunehmen, berechnen wir erst die ungeraden Potenzen von $\frac{1}{5}$ und erst nachher die einzelnen Glieder der Reihe, wie folgende Darstellung zeigt:

$$\frac{1}{5} = 0{,}2\ .\ .$$
$$\left(\frac{1}{5}\right)^3 = 0{,}008\ \ldots\ldots$$
$$\left(\frac{1}{5}\right)^5 = 0{,}00032$$
$$\left(\frac{1}{5}\right)^7 = 0{,}0000128$$
$$\left(\frac{1}{5}\right)^9 = 0{,}000000512$$
$$\left(\frac{1}{5}\right)^{11} = 0{,}00000002048$$
$$\left(\frac{1}{5}\right)^{13} = 0{,}0000000008192$$

Nun ist $\frac{1}{5} = 0{,}2\ .\ .$

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3 = 0{,}002666666667$$
$$\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 = 0{,}000064\ .\ .\ .\ .$$
$$\frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7 = 0{,}000001828571$$
$$\frac{1}{9}\left(\frac{1}{5}\right)^9 = 0{,}000000056889$$
$$\frac{1}{11}\left(\frac{1}{5}\right)^{11} = 0{,}00000000186$$
$$\frac{1}{13}\left(\frac{1}{5}\right)^{13} = 0{,}000000000063$$

0,20273255405

das Doppelte davon $= 0{,}40546510810$
$\text{Log}\,2 = 0{,}693147180559$
$\text{Log}\,3 = 1{,}09861228866,$
was bis auf 11 Decimalen genau $=$ Log 3.

Bei Berechnung von Log 5 hätte man $n=4$, also $2n+1=9$ und $\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{9}$ zu setzen u. s. f. Man sieht, dass die Reihe immer rascher convergirt, je grösser die Zahl ist, deren Logarithmus berechnet werden muss. Hat man aber den natürlichen Logarithmus einer Zahl bestimmt, so findet man nach Früherem ihren gewöhnlichen Logarithmus, wenn man jenen noch mit der constanten Zahl $\frac{1}{\text{Log}\,10} = 0{,}434294482\ldots$, dem sogenannten Modulus des gewöhnlichen Logarithmensystems, multiplizirt; denn wenn x den künstlichen, y aber den natürlichen Logarithmus irgend einer Zahl bezeichnet, so ist diese sowol durch 10^x, als durch e^y dargestellt und daher $x \log 10 = y \log e$ oder $x = y\,\frac{\log e}{\log 10} = y\left(\frac{1}{\text{Log}\,10}\right)$.

Trigonometrische Reihen.

297. Um die goniometrischen Funktionen $\sin x$ und $\cos x$, in welchen x nicht den in Graden, Minuten und Sekunden ausgedrückten Bogen, sondern eine unbenannte Zahl, den Quotienten aus der Bogenlänge durch den Radius, bedeutet, in unendliche Reihen zu entwickeln, berücksichtigen wir zunächst, dass $\sin -x = -\sin x$, $\cos -x$ aber $=\cos x$, dass also der Sinus eine sogenannte ungerade d. h. eine solche Funktion ist, welche mit dem Argument zugleich ihr Zeichen wechselt, indess der Cosinus eine gerade d. h. eine solche Funktion ist, die vollständig ungeändert bleibt, wenn man x durch $-x$ ersetzt. Es wird daher auch die Sinusreihe so beschaffen sein müssen, dass ihre sämmtlichen Glieder nur das Zeichen, nicht aber den absoluten Werth ändern, wenn man x in $-x$ umsetzt; sie kann somit nur ungerade Potenzen von x enthalten. Umgekehrt muss die Cosinusreihe nicht alterirt werden, wenn man x durch $-x$ ersetzt; sie darf folglich nur gerade Potenzen von x enthalten; weil überdiess $\cos 0 = 1$, so werden wir vorläufig setzen dürfen:

$$(1)\quad \sin x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + Ex^9 + \ldots$$
$$(2)\quad \cos x = 1 + ax^2 + bx^4 + cx^6 + dx^8 + \ldots$$

und unsere Aufgabe ist gelöst, sobald wir A, B, C etc., a, b, c etc. so bestimmen können, dass die Gleichungen (1) und (2) identische werden. Wir suchen nun wieder auf zwei verschiedenen Wegen für $\sin(x+y)$ und $\cos(x+y)$ je zwei unendliche Reihen

abzuleiten. Indem wir einmal in (1) und (2) x in $x+y$ übergehen lassen, bekommen wir

$$\sin(x+y)=A(x+y)+B(x+y)^3+C(x+y)^5+D(x+y)^7+E(x+y)^9+\ldots$$
$$\cos(x+y)=1+a(x+y)^2+b(x+y)^4+c(x+y)^6+d(x+y)^8+\ldots$$

oder, entwickelt und nach steigenden Potenzen von y geordnet:

$$(3)\quad \sin(x+y)=$$
$$(Ax+Bx^3+Cx^5+\ldots)+(A+3Bx^2+5Cx^4+7Dx^6+9Ex^8+\ldots)y$$
$$+(3Bx+10Cx^3+21Dx^5+\ldots)y^2+\ldots.$$

$$(4)\quad \cos(x+y)=$$
$$(1+ax^2+bx^4+cx^6+\ldots)+(2ax+4bx^3+6cx^5+8dx^7+\ldots)y$$
$$+(a+6bx^2+15cx^4+\ldots)y^2+\ldots$$

Nun können wir aber noch auf eine andere Weise für $\sin(x+y)$ und $\cos(x+y)$ unendliche Reihen erhalten. Es ist nämlich

$$(\beta)\quad \begin{cases}\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y\\ \cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y\end{cases}$$

Aus den hypothetisch angenommenen Reihen (1) und (2) folgt, dass auch

$$(1\alpha)\quad \sin y=Ay+By^3+Cy^5+Dy^7+\ldots.$$
$$(2\alpha)\quad \cos y=1+ay^2+by^4+cy^6+\ldots.$$

und wir können durch Combination dieser beiden mit den Reihen (1) und (2) die 4 Produkte $\sin x\cos y$, $\cos x\sin y$, $\cos x\cos y$ und $\sin x\sin y$ bilden und durch Addition der beiden ersten eine unendliche Reihe für $\sin(x+y)$, durch Subtraktion der zwei letzten eine für $\cos(x+y)$ bekommen. Wir erhalten so:

$$(5)\quad \sin(x+y)=$$
$$(Ax+Bx^3+Cx^5+\ldots)+(A+Aax^2+Abx^4+Acx^6+Adx^8+\ldots)y$$
$$+(Aax+Bax^3+Cax^5+\ldots)y^2+\ldots$$

$$(6)\quad \cos(x+y)=$$
$$(1+ax^2+bx^4+cx^6+\ldots)-(A^2x+ABx^3+ACx^5+ADx^7+\ldots)y$$
$$+(a+a^2x^2+abx^4+acx^6+\ldots)y^2-\text{etc.}$$

Da die Reihen (3) und (5) beide den Werth von $\sin(x+y)$ darstellen, so müssen sie identisch sein; ebenso die Reihen (4) und (6) für $\cos(x+y)$. Es ergeben sich daraus wieder Bedingungsgleichungen, von welchen wir nur diejenigen benutzen wollen, die sich aus der Gleichsetzung der Coeffizienten der ersten Potenzen von y ergeben, nämlich

$$(7)\begin{cases}A+3Bx^2+5Cx^4+7Dx^6+9Ex^8+\ldots=A+Aax^2+Abx^4+Acx^6+Adx^8+\ldots\\ 2ax+4bx^3+6cx^5+8dx^7+\ldots=-A^2x-ABx^3-ACx^5-ADx^7-\text{etc.}\end{cases}$$

Hieraus folgen zwei Gruppen von Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} 1., & A=A \\ 2., & 3B=Aa \\ 3., & 5C=Ab \\ 4., & 7D=Ac \\ 5., & 9E=Ad \end{array}\right\} (\gamma) \text{ etc.} \qquad \left.\begin{array}{ll} 1., & 2a=-A^2 \\ 2., & 4b=-AB \\ 3., & 6c=-AC \\ 4., & 8d=-AD \end{array}\right\} (\delta) \text{ etc.}$$

Aus $(1,\delta)$ folgt $a=-\frac{A^2}{2}$; diess in (2γ) gesetzt, gibt $B = -\frac{A^3}{2.3}$; mit Hülfe dessen finden wir aus (2) in (δ) $b=+\frac{A^4}{2.3.4}$; unter Benutzung dessen gibt die Gleichung (3) in (γ): $C=+\frac{A^5}{2.3.4.5}$ u. s. f. Wir bekommen so folgende Werthe:

$$B=-\frac{A^3}{2.3} \qquad a=-\frac{A^2}{2}$$

$$C=+\frac{A^5}{2.3.4.5} \qquad b=+\frac{A^4}{2.3.4}$$

$$D=-\frac{A^7}{2.3....7} \qquad c=-\frac{A^6}{2.3.4.5.6}$$

$$E=+\frac{A^9}{2.3.4....9} \qquad d=+\frac{A^8}{2.3....8} \text{ etc.,}$$

durch deren Substitution in (1) und (2) sich ergibt:

$$8., \quad \sin x = Ax - \frac{A^3}{2.3}x^3 + \frac{A^5}{2.3.4.5}x^5 - \frac{A^7}{2.3...7}x^7 + \ldots$$

$$9., \quad \cos x = 1 - \frac{A^2}{2}x^2 + \frac{A^4}{2.3.4}x^4 - \frac{A^6}{2.3..6}x^6 + \frac{A^8}{2.3....8}x^8 - \text{etc.,}$$

so dass also nur noch A zu bestimmen ist.

298. Bestimmung von A. Wenn wir in Gleichung (8) beide Seiten durch x dividiren, so erhalten wir:

$$\frac{\sin x}{x} = A - \frac{A^3}{2.3}x^2 + \frac{A^5}{2.3.4.5}x^4 - \text{etc.}$$

welche für $x=0$ gibt: $\left(\frac{\sin x}{x}\right)_{x=0} = A.$

Allein $\left(\frac{\sin x}{x}\right)_{x=0} = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$; es erscheint demnach der Werth von A zunächst in unbestimmter Form. Um dessen wahren Werth zu finden, bedenken wir, dass $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, woraus $\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = \cos x$ folgt.

Wird die Bogenzahl x unendlich klein, so verschwindet der

Unterschied zwischen $\operatorname{tg} x$ und x und wir dürfen daher bei unendlich kleinem x auch setzen:

$\frac{\sin x}{x} = \cos x$, eine Gleichung, die um so genauer ist, je kleiner x gedacht wird. Daher

$A = \left(\frac{\sin x}{x}\right)_{x=0} = (\cos x)_{x=0} = 1$ und wir haben also für $\sin x$ und $\cos x$ die folgenden Reihen:

$$(10).\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \text{etc.}$$

$$(11).\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$$

Bei Beachtung des Gesetzes der Exponenten dieser beiden Reihen erkennt man leicht, dass der absolute Werth des n ten Gliedes bei der Sinusreihe $= \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, bei der Cosinusreihe aber $= \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$ und da in beiden die Glieder geraden Ranges negativ, die ungeraden Ranges aber positiv sind, so darf man ihnen nur den Faktor $(-1)^{n-1}$ beigeben, der $= -1$ bei geradem n und $= +1$ bei ungeradem n. Daher das $n$te Glied der Sinusreihe $= (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, das $n$te Glied des Cosinusreihe $= (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$

Um die Convergenz zu prüfen, betrachten wir die Reihe der absoluten Werthe der Glieder; so ist

$$u_{n+1} = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad u_n = \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!};\ \text{daher}$$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2n(2n+1)} x^2$. Mag nun x noch so gross gewählt werden, wir kommen stets zu einem Gliede, für welches $2n(2n+1) > x^2$ oder $\frac{x^2}{2n(2n+1)} < 1$ wird und von welchem an dieser Quotient beständig kleiner als 1 bleibt. Die Reihe der absoluten Werthe ist daher schon convergent; die Sinusreihe selber, die noch überdiess einen regelmässigen Zeichenwechsel darbietet, ist daher um so mehr convergent. Gleiches gilt von der Cosinusreihe, bei welcher $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^2}{(2n-1) \cdot 2n}$.

299. Binomialreihe für gebrochene und negative Exponenten. Für ein positives ganzes m hatten wir:

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2}x^2 + \ldots . max^{m-1} + x^m$$

und es ist nun zunächst leicht einzusehen, dass auch für den Fall eines gebrochenen oder negativen m wenigstens die beiden ersten Glieder nach demselben Gesetz gebildet sind, das wir für positive ganze Exponenten erkannt haben, dass also auch

$$(a+x)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} + \frac{p}{q} a^{\frac{p}{q}-1} x + \ldots .$$

$$(a+x)^{-m} = a^{-m} - ma^{-m-1} x + \ldots .$$

Es ist nämlich $(a+x)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a+x)^p} = \sqrt[q]{a^p + pa^{p-1}x + \ldots . x^p}$
Um die $q$te Wurzel aus diesem Polynom zu ziehen, fassen wir dasselbe auf als die $q$te Potenz der zu suchenden Wurzel, werden also sein erstes Glied a^p als die $q$te Potenz des ersten Wurzelgliedes, das zweite $pa^{p-1}x$ aber als das q fache Produkt aus der $(q-1)$ten Potenz des ersten Gliedes in das zu suchende 2te Glied ansehen, so dass $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$ das erste, der Quotient aus $pa^{p-1}x$ durch $q\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}$ d. h. $\frac{p}{q} a^{\frac{p}{q}-1} x$ aber das 2te Glied der Wurzel sein muss. Wenn $(a+x)^p$ keine vollkommene $q$te Potenz d. h. $\frac{p}{q}$ keine ganze Zahl ist, so wird die Wurzelausziehung sich nie schliessen. Wir werden also eine unendliche Reihe von Gliedern bekommen, geordnet nach steigenden Potenzen von x, und da $(a+x)^{\frac{p}{q}}$ homogen sein muss, so wird der Exponent von a von Glied zu Glied um eben so viel abnehmen, als der von x zunimmt. Man muss daher bekommen:

$$(a+x)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} + \frac{p}{q} a^{\frac{p}{q}-1} x + Aa^{\frac{p}{q}-2} x^2 + Ba^{\frac{p}{q}-3} x^3 + \ldots .$$

Ist m negativ, hat man also $(a+x)^{-m}$, so ist

$$(a+x)^{-m} = \frac{1}{(a+x)^m} = \frac{1}{a^m + ma^{m-1}x + \binom{m}{2} a^{m-2}x^2 + \ldots x^m}$$

und die unmittelbare Ausführung der Division gibt als erste Glieder des Quotienten a^{-m} und $-ma^{m-1}x$; auch hier schliesst sich die Operation nicht. Ob also m ganz oder gebrochen, positiv oder negativ sei, so ist stets

$$(1) \quad (a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + Aa^{m-2}x^2 + \ldots Ma^{m-r}x^r + Na^{m-r-1}x^{r+1} + Pa^{m-r-2}x^{r+2} + \ldots .$$

worin A, B . . ., M, N, P etc. noch zu bestimmende, von a und x unabhängige Zahlen bedeuten. Zu ihrer Bestimmung lassen wir in Gleichung (1) das ein mal x in $x+y$, das anderemal a in $a+y$ übergehen, so erhalten wir:

$$(2)\quad (a+x+y)^m = a^m + ma^{m-1}(x+y) + Aa^{m-2}(x+y)^2 + \ldots\ldots$$
$$+Ma^{m-r}(x+y)^r + Na^{m-r-1}(x+y)^{r+1} + Pa^{m-r-2}(x+y)^{r+2} + \ldots$$

$$(3)\quad (a+y+x)^m = (a+y)^m + m(a+y)^{m-1}x + A(a+y)^{m-2}x^2 + \ldots.$$
$$+M(a+y)^{m-r}x^r + N(a+y)^{m-r-1}x^{r+1} + \ldots.$$

Da nun $a+x+y=a+y+x$, so müssen die rechten Seiten der Gleichungen (2) und (3) identisch sein. Wenn man dieselben daher entwickelt und nach steigenden Potenzen von y ordnet, so müssen die Coeffizienten der gleichhohen Potenzen von y in beiden gleich sein. Die rechte Seite von (2) können wir ohne weiteres entwickeln, da die Exponenten des Binoms $x+y$ positive ganze Zahlen sind; dagegen sind die Exponenten m, $m-1$ etc. des Binoms $a+y$ in Gleichung (3) beliebige Zahlen; wir können daher von diesen nicht mehr als die 2 ersten Glieder bilden, von welchen wir wissen, dass sie demselben Gesetz unterworfen sind, wie bei positiven ganzzahligen Exponenten. Es genügt uns aber, die Glieder mit der ersten Potenz von y zu kennen. Aus (2) finden wir als Summe der Glieder mit y:

$$\left[ma^{m-1} + 2Aa^{m-2}x + \ldots rMa^{m-r}x^{r-1} + (r+1)Na^{m-r-1}x^r + (r+2)Pa^{m-r-2}x^{r+1} + \ldots.\right]y$$

und aus (3):

$$[ma^{m-1} + m(m-1)a^{m-2}x + (m-2)Aa^{m-3}x^2 + \ldots$$
$$(m-r)Ma^{m-r-1}x^r + (m-r-1)Na^{m-r-2}x^{r+1} + \ldots]y$$

Da diese beiden Coeffizienten von y einander gleich sein müssen, so bekommt man die Gleichung:

$$ma^{m-1} + 2Aa^{m-2}x + \ldots$$
$$rMa^{m-r}x^{r-1} + (r+1)Na^{m-r-1}x^r + (r+2)Pa^{m-r-2}x^{r+1} + \ldots$$
$$= ma^{m-1} + m(m-1)a^{m-2}x + \ldots$$
$$(m-r)Ma^{m-r-1}x^r + (m-r-1)Na^{m-r-2}x^{r+1} + \ldots,$$

was erfordert, dass die Coeffizienten der gleich hohen Potenzen von x einander gleich seien, dass also

$$2Aa^{m-2} = m(m-1)a^{m-2} \qquad A = \frac{m(m-1)}{2}$$

. . . .

$$(r+1)Na^{m-r-1} = (m-r)Ma^{m-r-1} \qquad \text{oder} \qquad N = M\cdot\left(\frac{m-r}{r+1}\right)$$

$$(r+2)Pa^{m-r-2} = (m-r-1)Na^{m-r-2} \qquad P = N\left(\frac{m-r-1}{r+2}\right)$$

Wir sehen also: der Coeffizient A des 3ten Gliedes ist aus dem Coeffizienten m des 2ten gebildet, indem man diesen mit $m-1$ d. h. mit dem Exponenten von a in diesem Gliede multiplizirt und das Produkt durch die Rangzahl 2 dividirt. So ist der Coeffizient N des $(r+2)$ten Gliedes aus dem Coeffizienten des vorangehenden gebildet, indem man diesen mit dem Exponenten $m-r$ von a in diesem Gliede multiplizirt und das Produkt durch die Rangzahl $r+1$ dieses Gliedes dividirt u s. f. Das ist aber das nämliche Gesetz, nach welchem bei der Binomialreihe für ganze positive Exponenten jeder folgende Coeffizient aus dem vorangehenden abgeleitet werden kann. Jenes Bildungsgesetz gilt also nicht nur für die beiden ersten, sondern auch für alle folgenden Glieder.

Nun ist aber $a+x=a\left(1+\frac{x}{a}\right)$; daher $(a+x)^m=a^m\left(1+\frac{x}{a}\right)^m$ und wir dürfen daher nur $\left(1+\frac{x}{a}\right)^m$ bilden, um daraus durch Multiplikation mit a^m auch $(a+x)^m$ zu bekommen. Bezeichnen wir zur Abkürzung $\frac{x}{a}$ mit z, so ist

$$(1+z)^m=1+mz+\frac{m(m-1)}{1.2}z^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}z^3+\dots.$$

eine Reihe, die aus $m+1$ Gliedern besteht, so oft m eine positive ganze Zahl ist, dagegen sich in's Unendliche erstreckt, wenn m gebrochen oder negativ ist. In diesem Fall darf man aber die Reihe rechts nur dann der erzeugenden Funktion gleichsetzen, wenn sie convergent ausfällt. Um die Bedingung ihrer Convergenz zu erkennen, bilden wir $\frac{u_{n+1}}{u_n}$; es ist

$$u_{n+1}=\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}z^n$$

$$u_n=\frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{1.2.3\dots(n-1)}z^{n-1};$$

daher $\frac{u^{n+1}}{u_n}=\frac{m-n+1}{n}.z$. Der erste Faktor nähert sich bei unbegrenzt wachsendem n der Grenze 1 (dem absoluten Werthe nach); daher bleibt das Produkt nur dann entschieden <1, wenn $z<1$. Die Reihe ist somit nur convergent, wenn $z=\frac{x}{a}$ kleiner als 1 oder $a>x$ ausfällt und nur unter dieser Bedingung darf $(a+x)^m$ für

ein m, das nicht positiv und ganz ist, der unendlichen Reihe gleichgesetzt werden.

Anmerkung. Man könnte sich der binomischen Reihe auch zur Bestimmung von Wurzeln aus gegebenen Zahlen bedienen. So ist

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\tfrac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1\,.\,2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\ldots \text{ oder}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\tfrac{1}{2}x-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1.2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2.3}x^3-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3.4}x^4+\ldots \text{ oder}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\tfrac{1}{2}x-\frac{1.1}{2.4}x^2+\frac{1.1.3}{2.4.6}x^3-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}x^4+\ldots\ldots$$

Ebenso hätte man: $(1+x)^{\frac{1}{3}}=$

$$1+\tfrac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{1\,.\,2}x^2+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)(\frac{1}{3}-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}x^4+\ldots \text{ oder}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\tfrac{1}{3}x-\frac{1.2}{3.6}x^2+\frac{1.2.5}{3.6.9}x^3-\frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}x^4+\ldots$$

Wollte man nun z. B. $\sqrt[3]{29}$ bestimmen, so könnte man setzen: $29=27+2=27(1+\frac{2}{27})$; daher $\sqrt[3]{29}=\sqrt[3]{27(1+\frac{2}{27})}=3(1+\frac{2}{27})^{\frac{1}{3}}$; und somit

$$\sqrt[3]{29}=3\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{27}-\frac{1.2}{3.6}\left(\frac{2}{27}\right)^2+\frac{1.2.5}{3.6.9}\left(\frac{2}{27}\right)^3-\frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}\left(\frac{2}{27}\right)^4+\ldots\right]$$

und wenn man in dieser Reihe bis zu dem Gliede fortschreiten würde, welches nicht mehr auf die Einheiten der 6ten Decimale influirt, so bekäme man durch Zusammenziehung dieser Glieder und Multiplikation des Resultates mit 3 die gesuchte Wurzel bis auf $\frac{1}{10^6}$ genau.

300. Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion für die Basis e und den trigonometrischen Funktionen $\sin x$ und $\cos x$. In No. 291 haben wir die Reihe abgeleitet:

$$(1)\quad e^x=1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots$$

und deren Convergenz für beliebige endliche x nachgewiesen. Wenn wir nun hier den Exponenten x durch ix ersetzen und nachsehen, was aus der rechts stehenden Reihe dann wird, so haben wir aus doppeltem Grunde kein Recht, die dadurch aus (1) entstandene Gleichung

$$(2)\quad e^{ix}=1+ix+\frac{i^2x^2}{1.2}+\frac{i^3x^3}{1.2.3}+\frac{i^4x^4}{1.2.3.4}+\ldots.$$

als richtig zuzulassen, weil einerseits die Exponentialgrösse e^{ix} ihre bisherige Bedeutung als Potenz verliert und anderseits ein für reelle Argumente bewiesener Satz durchaus nicht ohne weiteres auf imaginäre und complexe Variable ausgedehnt werden darf. Wir wollen nun aber unter e^{ix}, das als Potenz keine Bedeutung mehr hat, nichts anderes verstehen, als das, was aus der Reihe (1) wird, wenn man dort das Argument x durch ix ersetzt, so dass also die Gleichung (2) als eine Definitionsgleichung aufzufassen ist. Bezeichnen wir dann zur grösseren Allgemeinheit die Variable mit z, so können wir schreiben

$$(3)\quad e^{z}=1+z+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^4}{1.2.3.4}+\ldots.$$

und diese Gleichung ist dann eine bewiesene, so lange z reell bleibt, wird dagegen eine Definitionsgleichung, sobald z imaginäre und complexe Zahlenwerthe annimmt.

Betrachten wir nun die Gleichung (2) und berücksichtigen, dass

$$\begin{array}{ll} i^2=-1 & i^6=-1 \\ i^3=-i & i^7=-i \\ i^4=+1 & i^8=+1 \\ i^5=+i & i^9=+i \end{array}$$

u. s. f., so geht dieselbe über in

$$e^{ix}=1+ix-\frac{x^2}{1.2}-\frac{ix^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{ix^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^6}{1.2..6}-\frac{ix^7}{1.2.3..7}+..$$

und wenn wir nun hier die reellen Glieder in eine, die imaginären in eine zweite Zeile bringen, so kommt

$$e^{ix}=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3..6}+\frac{x^8}{1.2.3...8}-\ldots$$
$$+i\left[x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3...7}+\ldots.\right],$$

wo nun die erste Zeile die Reihe für $\cos x$, der Faktor von i in der zweiten aber die für $\sin x$ ist, so dass

$$(4)\quad e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

Ersetzen wir hier x durch $-x$ und berücksichtigen, dass $\cos -x=\cos x$ und $\sin -x=-\sin x$, so haben wir:

$$(5)\quad e^{-ix}=\cos x-i\sin x$$

durch deren Addition und Subtraktion sich unmittelbar ergibt:

$$\left.\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\[2ex] \sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\end{array}\right\}\quad(6)$$

Aus den Gleichungen (4) und (5) folgt ferner:

$$ix = \text{Log}(\cos x + i \sin x)$$

$$-ix = \text{Log}(\cos x - i \sin x); \text{ somit}$$

$$2ix = \text{Log}\left(\frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x}\right) = \text{Log}\left(\frac{1 + i \,\text{tg}x}{1 - i \,\text{tg}x}\right)$$

und

$$x = \frac{1}{2i} \text{Log}\left(\frac{1 + i \,\text{tg}x}{1 - i \,\text{tg}x}\right) \quad (7).$$

Nun hatten wir in No. 295, Gleichung (9):

$$\text{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left[z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \ldots\right]; \text{ somit}$$

$$\text{Log}\left(\frac{1+i\,\text{tg}x}{1-i\,\text{tg}x}\right) = 2\left[i\,\text{tg}x + \frac{(i\,\text{tg}x)^3}{3} + \frac{(i\,\text{tg}x)^5}{5} + \frac{(i\,\text{tg}x)^7}{7} + \ldots\right] \text{ oder}$$

$$\text{Log}\left(\frac{1+i\,\text{tg}x}{1-i\,\text{tg}x}\right) = 2\left[i\,\text{tg}x - i\frac{(\text{tg}x)^3}{3} + i\frac{(\text{tg}x)^5}{5} - i\frac{(\text{tg}x)^7}{7} + \ldots\right]$$

$$\text{Log}\left(\frac{1+i\,\text{tg}x}{1-i\,\text{tg}x}\right) = 2i\left[\text{tg}x - \frac{(\text{tg}x)^3}{3} + \frac{(\text{tg}x)^5}{5} - \frac{(\text{tg}x)^7}{7} + \ldots\right]$$

woraus

$$\frac{1}{2i}\text{Log}\left(\frac{1+i\,\text{tg}x}{1-i\,\text{tg}x}\right) = \text{tg}x - \frac{(\text{tg}x)^3}{3} + \frac{(\text{tg}x)^5}{5} - \frac{(\text{tg}x)^7}{7} + \ldots.$$

und wenn wir dieses in (7) einsetzen, so kommt:

$$x = \text{tg}x - \frac{(\text{tg}x)^3}{3} + \frac{(\text{tg}x)^5}{5} - \frac{(\text{tg}x)^7}{7} + \ldots \quad (8),$$

welche Reihe die Bogenzahl aus der Tangente berechnen lehrt. Sie ist aber nur convergent, so lange $\text{tg}\,x$ nicht grösser als 1; schon für $\text{tg}\,x = 1$ convergirt sie so langsam, dass sie völlig unbrauchbar wäre. Für $\text{tg}\,x = 1$ ist $x = \frac{\pi}{4}$ und man hat somit die Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots \text{ etc. } (9),$$

welche aber, wie gesagt, wegen ihrer geringen Convergenz zur Berechnung von π nicht verwendbar wäre.

Um für die Bestimmung von π eine rascher convergirende Reihe abzuleiten, kann man sich die Bogenzahl $\frac{\pi}{4}$ in eine Summe zweier andern Bogenzahlen α und β zerlegt denken, deren eine α so gewählt wird, dass $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$, dann ist die andere β dadurch bestimmt. Da nämlich $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ und $\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$, so hat man

$$\text{tg}(\alpha+\beta) = 1 \text{ oder } \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta} = 1$$

oder $\quad \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$

$\operatorname{tg}\beta(1+\operatorname{tg}\alpha) = 1 - \operatorname{tg}\alpha$ und somit

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

Es ist also $\frac{\pi}{4}$ gleich der Summe zweier andern Bogenzahlen α und β, deren Tangenten $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ sind. Man darf daher nur in die obige Reihe (8) für $\operatorname{tg} x$ einmal $\frac{1}{2}$, ein andermal $\frac{1}{3}$ setzen und die beiden Resultate addiren. Man bekommt so:

$$(1)\ \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9} - \ldots,$$

$$(2)\ \beta = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9} - \ldots,$$

woraus durch Addition folgt:

$$\alpha+\beta = \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}\right) - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}\right)$$
$$+ \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2^9}+\frac{1}{3^9}\right) - \text{etc.}\ldots,$$

eine Reihe, die ziemlich rasch convergirt.

301. Dass die durch die Gleichung (3) definirte Exponentialgrösse noch alle wesentlichen Eigenschaften der Potenz besitzt, lässt sich leicht einsehen. Denn wenn $z_1 = ix$ und $z_2 = iy$, so hat man

$$e^{z_1} = e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{z_2} = e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

woraus durch Multiplikation sich ergibt

$$e^{z_1}.e^{z_2} \text{ oder } e^{ix}.e^{iy} = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i \sin y)$$
$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i[\sin x \cos y + \cos x \sin y]$$
$$= \cos(x+y) + i \sin(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{z_1+z_2}.$$

Es ist ferner $(e^{z_1})^n = (e^{ix})^n = (\cos x + i \sin x)^n$

$$= \cos nx + i \sin nx = e^{inx} = e^{nz_1}$$

Wir haben also: $\quad e^{z_1}.e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

und $\quad (e^{z_1})^n = e^{nz_1}$

d. h. die über Multiplikation und Potenzirung einer Exponentialgrösse mit reellem Exponenten bewiesenen Sätze gelten auch noch für Exponentialgrössen mit imaginärem Exponenten; die übrigen aber gehen unmittelbar aus dieser hervor.

Siebenter Abschnitt.

Höhere Gleichungen.

---

302. Definition. Lässt man in einer Funktion $f(x)$ die Variable x in $x+h$ übergehen, entwickelt und ordnet dann das Resultat nach steigenden Potenzen des Zuwachses h, so nennt man den Coeffizienten der ersten Potenz von h die Ableitung oder die Derivirte der gegebenen Funktion und bezeichnet sie nach Lagrange durch $f'(x)$.

Wenn z. B. $f(x)=x^3+4x^2-7x+12$, so wäre

$$f(x+h)=(x+h)^3+4(x+h)^2-7(x+h)+12$$

Nun ist

$$\begin{aligned}(x+h)^3 &= x^3+3x^2h+3xh^2+h^3\\ 4(x+h)^2 &= 4x^2+8xh+4h^2\\ -7(x+h) &= -7x-7h\\ 12 &= 12\end{aligned}$$

daher $f(x+h)=(x^3+4x^2-7x+12)+(3x^2+8x-7)h+(3x+4)h^2+h^3$

Der Coeffizient $3x^2+8x-7$ des zweiten Gliedes wäre demnach die Ableitung oder die Derivirte von $f(x)$. Ableitung von $f(x)$ kann man sie füglich nennen, weil sie, wie wir gleich sehen werden, aus $f(x)$ nach einem sehr einfachen Gesetz gebildet werden kann.

Ist $f'(x)$ wieder eine Funktion von x, so könnte man auch hier wieder x in $x+h$ übergehen lassen, entwickeln und ordnen nach steigenden Potenzen von h, dann wäre der Coeffizient von h die Derivirte von $f'(x)$, die man auch die zweite Derivirte der ursprünglichen Funktion $f(x)$ nennt und durch $f^2(x)$ bezeichnet. So könnte man fortfahren und bekäme die 3te, 4te Derivirte von $f(x)$ u. s. f. Wir wollen die spätern Ableitungen von $f(x)$ auch einfach Derivirte höherer Ordnung nennen.

303. Lehrsatz. *Die erste Ableitung einer ganzen algebraischen Funktion wird erhalten, wenn man jedes Glied mit dem darin vorkommenden Exponenten von x multiplizirt und gleichzeitig den Exponenten von x um 1 vermindert.*

Sei $f(x)$ eine ganze algebraische Funktion vom $m$ten Grade, also

$$f(x)=Ax^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots\ldots A_{m-1}x+A_m,$$

so ist $f(x+h)=A(x+h)^m+A_1(x+h)^{m-1}+A_2(x+h)^{m-2}+ \dots\dots$

$A_{m-1}(x+h)+A_m$.

Um nun die erste Ableitung zu erhalten, brauchen wir nur diejenigen Glieder aufzusuchen, welche h in der ersten Potenz enthalten. Allein nach dem binomischen Satz sind die zweiten Glieder von $(x+h)^m$, $(x+h)^{m-1}$, $(x+h)^{m-2}$, . . . $(x+h)^2$, $(x+h)^1$ der Reihe nach folgende:

$mx^{m-1}h$, $(m-1)x^{m-2}h$, $(m-2)x^{m-3}h$, ... $2xh$ und h; somit ist die Summe aller Glieder von $f(x+h)$, die h enthalten,

$=mAx^{m-1}h+(m-1)A_1x^{m-2}h+(m-2)A_2x^{m-3}h+\dots 2A_{m-2}xh+A_{m-1}h$

$=[mAx^{m-1}+(m-1)A_1x^{m-2}+(m-2)A_2x^{m-3}+\dots 2A_{m-2}x+A_{m-1}]h$;

daher $f'(x)=mAx^{m-1}+(m-1)A_1x^{m-2}+(m-2)A_2x^{m-3}+ \dots .$

$2A_{m-2}x+A_{m-1}$,

aus dessen Vergleichung mit $f(x)$ das behauptete Bildungsgesetz unmittelbar klar wird.

Zusatz. Man erkennt hieraus sofort, dass das von x unabhängige Glied A_m in der ersten Ableitung nicht vorkommt. Sei

$$f(x) = x^5-6x^4+5x^3+x^2-7x+12, \text{ so ist}$$
$$f'(x)=5x^4-24x^3+15x^2+2x-7$$
$$f^2(x)=20x^3-72x^2+30x+2$$
$$f^3(x)=60x^2-144x+30$$
$$f^4(x)=120x-144$$
$$f^5(x)=120$$

Wir sehen hier, dass wenn die ganze algebraische Funktion vom 5ten Grade ist, ihre 5te Derivirte constant, die 6te und alle folgenden aber = 0 sind: Ebenso würde man allgemein finden, dass wenn die ganze Funktion vom $m$ten Grade ist, ihre $m$te Derivirte constant und die spätern sämmtlich = 0 sind.

304. Lehrsatz. (Taylor'scher Satz für ganze algebraische Funktionen). *Wenn in einer ganzen algebraischen Funktion vom $m$ten Grade die Variable x in $x+h$ übergeht, so lässt sich $f(x+h)$ in eine aus $m+1$ Gliedern bestehende, nach steigenden Potenzen von h geordnete Reihe entwickeln, deren erstes Glied die ursprüngliche Funktion ist, während der Coeffizient irgend eines spätern, z. B. des $(r+1)$ten Gliedes, gleich ist der $r$ten Ableitung von $f(x)$, dividirt durch das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis r.* Es ist also

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\cdot h+\frac{f^2(x)}{1.2}\cdot h^2+\frac{f^3(x)}{1.2.3}\cdot h^3+\dots$$
$$\frac{f^r(x)}{1.2.3\dots r}h^r+\dots\dots+\frac{f^m(x)}{1.2.3\dots m}h^m$$

oder, wenn wir wieder $1 . 2 . 3 \ldots r = r!$ setzen:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x).h + f^2(x) . \frac{h^2}{2!} + f^3(x) . \frac{h^3}{3!} + \ldots f^m(x) . \frac{h^m}{m!}$$

Sei $f(x) = Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} + \ldots A_{m-2}x^2 + A_{m-1}x + A_m$, dann ist

$$f(x+h) = A(x+h)^m + A_1(x+h)^{m-1} + A_2(x+h)^{m-2} + \ldots$$
$$A_{m-2}(x+h)^2 + A_{m-1}(x+h) + A_m$$

Wenn wir nun die Potenzen von $x+h$ entwickeln, dann nach steigenden Potenzen von h ordnen und die Coeffizienten der gleichen Potenzen von h in dieselbe vertikale Columne setzen, so erhalten wir:

$$\begin{array}{lll|l|l|l}
A(x+h)^m & = Ax^m + & mAx^{m-1} & h + \frac{m(m-1)}{1 . 2} Ax^{m-2} & h^2 + \ldots mAx & h^{m-1} + A \\
A_1(x+h)^{m-1} & = A_1x^{m-1} & + (m-1)A_1x^{m-2} & + \frac{(m-1)(m-2)}{1 . 2} A_1x^{m-3} & + \ldots A_1 & \\
A_2(x+h)^{m-2} & = A_2x^{m-2} & + (m-2)A_2x^{m-3} & + \frac{(m-2)(m-3)}{1 . 2} A_2x^{m-4} & + \ldots & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
A_{m-2}(x+h)^2 & = A_{m-2}x^2 + & 2A_{m-2}x & + A_{m-2} & & \\
A_{m-1}(x+h) & = A_{m-1}x + & A_{m-1} & & & \\
A_m & = A_m & & & &
\end{array}$$

Da nun $f(x+h)$ gleich ist der Summe aller Glieder links vom Gleichheitszeichen, so wird sie auch gleich sein der Summe der $(m+1)$ Vertikalreihen rechts. Die erste Vertikalreihe $Ax^m + A_1x^{m-2} + \ldots A_{m-1}x + A_m$ ist nichts Anderes als die gegebene Funktion $f(x)$. Der Coeffizient von h in der 2ten Vertikalreihe ist schon nach Definition $= f'(x)$. Die 3te Vertikalreihe enthält als Coeffizient von h^2:

$$\frac{m(m-1)}{1 . 2} Ax^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{1 . 2} A_1x^{m-3} + \ldots . + A_{m-2}$$

Bringen wir nun alle Glieder auf den Nenner 1 . 2, so heisst dieser Coeffizient:

$$\frac{m(m-1)Ax^{m-2} + (m-1)(m-2)A_1x^{m-3} + \ldots\ldots + 2.1A_{m-2}}{1 . 2}$$

dessen Zähler offenbar die Derivirte von $f'(x)$, also $= f^2(x)$ ist, so dass die 3te Columne $= f^2(x) . \frac{h^2}{1.2}$. So finden wir die 4te Columne $= f^3(x) . \frac{h^3}{1.2.3}$ u. s. f.

Die vorletzte Columne ist $= (mAx+A_1)h^{m-1}$. Multipliziren wir hier Zähler und Nenner des Coeffizienten $mAx+A_1$ mit $(m-1)(m-2)\ldots.3.2$, so bekommen wir:

$$(mAx+A_1)h^{m-1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots3.2Ax+(m-1)(m-2)\ldots3.2.1.A_1}{1.2.3\ldots\ldots(m-1)}\,h^{m-1},$$

dessen Zähler gerade $= f^{m-1}(x)$. Das letzte Glied Ah^m endlich lässt sich darstellen als

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots3.2.1.A}{1.2.3\ldots..m}\,h^m,$$ wo der Zähler des Coeffizienten $= f^m(x)$, das letzte Glied selber aber $= f^m(x)\,\dfrac{h^m}{m!}$.

Sei z. B. $f(x)=2x^4+x^3-4x^2+5x-7$, so wäre

$f(x+h)= 2(x+h)^4+(x+h)^3-4(x+h)^2+5(x+h)-7$. Nun ist

$$\begin{aligned}
2(x+h)^4 &= 2x^4+8x^3h+12x^2h^2+8xh^3+2h^4\\
(x+h)^3 &= x^3+3x^2h+3xh^2+h^3\\
-4(x+h)^2 &= -4x^2-8xh-4h^2\\
5(x+h) &= 5x+5h\\
-7 &= -7
\end{aligned}$$

$$f(x+h)=(2x^4+x^3-4x^2+5x-7)+(8x^3+3x^2-8x+5)h$$
$$+(12x^2+3x-4)h^2+(8x+1)h^3+2h^4 \quad (2)$$

Allein wenn $f(x)=2x^4+x^3-4x^2+5x-7$, so ist

$$\begin{aligned}
f^1(x) &= 8x^3+3x^2-8x+5\\
f^2(x) &= 24x^2+6x-8\\
f^3(x) &= 48x+6\\
f^4(x) &= 48
\end{aligned}$$

Nun ist das erste Glied von (2) unmittelbar $= f(x)$; der Coeffizient des zweiten Gliedes $= f'(x)$.

Der Coeffizient von $h^2=12x^2+3x-4=\dfrac{24x^2+6x-8}{1.2}=\dfrac{f^2(x)}{1.2}$

" " von $h^3=8x+1 \quad =\dfrac{48x+6}{1.2.3}=\dfrac{f^3(x)}{1.2.3}$

" " von $h^4=2 \quad =\dfrac{48}{1.2.3.4}=\dfrac{f^4(x)}{1.2.3.4}$;

somit wirklich:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x).\,h+\frac{f^2(x)}{1.2}h^2+\frac{f^3(x)}{1.2.3}h^3+\frac{f^4(x)}{1.2.3.4}.\,h^4.$$

305. Lehrsatz. *In jeder nach fallenden oder steigenden Potenzen geordneten ganzen und reellen Funktion kann man der Variabeln x stets solche Werthe beilegen, dass das erste Glied*

dem absoluten Werthe nach die Summe aller folgenden überragt, die ganze Funktion also das Vorzeichen des ersten Gliedes annimmt. Diese Werthe von x sind zu suchen unter den Zahlen >1, wenn die Funktion nach fallenden, unter den Zahlen <1, wenn sie nach steigenden Potenzen von x geordnet ist.

Wir betrachten zunächst eine nach fallenden Potenzen von x geordnete Funktion, z. B.

$$f(x)=Ax^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots A_{m-1}x+A_m.$$

Damit diese Funktion das Vorzeichen des ersten Gliedes annehme, ist erforderlich, für x einen solchen Werth zu setzen, dass

$$Ax^m>A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+A_3x^{m-3}+\ldots A_{m-1}x+A_m$$

oder $$x^m>\frac{A_1}{A}x^{m-1}+\frac{A_2}{A}x^{m-2}+\frac{A_3}{A}x^{m-3}+\ldots \frac{A_{m-1}}{A}x+\frac{A_m}{A}.$$

Sei C der absolute Werth des grössten dieser Coeffizienten, so wird der Zweck offenbar auch erreicht, wenn man x so wählt, dass

$$x^m>C(x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}+\ldots x^2+x+1)$$

oder $$1>C\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots \frac{1}{x^{m-1}}+\frac{1}{x^m}\right)$$

Für $x>1$ ist die Reihe in der Klammer eine aus m Gliedern bestehende abnehmende geometrische Progression, deren Summe natürlich kleiner sein wird, als die Summe der ins Unendliche fortgehenden geometrischen Progression $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots$ in inf. Es wird daher der Zweck, das erste Glied grösser zu machen, als die Summe aller folgenden Glieder, sicher erreicht, sobald man nur dafür sorgt, dass

$$1\geqq C\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots \text{in inf.}\right)$$

welche Progression zur Summe $\dfrac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x-1}$ hat. Daher braucht nur

$$1\geqq\frac{C}{x-1} \text{ oder}$$

$x-1\geqq C$ oder $x\geqq C+1$ zu sein d. h. für jeden Werth von x, der gleich oder grösser ist als der um 1 vermehrte absolute Werth des grössten Coeffizienten (nach Division des Polynoms durch den Coeffizienten des ersten Gliedes) wird $f(x)$ das

Vorzeichen des ersten Gliedes annehmen; es wird somit $f(x)$ stets positiv bleiben, sobald man x von $C+1$ an bis $+\infty$ variiren lässt.

Betrachten wir nun 2tens eine nach steigenden Potenzen von x geordnete Funktion, so ist der Satz leicht nachweisbar, wenn die Funktion kein von x unabhängiges Glied enthält. Sei z. B.

$y=f(x)=A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots A_mx^m$, so ist klar, dass

$y\leqq k(x+x^2+x^3+\ldots x^m)$, wenn k den absoluten Werth des grössten dieser Coeffizienten bedeutet; daher jedenfalls

$$y<k(x+x^2+x^3+\ldots \text{in infinitum}),$$

wo die Reihe in der Klammer für jedes $x<1$ wieder eine abnehmende, in's Unendliche fortgehende Progression vorstellt, deren Summe $=\frac{a}{1-q}=\frac{x}{1-x}$; daher wird $y<\frac{kx}{1-x}$.

Verlangt man nun, dass $y<\omega$ werde, so darf man nur x so wählen, dass $\frac{kx}{1-x}\leqq\omega$ werde oder

$$kx\leqq\omega-\omega x \text{ oder}$$

$$(k+\omega)x\leqq w \text{ oder } x\leqq\frac{\omega}{k+\omega}.$$

Man darf also nur x gleich oder kleiner als $\frac{\omega}{k+\omega}$ setzen, um sicher zu sein, dass $f(x)$ selbst kleiner als ω wird, wie klein auch ω sein mag.

Hieraus folgt aber unmittelbar, dass man auch bei einer beliebigen, nach steigenden Potenzen von x geordneten Funktion die Variable x stets so wählen kann, dass die Funktion das Vorzeichen des ersten Gliedes annimmt; denn wenn

$$f(x)=A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots A_mx^m,$$

so kann der von x abhängige Theil $A_1x+A_2x^2+\ldots A_mx^m$ nach dem eben Bewiesenen kleiner gemacht werden, als jede noch so kleine Zahl ω, also auch kleiner als A. Wie aber das der Fall ist, so bekommt $f(x)$ das Zeichen von A.

Wir ziehen aus diesem Satze folgende Consequenzen:

1. Jede ganze algebraische Funktion ist eine stetige Funktion von x. Die Aenderung, welche $f(x)$ erleileidet, wenn x in $x+h$ übergeht, ist nämlich nichts anderes als die Differenz $f(x+h)-f(x)$.

Allein nach dem Taylor'schen Satz ist

$$(1)\ f(x+h)-f(x)=f'(x)\,.\,h+\frac{f^2(x)}{1.2}h^2+\frac{f^3(x)}{1.2.3}h^3+\ldots+\frac{f^m(x)}{1.2.3\ldots m}\,.\,h^m.$$

Nun kann aber der Werth der Reihe rechts, da sie kein von h unabhängiges Glied enthält, unter jede noch so kleine endliche Zahl herabgedrückt werden dadurch, dass man h klein genug wählt; es entspricht somit einer unendlich kleinen Aenderung h der Variabeln auch eine unendlich kleine Aenderung der Funktion d. h. $f(x)$ ist eine stetige Funktion.

2. Eine Funktion nimmt mit positiv wachsendem x zu oder ab, je nachdem ihre Derivirte positiv oder negativ ist.

Nach unserm Lehrsatz kann man h stets klein genug wählen, dass die Differenz $f(x+h)-f(x)$ in Gleichung (1) das Vorzeichen ihres ersten Gliedes $f'(x).h$ annimmt. Gibt man aber dem x positiv wachsende Werthe d. h. wählt man h positiv, so wird das Produkt $f'(x)h$ und damit auch die Differenz $f(x+h)-f(x)$ positiv oder negativ, je nachdem $f'(x)$ positiv oder negativ ist. Wenn aber $f(x+h)-f(x)$ positiv, so ist $f(x+h)$ grösser als der vorangehende Werth $f(x)$ d. h. $f(x)$ wächst mit positiv wachsendem x; ist dagegen $f(x+h)-f(x)$ negativ, so fällt der Werth $f(x+h)$ kleiner aus als der vorangehende oder die Funktion nimmt ab mit positiv wachsendem x. Man kann somit aus dem Vorzeichen der Derivirten erkennen, ob eine Funktion mit positiv wachsendem x zu- oder abnimmt.

306. Definition. Es folgt aus dem Vorangehenden, dass $f(x)$ eine mit x stetig variirende Grösse ist und es lässt sich darum auch vermuthen, dass im Allgemeinen Werthe von x existiren werden, für welche $f(x)=0$ wird; namentlich leuchtet das ein für den Fall, dass $f(x)$ von ungeradem Grade ist; denn aus Nro. 305 folgt, dass wenn man in einer solchen ganzen algebraischen Funktion die Variable x von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig variiren lässt, auch $f(x)$ stetig von $-\infty$ bis $+\infty$ sich ändern muss, dass sie also bei diesem stetigen Uebergang von negativen Werthen zu positiven nothwendig ein oder mehrere Male durch Null hindurchgehen muss. Man nennt nun diejenigen Werthe der Variabeln x, welche $f(x)=0$ machen, die Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$. Wir nehmen hier ohne Beweis an, dass, wie die ganze Funktion $f(x)$ übrigens auch beschaffen sein möge, stets ein Werth von x von der Form $\alpha\pm\beta i$ existire, für welchen $f(x)=0$ werde d. h. dass jede algebraische Gleichung wenigstens **eine** Wurzel habe.

307. Lehrsatz. *Wenn man eine ganze algebraische Funktion $f(x)$ vom mten Grade durch ein Binom $x-a$ des er-*

ten Grades dividirt, so ist der Rest stets $=f(a)$ *d. h. gleich dem Werth von* $f(x)$ *für* $x=a$.

Denn da der Divisor $x-a$ vom ersten Grade, so kann man die Division stets fortsetzen, bis man einen von x unabhängigen Rest erhält. Bezeichnen wir diesen mit R, mit Q aber den Quotienten aus $f(x)$ durch $x-a$, so ist der Dividend immer gleich dem Produkt aus dem Divisor in den Quotienten mehr dem Rest. Man hat daher die identische Gleichung:

$$f(x)=(x-a)Q+R.$$

Diese Gleichung gilt für jeden Werth von x, also auch für $x=a$; man hat daher

$$f(a)=(a-a)Q+R \text{ oder } f(a)=R.$$

Der Divisionsrest ist also in der That gleich dem Werth, welchen $f(x)$ annimmt für $x=a$.

Beispiel. Sei $f(x)=2x^5-6x^4+x^3+3x^2-10x+12$ zu dividiren durch $x-1$, so wird behauptet, der Rest sei $=f(1)=2-6+1+3-10+12=18-16=2$. Führt man die Division wirklich aus, so hat man

$$\begin{array}{l}
(2x^5-6x^4+x^3+3x^2-10x+12) : (x-1) \\
\underline{2x^5-2x^4} \qquad\qquad\qquad\qquad 2x^4-4x^3-3x^2-10 \\
\quad -4x^4+x^3+3x^2-10x+12 \\
\quad \underline{-4x^4+4x^3} \\
\qquad\quad -3x^3+3x^2-10x+12 \\
\qquad\quad \underline{-3x^2+3x^2} \\
\qquad\qquad\qquad -10x+12 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-10x+10} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 2 ;
\end{array}$$

also wirklich der Rest $=2=f(1)$.

Dividiren wir das gleiche Polynom durch $x+1$, so sollte der Rest $=f(-1)$ sein, da hier $a=-1$;

allein $f(-1)=2(-1)^5-6(-1)^4+(-1)^3+3(-1)^2-10(-1)+12$

$$=-2-6-1+3+10+12=-9+25=16$$

was man bei wirklicher Ausführung der Division auch bestätigt findet.

Zusatz 1. Wenn a eine Wurzel ist der Gleichung $f(x)=0$, so muss $f(x)$ theilbar sein durch $x-a$. In der That! Wenn a eine Wurzel ist der Gleichung $f(x)=0$, so ist $f(a)=0$ d. h. der Rest der Division von $f(x)$ durch $x-a$ ist $=0$; also $f(x)$ theilbar durch $x-a$.

Zusatz 2. Umgekehrt wenn $f(x)$ theilbar ist durch $x-a$, so muss a eine Wurzel sein der Gleichung $f(x)=0$. Denn wenn $f(x)$ theilbar durch $x-a$, so muss

$\frac{f(x)}{x-a}$ gleich einem ganzen Quotienten sein. Bezeichnen wir diesen mit Q, so hat man unmittelbar nach Voraussetzung die Gleichung

$$\frac{f(x)}{x-a} = Q \text{ oder } f(x)=(x-a)Q.$$

Da diese eine identische ist, so gilt sie für jeden Werth von x, also auch für $x=a$; man hat daher: $f(a)=(a-a)Q=0$ d. h. a ist eine Zahl, welche, an die Stelle von x gesetzt, $f(x)$ zu Null macht, also eine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$.

308. (Bildungsgesetz des Quotienten aus $f(x)$ durch $x-a$.)

Lehrsatz: *Wenn man eine ganze algebraische Funktion $f(x)$ vom mten Grade durch ein Binom $x-a$ ersten Grades dividirt, so erhält man als Quotient ein Polynom vom $(m-1)$ten Grade, bei welchem der Coeffizient des ersten Gliedes mit dem entsprechenden in $f(x)$ übereinstimmt, während der Coeffizient jedes folgenden Gliedes aus dem des unmittelbar vorangehenden erhalten wird, wenn man diesen mit a multiplizirt und zum Produkt noch den Coeffizienten des nächsten Gliedes von $f(x)$ addirt.*

Sei $f(x)=Ax^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+A_3x^{m-3}+\ldots A_{m-1}x+A_m$, so ändern wir den Werth dieses Polynoms nicht, wenn wir noch folgende Glieder addiren:

$$-Aa^m-A_1a^{m-1}-A_2a^{m-2}-A_3a^{m-3}-\ldots-A_{m-1}a$$
$$+Aa^m+A_1a^{m-1}+A_2a^{m-2}+A_3a^{m-3}+\ldots+A_{m-1}a,$$

deren Summe gleich Null ist. Wenn wir dann die Glieder der ersten Zeile mit den entsprechenden des gegebenen Polynoms zusammenziehen, so kommt

$$f(x)=A(x^m-a^m)+A_1(x^{m-1}-a^{m-1})$$
$$+A_2(x^{m-2}-a^{m-2})+\ldots.A_{m-2}(x^2-a^2)+A_{m-1}(x-a$$
$$+Aa^m+A_1a^{m-1}+A_2a^{m-2}+\ldots A_{m-2}a^2+A_{m-1}a+A_m$$

Hier erkennt man sofort, dass der in der ersten Zeile stehende Theil von $f(x)$ durch $x-a$ theilbar ist und dass die Division von $f(x)$ durch $x-a$ gerade die zweite Reihe, die nichts anderes als $f(a)$ ist, zum Rest liefert. Der Quotient aber ist gleich

$$A\left(\frac{x^m-a^m}{x-a}\right)+A_1\left(\frac{x^{m-1}-a^{m-1}}{x-a}\right)+A_2\left(\frac{x^{m-2}-a^{m-2}}{x-a}\right)+\ldots.$$
$$A_{m-2}\left(\frac{x^2-a^2}{x-a}\right)+A_{m-1}$$

Führen wir diese Division aus, so erhalten wir

$$\frac{f(x)}{x-a}=A(x^{m-1}+ax^{m-}+a^2x^{m-3}+a^3x^{m-4}+\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1})$$

$$+A_1(x^{m-2}+ax^{m-3}+a^2x^{m-4}+\ldots a^{m-3}x+a^{m-2})$$
$$+A_2(x^{m-3}+ax^{m-4}+a^2x^{m-5}+\ldots a^{m-4}x+a^{m-3})$$
$$+A_3(x^{m-4}+ax^{m-5}+\ldots a^{m-5}x+a^{m-4})$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+A_{m-3}(x^2+ax+a^2)$$
$$+A_{m-2}(x+a)$$
$$+A_{m-1}$$
$$+\frac{f(x)}{x-a}.$$

oder nach Zusammenziehung der gleichartiegen Glieder:

$$\frac{f(x)}{x-a}=Ax^{m-1}+(Aa+A_1)x^{m-2}+(Aa^2+A_1a+A_2)x^{m-3}$$
$$+(Aa^3+A_1a^2+A_2a+A_3)x^{m-4}+(Aa^4+A_1a^3+A_2a^2+A_3a+A_4)x^{m-5}$$
$$+\ldots(Aa^{m-2}+A_1a^{m-3}+A_2a^{m-4}+\ldots A_{m-3}a+A_{m-2})x$$
$$+Aa^{m-1}+A_1a^{m-2}+A_2a^{m-3}+\ldots+A_{m-2}a+A_{m-1}$$
$$+\frac{f(a)}{x-a},$$

worin das behauptete Bildungsgesetz ausgesprochen liegt.

Anmerkung. Die Vergleichung des letzten Gliedes von $\frac{f(x)}{x-a}$ mit dem Rest $f(a)=Aa^m+A_1a^{m-1}+A_2a^{m-2}+A_3a^{m-3}+\ldots$ $A_{m-2}a^2+A_{m-1}a+A_m$ zeigt, dass $f(a)$ nach dem gleichen Gesetz aus dem letzten Gliede des Quotienten abgeleitet werden kann.

309. Wir werden von diesem sehr einfachen Bildungsgesetz später häufig Gebrauch machen und wollen daher hier an einigen Beispielen die Rechnung durchführen. Dabei ist zu bemerken, dass wenn das gegebene Polynom unvollständig, die fehlenden Glieder, mit dem Coeffizienten Null versehen, eingeführt werden müssen. Wir schreiben in eine erste Zeile die Coeffizienten von $f(x)$; darunter die Produkte aus dem Faktor a in den ersten, 2ten, 3ten Coeffizienten des Quotienten u. s. f., endlich in eine neue durch einen Strich von jener getrennte Zeile die Coeffizienten des Quotienten und den Rest.

1. Beispiel: $2x^6-3x^4+5x^3-x+648$ soll dividirt werden durch $x-2$.

Darstellung:	2	0	—3	5	0	—1	+648
2 |		4	8	10	30	60	+118
	2	4	5	+15	+30	+59	+766

Der Quotient heisst daher:

$$2x^5+4x^4+5x^3+15x^2+30x+59$$

und der Rest $\qquad f(2)=+766.$

In der That zeigt die Ausführung der Division auf dem gewöhnlichen Wege den hier gefundenen Quotienten und den Rest 766.

2. Beispiel. $f(x)=3x^5+2x^4-4x^3+5x^2-10x+21$ soll durch $x-5$ dividirt, Quotient und Rest bestimmt werden!

$$\begin{array}{l|rrrrrr} & 3 & +2 & -4 & +5 & -10 & +21 \\ a=5) & & 15 & 85 & +405 & +2050 & +10200 \\ \hline & 3 & +17 & +81 & +410 & +2040 & +10221 \end{array}$$

Somit $\frac{f(x)}{x-5}=3x^4+17x^3+81x^2+410x+2040$

und der Rest ist $\qquad =f(5)=10221.$

3. Beispiel: $f(x)=3x^5+2x^4-4x^3+5x^2-10x+21$ soll dividirt werden durch $x+5$. Hier ist der Faktor $a=-5$; denn $x+5=x-(-5)$.

$$\begin{array}{l|rrrrrr} & 3 & +2 & -4 & +5 & -10 & +21 \\ a=-5) & & -15 & +65 & -305 & +1500 & -7450 \\ \hline & 3 & -13 & +61 & -300 & +1490 & -7429 \end{array}$$

Somit $\frac{f(x)}{x+5}=3x^4-13x^3+61x^2-300x+1490$

und Rest $\quad =-7429.$

4. Beispiel. $f(x)=x^5-4x^3+6x^2-5x+100$ soll durch $x-0{,}2$ dividirt werden.

$$\begin{array}{l|rrrrrr} & 1 & 0 & -4 & +6 & -5 & +100 \\ a=0{,}2 & & 0{,}2 & 0{,}04 & -0{,}792 & +1{,}0416 & -0{,}79168 \\ \hline & 1 & +0{,}2 & -3{,}96 & +5{,}208 & -3{,}9584 & +99{,}20832 \end{array}$$

Daher $\frac{f(x)}{x-0{,}2}=x^4+0{,}2x^3-3{,}96x^2+5{,}208x-3{,}9584$ und Rest $=f(0{,}2)=99{,}20832.$

5. Beispiel: $f(x)=2x^4-3x^2+7x+10$ zu dividiren durch 1,2.

$$\begin{array}{l|rrrrr} & 2 & 0 & -3 & +7 & +10 \\ a=1{,}2 & & 2{,}4 & 2{,}88 & -0{,}144 & +8{,}2272 \\ \hline & 2 & +2{,}4 & -0{,}12 & +6{,}856 & +18{,}2272 \end{array}$$

Somit $\frac{f(x)}{x-1{,}2}=2x^3+2{,}4x^2-0{,}12x+6{,}856$

Rest $=+18{,}2272.$

In allen diesen Fällen kann man sich leicht durch Ausfüh-

rung der Division auf dem gewöhnlichen Wege von der Richtigkeit der Resultate überzeugen.

310. Lehrsatz. *Jede ganze algebraische Funktion vom mten Grade lässt sich in m binomische Faktoren des ersten Grades zerlegen.*

1. Fall: Sei $f(x)=x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+\ldots P_{m-1}x+P_m$ d. h. ein Polynom, welches die Einheit zum Coeffizienten des ersten Gliedes hat.

Setzen wir $f(x)=0$, so lässt diese Gleichung jedenfalls eine Wurzel zu (Nro. 306) und wenn a_1 diese Wurzel, so ist nach Nro. 307, Zusatz 1, $f(x)$ theilbar durch $x-a_1$ und liefert einen Quotienten von einem um 1 niedrigern Grade, den wir nach Nro. 308 au. $f(x)$ abzuleiten wissen. Bezeichnen wir diesen Quotienten mit $f_1(x)$, so haben wir

$$f(x)=(x-a_1)f_1(x).$$

Dieser Quotient $f_1(x)$ muss ebenfalls einen Faktor ersten Grades zulassen; denn wenn wir $f_1(x)=0$ setzen, so hat diese Gleichung wieder eine Wurzel a_2, und es muss daher $f(x)$ theilbar sein durch $x-a_2$. Bezeichnen wir mit $f_2(x)$ diesen Quotienten, der vom Grade $m-2$ und von derselben Form sein wird, wie $f(x)$ und $f_1(x)$, so muss

$$f_1(x)=(x-a_2)f_2(x).$$

Aus demselben Grunde hat $f_2(x)$ wieder einen Faktor ersten Grades von der Form $x-a_3$, wo a_3 Wurzel der Gleichung $f_3(x)=0$ sein wird u. s. f. Wir bekommen daher successive folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
f(x)&=(x-a_1)f_1(x)\\
f_1(x)&=(x-a_2)f_2(x)\\
f_2(x)&=(x-a_3)f_3(x)\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\\
f_{m-3}(x)&=(x-a_{m-2})f_{m-2}(x)\\
f_{m-2}(x)&=(x-a_{m-1})f_{m-1}(x)\\
f_{m-1}(x)&=x-a_m
\end{aligned}$$

woraus durch Multiplikation und Weglassung der gleichen Faktoren auf beiden Seiten folgt:

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{m-1})(x-a_m)$$

2. Fall: Sei $f(x)=Ax^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots A_{m-1}x+A_m$ so ist auch $f(x)=A\left[x^m+\frac{A_1}{A}x^{m-}+\frac{A_2}{A}x^{m-2}+\ldots\frac{A_{m-1}}{A}x+\frac{A_m}{A}\right]$

Allein das Polynom in der eckigen Klammer hat die Einheit zum Coeffizienten des ersten Gliedes, ist also in m binomische Faktoren ersten Grades zerlegbar; daher auf $f(x)$ gleich dem Produkt jener m binomischen Faktoren, multiplizirt mit A; also

$$f(x)=A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \ldots . (x-a_m).$$

311. Lehrsatz. *Eine Gleichung m ten Grades hat immer m Wurzeln.*

Sei $f(x)=Ax^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+ \ldots$

$$A_{m-2}x^2+A_{m-1}x+A_m = 0 \quad (1)$$

unsere Gleichung, so lässt sich nach dem Vorigen $f(x)$ zerlegen in $A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \ldots (x-a_m)$ und daher kann man die Gleichung ersetzen durch

$$(2) \quad A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \ldots (x-a_{m-1})(x-a_m)=0$$

Ein Produkt von mehreren Faktoren kann nur $= 0$ werden, wenn einer seiner Faktoren $= 0$. Der erste Faktor ist nun weder an sich gleich Null, noch kann er, weil von x unabhängig, durch irgend einen speziellen Werth von x zu Null werden. Dagegen wird jeder der m übrigen Faktoren für einen speziellen Werth von x zu Null; so z. B. $x-a_1$ für $x=a_1$, $x-a_2$ für $x=a_2$ u. s. f., endlich $x-a_m$ für $x=a_m$. Es gibt somit m Werthe von x, für welche die ganze Funktion m ten Grades $= 0$ wird d. h. die Gleichung $f(x)=0$ lässt m Wurzeln zu.

312. Man erkennt nun leicht:

1. dass eine Gleichung $m$ten Grades nicht mehr als m Wurzeln haben kann, wenn sie nicht identisch sein soll. Denn setzt man in Gleichung (2) an die Stelle von x irgend eine Zahl k, verschieden von a_1, a_2, $a_3 \ldots$ bis a_m, so ist klar, dass keiner der m binomischen Faktoren $= 0$ und daher das Produkt selbst ebenfalls nicht $= 0$ wird, dass somit die Gleichung nicht mehr als m Wurzeln zulässt. Daraus folgt auch, dass $f(x)$ sich nur auf eine einzige Art in Faktoren des ersten Grades zerlegen lässt.
2. dass dagegen diese m Wurzeln keineswegs alle verschieden zu sein brauchen. Wären z. B. die 4 ersten Wurzeln a_1, a_2, a_3 und a_4 einander gleich, wäre also $a_4=a_3=a_2=a_1$, so würde das Produkt der ihnen entsprechenden binomischen Faktoren $= (x-a_1)^4$ und man würde a_1 dann eine vierfache oder eine 4mal wiederholte Wurzel von $f(x)=0$ heissen.

313. Aus Nro. 311 folgt, dass man den Lehrsatz von Nro. 310 auch in folgender Weise bestimmter aussprechen könnte:

Jede ganze algebraische Funktion vom $m$ten Grade ist zerlegbar in m Faktoren des ersten Grades, deren erste Glieder $= x$, deren zweite Glieder aber die mit umgekehrtem Zeichen genommenen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind. Daraus geht hervor, dass man stets Gleichungen mit gegebenen Wurzeln bilden kann, indem man diese Wurzeln von x subtrahirt und das Produkt der so erhaltenen Differenzen $= 0$ setzt. Sollen z. B. 1, 2, 3 und 4 die Wurzeln sein, so heisst die Gleichung:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=0 \text{ oder}$$
$$x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0.$$

Wären dagegen -1, -2, -3 und -4 die Wurzeln, so wären $x+1$, $x+2$, $x+3$ und $x+4$ die ihnen entsprechenden binomischen Faktoren; somit die Gleichung:

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=0$$

oder

$$x^4+10x^3+35x^2+50x+24=0.$$

314. Lehrsatz. *In jeder algebraischen Gleichung von der Form*

$$x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+P_3x^{m-3}+\dots P_{m-1}\,x+P_m = 0$$

ist der Coeffizient des zweiten Gliedes gleich der Summe der mit umgekehrtem Zeichen genommenen Wurzeln, der des dritten Gliedes gleich der Summe ihrer Combinationen zur zweiten Klasse, überhaupt der Coeffizient irgend eines Gliedes gleich der Summe der Combinationen der mit umgekehrten Zeichen genommenen Wurzeln zur sovielten Klasse, als ihm Glieder vorausgehen: (allfällig fehlende Glieder mit dem Coeffizienten Null hergestellt gedacht).

Denn wenn a_1, a_2, a_3 . . . bis a_m die Wurzeln bedeuten, so ist nach Nro. 313

$$x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+\dots P_{m-1}x+P_m=$$
$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\;.\;.\;.\;(x-a_m).$$

Allein nach Nro. 243 ist das Produkt rechter Hand ein aus $m+1$ Gliedern bestehendes, nach fallenden Potenzen von x geordnetes Polynom, in welchem der Coeffizient irgend eines Gliedes gleich ist der Summe der Combinationen der 2ten Glieder zur sovielten Klasse, als ihm Glieder vorangehen; also

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_m)=x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+\dots\,S_{m-1}x+S_m,$$

wo $S_1 = (-a_1) + (-a_2) + \ldots (-a_m)$
$S_2 = (-a_1).(-a_2) + (-a_1).(-a_3) + \ldots$
$S_3 = (-a_1).(-a_2).(-a_3) + (-a_1).(-a_2).(-a_4) + \ldots$
. . . .
$S_m = (-a_1).(-a_2)\ldots(-a_m) = (-1)^m . a_1 a_2 a_3 \ldots a_m$

Somit haben wir die identische Gleichung:

$$x^m + P_1 x^{m-1} + P_2 x^{m-2} + \ldots P_{m-1} x + P_m = x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} + \ldots S_{m-1} x + S_m,$$

welche erfordert, dass $P_1 = S_1$, $P_2 = S_2$, $P_3 = S_3$ u. s. f., was zu beweisen war.

Anmerkung: Die Combinationen der 2ten, 4ten, 6ten... $2r$ten Klasse der mit umgekehrten Zeichen genommenen Wurzeln sind auch gleich den Combinationen 2ter, 4ter, 6ter... $2r$-ter Klasse der Wurzeln selbst, da ein Produkt unverändert bleibt, sobald eine gerade Anzahl von Faktoren ihr Zeichen wechselt. Es ist daher auch

$P_1 = -(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_m)$ oder $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m = -P_1$
$P_2 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + \ldots$
$P_3 = -(a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + \ldots)$ oder $a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 \ldots = -P_3$
$P_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 a_3 a_5 + \ldots$
⋮
$P_m = (-1)^m . a_1 a_2 a_3 \ldots a_m$ und man könnte den Satz daher ebenso gut mit Hülfe der Wurzeln selber ausdrücken.

315. Wir ziehen aus dem vorigen Satze folgende Consequenzen:

1. Gleichungen mit gegebenen Wurzeln können auch mit Hülfe dieser Relationen gebildet werden. Der Grad einer solchen Gleichung ist immer gleich der Anzahl der Wurzeln; die Coeffizienten aber werden erhalten, wenn man die Vorzeichen aller Wurzeln ändert, dann die Summe ihrer Combinationen zur 1sten, 2ten, 3ten bis letzten Klasse bildet.

2. Ist die Summe der positiven Wurzeln gleich der Summe der negativen, so fällt das 2te Glied weg und umgekehrt muss in einer Gleichung, deren zweites Glied fehlt, die Summe aller Wurzeln $= 0$ sein. In der That: Wenn die Summe der Wurzeln $= 0$, so ist auch die Summe der mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Wurzeln d. h. der Coeffizient des 2ten Gliedes $= 0$; umgekehrt wenn dieser $= 0$, so ist das nur dadurch möglich, dass die Summe der positiven Wurzeln $=$ der Summe der negativen ist.

3. Ist eine Wurzel der Gleichung gleich Null, so muss das letzte Glied verschwinden; denn dieses ist das Produkt der mit umgekehrtem Zeichen genommenen Wurzeln. Wenn nun eine Wurzel $= 0$, so ist ein Faktor dieses Produktes $= 0$ und daher das Produkt selber $= 0$. Ist umgekehrt das letzte Glied $= 0$, so ist das Produkt der mit umgekehrten Zeichen genommenen Wurzeln $= 0$, was nur möglich ist, wenn ein Faktor desselben d. h. eine der Wurzeln selber $= 0$ ist.

Sind gleichzeitig mehrere z. B. 2, 3, 4 . . oder r Wurzeln gleich Null, so fallen die 2, die 3, . . . die r letzten Glieder der Gleichung weg und umgekehrt, wenn in einer Gleichung die 2, 3, . . . oder r letzten Glieder fehlen, so hat die Gleichung ebensoviele Wurzeln, die $= 0$ sind. In der That:

Wenn z. B. 3 Wurzeln gleich Null sind, so verschwinden 1. das Produkt der mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Wurzeln, 2. die Combinationen derselben zur $(m-1)$ten Klasse und 3. ihre Combinationen zur $(m-2)$ten Klasse, weil im ersten 3 Faktoren $=0$ sind, in den zweiten je zwei und in jeder der letzten endlich je ein Faktor gleich Null ist; es müssen somit auch die Summen dieser Combinationen d. h. das letzte Glied, der Coeffizient des vorletzten und der des drittletzten Gliedes verschwinden. Die Gleichung wird daher die Form haben:

$$Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots A_{m-3}\, x^3 = 0.$$

Umgekehrt wenn eine Gleichung diese Form hat, so müssen drei ihrer Wurzeln $= 0$ sein; denn durch Absondern von x^3 bekommt man $x^3(Ax^{m-3} + A_1x^{m-4} + \dots A_{m-3}) = 0$, welche zerfällt in

$$x^3 = 0 \text{ und}$$

$$Ax^{m-3} + A_1 x^{m-4} + \dots A_{m-3} = 0,$$

deren erste 3 Wurzeln jede $= 0$ liefert.

In gleicher Weise können wir weiter schliessen, dass wenn 4, 5 . . . r Wurzeln $= 0$ sind, dann ausser dem Produkt der mit umgekehrtem Zeichen genommenen Wurzeln auch noch die Combinationen derselben zur $(m-1)$ten, $(m-2)$ten, $(m-3)$ten etc. bis zur $(m-r+1)$ten Klasse verschwinden; daher fallen die r letzten Glieder aus der Gleichung weg und es bleiben bloss noch $m+1-r$ $=m-r+1$ Glieder übrig, so dass die Gleichung heisst:

$$Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots A_{m-r}\, x^r = 0.$$

Dass umgekehrt jede Gleichung von dieser Form r Wurzeln

hat, jede = 0, wird wieder sofort klar, wenn wir die linke Seite in ein Produkt aus 2 Faktoren zerlegen, deren einer $= x^r$.

4. Sind alle Wurzeln einer Gleichung reell und positiv, so müssen die Coeffizienten abwechselnd positiv und negativ sein. Denn die mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Wurzeln sind dann negativ, somit die Summe derselben oder der Coeffizient des 2ten Gliedes negativ; die Combinationen zweiter Klasse werden als Produkte von je zwei negativen Faktoren positiv, ihre Summe d. h. der Coeffizient des 3ten Gliedes auch positiv. Die Combinationen 3ter Klasse sind Produkte von je 3 negativen Faktoren, also negativ, ihre Summe ebenfalls negativ, daher der Coeffizient des 4ten Gliedes negativ u. s. f. Die Gleichung hat also die Form:

$$x^m - P_1 x^{m-1} + P_2 x^{m-2} - P_3 x^{m-3} + \ldots \pm P_m = 0$$

wo P_1, P_2, P_3 etc. an sich positive Zahlen bedeuten.

Umgekehrt kann eine vollständige Gleichung, deren Coeffizienten abwechselnd positiv und negativ sind, keine negativen Wurzeln zulassen. Denn setzt man hier an die Stelle von x irgend eine negative Zahl $-\alpha$, so werden die sämmtlichen Glieder der Gleichung positiv, wenn m gerade, dagegen negativ, wenn m ungerade ist. Nun kann aber eine Summe von lauter positiven Zahlen eben so wenig, wie eine Summe von lauter negativen Zahlen, gleich Null sein.

5. Wenn sämmtliche Wurzeln einer Gleichung reell und negativ sind, so hat sie nur positive Glieder; denn die mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Wurzeln sind dann positiv, somit ihre sämmtlichen Combinationen positiv, deren Summen ebenfalls positiv und demnach die sämmtlichen Coeffizienten wieder positiv. Umgekehrt kann eine Gleichung, deren sämmtliche Coeffizienten positiv sind, keine potitive Wurzel zulassen; denn durch Einsetzung irgend einer positiven Zahl an die Stelle von x bekäme man eine Summe von lauter positiven Gliedern, also nie Null.

Anmerkung 1: Die vollständigen Umkehrungen der in 4 und 5 erwähnten Schlüsse wären — wie sich später zeigen wird — durchaus falsch d. h. man dürfte nicht schliessen, dass eine vollständige Gleichung, deren Coeffizienten abwechselnd positiv und negativ sind, nur reelle und positive Wurzeln, eine vollständige Gleichung aber mit lauter positiven Coeffizienten nur negative reelle Wurzeln haben könne.

Anmerkung. Diese Relationen zwischen den Coeffizienten und den Wurzeln führen uns der wirklichen Auflösung der

Gleichungen nicht näher. Wenn wir nämlich die Wurzeln einer Gleichung $m$ten Grades als m Unbekannte betrachten, so liefern uns diese Relationen m Bedingungsgleichungen, aus welchen die Unbekannten bestimmbar sind. Allein wenn wir alle Unbekannten bis auf eine eliminiren, so ist die Endgleichung nichts anderes als die ursprüngliche Gleichung. Bezeichnen a_1, a_2, a_3 z. B. die Wurzeln der Gleichung:

$x^3+P_1x^2+P_2x+P_3 = 0$, so haben wir zu ihrer Bestimmung folgende Gleichungen:

$$-a_1-a_2-a_3 = P_1$$
$$a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3 = P_2$$
$$-a_1a_2a_3 = P_3$$

Multipliziren wir, um a_2 und a_3 zu eliminiren, die erste mit a_1^2, die zweite mit a_1, so bekommen wir:

$$1, \quad -a_1^3-a_1^2a_2-a_1^2a_3 \qquad = P_1a_1^2$$
$$2, \quad +a_1^2a_2+a_1^2a_3+a_1a_2a_3 = P_2a_1$$
$$3, \quad -a_1a_2a_3 = P_3$$

aus deren Addition sich ergibt:

$$-a_1^3 = P_1a_1^2+P_2a_1+P_3 \text{ oder}$$
$$a_1^3+P_1a_1^2+P_2a_1+P_3 = 0,$$

was eine Gleichung ganz von derselben Art, wie die gegebene ist.

316. Lehrsatz. *In jeder Gleichung mit reellen Coeffizienten kommen die complexen Wurzeln in gerader Anzahl und paarweise konjugirt vor.*

Sei $f(x) = 0$ eine Gleichung mit reellen Coeffizienten, welche die Wurzel $\alpha+\beta i$ habe, so behaupten wir zunächst, sie lasse auch die konjugirte Wurzel $\alpha-\beta i$ zu. Denn wenn wir x durch die Wurzel $\alpha+\beta i$ ersetzen und $f(\alpha+\beta i)$ nach dem Taylor'schen Satze entwicken, so bekommen wir:

$$(1) \quad f(\alpha+\beta i)=f(\alpha)+f'(\alpha).\beta i+f^2(\alpha).\frac{\beta^2 i^2}{1.2}+f^3(\alpha).\frac{\beta^3 i^3}{1.2.3}+\ldots.$$

oder, wenn wir die reellen Glieder in eine, die imaginären in eine zweite Zeile schreiben:

$$(2) \quad f(\alpha+\beta i)=f(\alpha)-f^2(\alpha).\frac{\beta^2}{1.2}+f^4(\alpha).\frac{\beta^4}{1.2.3.4}-f^6(\alpha).\frac{\beta^6}{1.2.3..6}+\ldots$$
$$+i\left[f'(\alpha)\beta-f^3(\alpha).\frac{\beta^3}{1.2.3}+f^5(\alpha).\frac{\beta^5}{1.2.3.4.5}-\ldots\right]$$

wo die erste Zeile und der Faktor von i in der zweiten Zeile reelle Grössen sind; bezeichnen wir die erste mit P, den zweiten mit Q, so haben wir also:

$f(\alpha+\beta i)=P+Qi$ und da $\alpha+\beta i$ Wurzel der Gleichung $f(x)=0$, so hat man:

$$P+Qi=0,$$

eine Gleichung, welche sofort zerfällt in

$$P=0 \text{ und } Q=0$$

Allein wenn $P=0$ und $Q=0$, so muss auch $P-Qi=0$ sein. $P-Qi$ geht aber aus $P+Qi$ hervor, wenn man i durch $-i$ ersetzt. Wenn man aber in Gleichung (2) i durch $-i$ ersetzt, so geht sie über in

$f(\alpha-\beta i)=P-Qi$ und da $P-Qi=0$, so ist auch $f(\alpha-\beta i)=0$ d. h. $\alpha-\beta i$ ist eine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$.

Wenn daher eine Gleichung mit reellen Coeffizienten die complexe Wurzel $\alpha+\beta i$ zulässt, so muss sie auch die zu jener konjugirte Wurzel $\alpha-\beta i$ zulassen; und daraus folgt unmittelbar, dass die complexen Wurzeln nur paarweise, also stets in gerader Anzahl vorkommen.

317. Grenzen der Wurzeln. Schon bei Aufsuchung der kommensurablen Wurzeln einer Gleichung ist man auf eine Anzahl von Versuchen angewiesen. Je mehr man die Zahl derselben beschränken kann, desto rascher kommt man zum Ziel. Es ist daher wünschbar, Grenzen zu kennen, innerhalb deren die reellen Wurzeln liegen müssen und diese Grenzen so enge als möglich zu ziehen. Man versteht nun unter einer obern Grenze für die positiven Wurzeln jede Zahl, welche grösser ist, als die grösste positive Wurzel, dagegen unter einer untern Grenze derselben jede positive Zahl, die kleiner ist, als die kleinste positive Wurzel. Unter einer absoluten obern Grenze für die negativen Wurzeln verstehen wir jede negative Zahl, die dem absoluten Werthe nach grösser ist, als die grösste negative Wurzel. Wenn z. B. -5, -3, $-\frac{1}{2}$, 2, 3, 6 und 7 die reellen Wurzeln einer Gleichung wären, so lägen die sämmtlichen positiven Wurzeln zwischen 0 und 8, die negativen zwischen 0 und -6 und somit die sämmtlichen reellen Wurzeln zwischen -6 und $+8$. Es wäre daher 8 eine obere Grenze für die positiven, -6 aber eine absolute obere Grenze für die negativen Wurzeln. Wir werden in der Folge meist nur die obern Grenzen der Wurzeln aufsuchen.

317. Lehrsatz. *Jede obere Grenze der positiven Wurzeln einer Gleichung $f(x)=0$ hat die Eigenschaft, dass für sie und jede noch grössere positive Zahl die Funktion $f(x)$ positiv ausfällt;*

umgekehrt ist jede positive Zahl, welche diese Eigenschaft besitzt, eine obere Grenze für die positiven Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$.

Nach Lehrsatz von Nro. 310, und Nro. 313 ist $f(x)$ zerlegbar in m binomische Faktoren, deren erste Glieder gleich x, deren zweite Glieder aber die mit umgekehrten Zeichen genommenen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ sind. Gesetzt die Gleichung enthielte etwa die positiven Wurzeln a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$, ferner die negativen Wurzeln $-b_1$, $-b_2$, $-b_3 \ldots -b_r$ und endlich noch die zwei complexen Wurzelpaare $\alpha_1 \pm \beta_1 i$ und $\alpha_2 \pm \beta_2 i$, dann wäre $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)(x+b_1)(x+b_2)\ldots(x+b_r)$, multiplizirt mit $(x-\alpha_1-\beta_1 i)(x-\alpha_1+\beta_1 i)(x-\alpha_2-\beta_2 i)(x-\alpha_2+\beta_2 i)$.

Nun ist $(x-\alpha_1-\beta_1 i)(x-\alpha_1+\beta_1 i)=(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2$

$$(x-\alpha_2-\beta_2 i)(x-\alpha_2+\beta_2 i)=(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2$$

und diese einem complexen Wurzelpaar entsprechenden Faktoren bleiben ausschliesslich positiv für jedes positive und negative x. Setzen wir zur Abkürzung:

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)=g(x)$$

$$(x+b_1)(x+b_2)\ldots(x+b_r)=\varphi(x)$$

$$[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]\,.\,[(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2]=\psi(x),$$ so ist

$f(x)=g(x)\,\varphi(x)\,.\,\psi(x)$. Wenn man nun an die Stelle von x irgend eine positive Zahl setzt, so bleiben sämmtliche Faktoren von $\varphi(x)$ und somit $\varphi(x)$ selber positiv; das Gleiche gilt von $\psi(x)$, dessen Faktoren sogar für negative Werthe von x noch positiv ausfallen würden. Dagegen wird das Produkt $g(x)$ der den positiven Wurzeln entsprechenden Faktoren noch keineswegs für edes positive x positiv ausfallen, sicher aber jedenfalls dann, wenn man x durch eine obere Grenze der positiven Wurzeln ersetzt; denn da diese grösser ist als die grösste positive Wurzel, so werden sämmtliche Faktoren von $g(x)$ positiv, somit $g(x)$ selber positiv und daher auch das Produkt $g(x)\varphi(x)\psi(x)$ $=f(x)$ positiv. Dasselbe gilt für jede noch grössere positive Zahl.

Sei umgekehrt k eine positive Zahl, die $f(x)$ positiv macht, so muss, wenn $f(x)$ auch für jede positive Zahl grösser als k positiv bleibt, k eine obere Grenze der positiven Wurzeln sein. Denn da sowol für k, als für jede noch grössere positive Zahl $f(x)$ positiv bleibt, so kann man x von k an bis $+\infty$ variiren lassen, ohne je auf eine Zahl zu stossen, welche $f(x)$ annullirt d. h. welche Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ wäre. Somit liegen die sämmtlichen

reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ unter k und es ist also k nach unserer Definition eine obere Grenze der positiven Wurzeln.

319. Bestimmung oberer Grenzen für die positiven Wurzeln einer Gleichung.

a. Beim Beweise des Satzes in Nro. 305 haben wir gesehen, dass wenn C den absoluten Werth des grössten der Coeffizienten in $f(x)$ bezeichnet, nachdem man durch den Coeffizienten des ersten Gliedes dividirt hat, alsdann für $C+1$ und für jede noch grössere Zahl die Funktion $f(x)$ positiv ausfällt; somit ist nach dem vorigen Lehrsatz $C+1$ eine obere Grenze der positiven Wurzeln.

b. Enthält die Gleichung auch negative Glieder, so kann man sie durch Division mit dem Coeffizienten des ersten Gliedes erst auf die Form bringen:

$$x^m + P_1 x^{m-1} + P_2 x^{m-2} + \ldots P_m \quad x + P_m = 0$$

Ist alsdann N der absolute Werth des grössten der negativen Coeffizienten, so behaupten wir, es sei $N+1$ auch eine obere Grenze der positiven Wurzeln. Denn selbst wenn alle auf das erste folgenden Glieder negativ wären, so müsste die Summe aller negativen Glieder dem absoluten Werthe nach doch kleiner oder höchstens gleich sein

$$N(x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \ldots . x + 1)$$

Wenn man daher x so wählt, dass

$$x^m > N(x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \ldots . x + 1) \text{ oder}$$

$$1 > N\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots \frac{1}{x^{m-1}} + \frac{1}{x^m}\right),$$

so ist man sicher, dass für jede solche Zahl $f(x)$ positiv bleibt.

Allein $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots \frac{1}{x^m}$ ist $< \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots$ in inf., was für $x > 1$ eine abnehmende geometrische Progression ist, deren

$$\text{Summe} = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{x-1}.$$

Somit genügt es, $1 \geqq N\left(\frac{1}{x-1}\right)$ oder $x-1 \geqq N$ oder $x \geqq N+1$ zu machen.

Es ist also $N+1$ eine positive Zahl, die nicht nur $f(x)$ positiv macht, sondern auch die Eigenschaft besitzt, dass für jede

grössere Zahl $f(x)$ positiv *bleibt*; daher ist nach No. 318 auch $N+1$ eine obere Grenze der positiven Wurzeln. Von diesen beiden obern Grenzen $C+1$ und $N+1$ fällt die zweite mit der ersten zusammen, so oft der grösste Coeffizient *negativ* ist; dagegen liegt $N+1$ stets *unter* der ersten, also näher an der grössten Wurzel, wenn der grösste Coeffizient der Gleichung positiv ist.

c. *Bestimmung einer obern Grenze durch Zerlegung.* Man bekommt meist *einfachere* und darum näher liegende Grenzen, wenn man $f(x)$ in 2 oder mehrere Polynome mit je einem positiven Anfangsglied zerlegt.

Ist z. B. $f(x)=x^7-2x^6-x^5+100x^4-80x^3-50x^2+30x-50$ $=0$, so wäre hier $\quad C+1=101$

$$N+1=80+1=81$$

Wir können nun aber $f(x)$ in 3 Theile zerlegen.

$$f(x)=(x^7-2x^6-x^5)+(100x^4-80x^3-50x^2)+(30x-50)$$
$$=x^5(x^2-2x-1)+100x^2(x^2-\tfrac{4}{5}x-\tfrac{1}{2})+30(x-\tfrac{5}{3})$$

Nun wird x^2-2x-1 für $x=2+1=3$ entschieden positiv, $x^2-\frac{4}{5}x-\frac{1}{2}$ für $x=2$, daher um so mehr für $x=3$ und der 3te Theil wird für $x=2$ und um so mehr für $x=3$ positiv. Es macht daher $x=3$ jeden der 3 Bestandtheile von $f(x)$ und somit $f(x)$ selber entschieden positiv; jede noch grössere Zahl bewirkt das Gleiche; daher ist $L=3$ eine *obere* und zwar weit *näher* liegende und darum bequemere Grenze, als die vorigen.

Beispiel 2. $\quad x^5+5x^4+x^3-16x^2-20x-16=0$

Hier fallen die beiden Grenzen $C+1$ und $N+1$ zusammen, da der grösste Coeffizient negativ ist. Man hat $L=C+1=$ $N+1=21$.

Um eine noch näher liegende Grenze zu bekommen, gruppiren wir die Glieder, wie folgt:

$$f(x)=(x^5-16x^2)+(5x^4-20x)+(x^3-16)$$
$$=x^2(x^3-16)+5x(x^3-4)+(x^3-16)$$

Für $x^3=16$ oder $x=\sqrt[3]{16}$ würde das erste und dritte Glied verschwinden; für $x=3$ werden beide entschieden positiv, während x^3-4 schon für $x=2$ positiv ausfiele; $x=3$ macht daher alle 3 Bestandtheile von $f(x)$ und somit $f(x)$ selber positiv, und jede noch grössere Zahl bewirkt das Gleiche; somit ist $L=3$ eine obere Grenze für die positiven Wurzeln dieser Gleichung.

Beispiel 3. $f(x)=x^6-x^5-29x^4+5x^3+196x^2+68x-250=0$

Die durch $L=C+1$ und $N+1$ gelieferten Grenzen wären

von geringem Nutzen. Wir zerlegen daher die Funktion wieder und zwar, wie folgt:

$$f(x)=(x^6-x^5-29x^4)+(196x^2-240)+5x^3+68x$$

oder $$f(x)=x^4(x^2-x-29)+196(x^2-\tfrac{240}{196})+(5x^3+68x)$$

Der 3te Bestandtheil wird positiv für jedes positive x; der zweite fällt positiv aus schon für $x=2$, indem $2^2-\frac{240}{196}>0$. Beim ersten ist zu untersuchen, welche Werthe x^2-x-29 entschieden positiv machen. Wollten wir die Regel $L=N+1$ anwenden, so bekämen wir $29+1=30$ als eine obere Grenze. Allein auch diese liegt uns noch zu fern; wir bestimmen daher die Wurzeln der Gleichung $x^2-x-29=0$, welche sind $x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+29}$. Nun ist $\sqrt{\frac{1}{4}+29}<\sqrt{36}$ oder als 6; daher die positive Wurzel kleiner als $\frac{1}{2}+6$ und um so mehr <7; somit macht 7 und jede noch grössere Zahl das Trinom x^2-x-29 positiv; und da der übrige Theil von $f(x)$ schon für $x=2$ positiv ausfällt, so wird $L=7$ eine obere Grenze der positiven Wurzeln sein.

320. Bestimmung einer absoluten obern Grenze der negativen Wurzeln einer Gleichung $f(x)=0$.

Wir verwandeln die Gleichung in eine andere, deren Wurzeln das Entgegengesetzte von den Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, suchen dann die obere Grenze für die positiven Wurzeln dieser neuen Gleichung, so ist diese, negativ genommen, die absolute obere Grenze für die negativen Wurzeln der ersten Gleichung. Aus $f(x)=0$ kann man aber eine Gleichung, deren Wurzeln entgegengesetzt sind denen der ersten Gleichung, einfach dadurch ableiten, dass man x durch $-x'$ ersetzt. In der That ist jede Wurzel der Gleichung $f(-x')=0$ entgegengesetzt einer Wurzel von $f(x)=0$. Denn wenn $x'=a$ eine Wurzel der Gleichung $f(-x')=0$, so folgt aus $x=-x'$ auch: $x=-a$ d. h. wenn a eine Wurzel der Gleichung $f(-x')=0$, so ist $x=-a$ eine Wurzel von $f(x)=0$.

Beispiel: Sei $x^5-x^4-27x^3+41x^2+106x-120=0$ (1) unsere Gleichung. Setzen wir $x=-x'$, so geht sie über in

$$-x'^5-x'^4+27x'^3+41x'^2-106x'-120=0$$

oder $$x'^5+x'^4-27x'^3-41x'^2+106x'+120=0 \quad (2).$$

Die Vergleichung von (2) mit (1) zeigt, dass die ersten, 3ten, 5ten Glieder unverändert geblieben sind, dagegen das 2te, 4te, 6te Glied ihr Zeichen geändert haben, dass sie somit mechanisch aus (1) abgeleitet werden könnte, wenn man die Vorzeichen der

Glieder geraden Ranges ändert. Suchen wir nun von (2) die obere Grenze der positiven Wurzeln, so ist $L=120+1=121$ die eine, $L=N+1=41+1=42$ eine zweite.

Zur Bestimmung einer bequemern Grenze könnten wir $f(-x')$ in die Form bringen

$$f(-x')=(x'^5-27x'^3)+(x'^4-41x'^2)+106x'+120$$
$$=x'^3(x'^2-27)+x'^2(x'^2-41)+106x'+120$$

wo man nun $x'=7$ als eine Zahl erkennt, für welche $f(-x')$ jedenfalls positiv wird.

Noch etwas vortheilhafter wäre folgende Gruppirung:

$$f(-x')=(x'^5-27x'^3-41x'^2)+x'^4+106x'+120$$
$$=x'^2(x'^3-27x'-41)+x'^4+106x'+120$$

Für $x'=6$ wird hier der Faktor $x'^3-27x'-41=216-162-41$ $=216-203$, also entschieden positiv und b l e i b t positiv für jedes noch grössere x'; daher ist $L'=6$ die obere Grenze für die positiven Wurzeln der Gleichung (2) und somit -6 die absolute obere Grenze der negativen Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Die Gleichung (1) lässt die Wurzeln 1, 3, 4, —2 und —5 zu; daher werden —1, —3, —4, 2 und 5 die Wurzeln der Gleichung (2) sein.

321. Lehrsatz. *Soll eine ganze Zahl a Wurzel einer Gleichung $f(x)=0$ mit reellen Coeffizienten sein, so muss sie 1. das absolute Glied theilen, 2. den erhaltenen Quotienten, vermehrt um den Coeffizienten des vorangehenden Gliedes (in x), 3. diesen neuen Quotienten, vermehrt um den Coeffizienten von x^2 u. s. f. bis man den Coeffizienten des zweiten Gliedes (in x^{m-1}) addirt hat, welche Summe dann wieder durch a theilbar sein und einen Quotienten liefern muss, der gleich ist dem Coeffizienten des ersten Gliedes mit entgegengesetztem Zeichen.*

Wir zeigen zunächst, dass jede ganzzahlige Wurzel alle diese Bedingungen erfülle und sodann, dass jede ganze Zahl, welche diese Bedingungen erfüllt, auch Wurzel der Gleichung sein muss.

Sei $f(x)=Ax^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\dots A_{m-2}x^2+A_{m-1}x+A_m$ $=0$ unsere Gleichung. Wenn a eine ganzzahlige Wurzel derselben, so muss

$$Aa^m+A_1a^{m-1}+A_2a^{m-2}+\dots A_{m-2}a^2+A_{m-1}a+A_m=0$$

oder $$Aa^m+A_1a^{m-1}+A_2a^{m-2}+\dots A_{m-2}a^2+A_{m-1}a=-A_m$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist offenbar theilbar durch a; die ihr gleiche rechte Seite muss es daher ebenfalls sein und wenn wir die Division ausführen, so kommt

$$(1)\ Aa^{m-1}+A_1a^{m-2}+A_2a^{m-3}+\ldots A_{m-2}\,a+A_{m-1}=-\frac{A_m}{a}$$

wo $\frac{A_m}{a}$ ganz sein muss. Setzen wir $\frac{A_m}{a}=Q_1$ und bringen in (1) das Glied A_{m-1} noch auf die rechte Seite, so erhalten wir:

$$Aa^{m-1}+A_1a^{m-2}+A_2a^{m-3}+\ldots A_{m-2}a=-(Q_1+A_{m-1})$$

und indem wir hier beide Seiten durch a dividiren, so kommt:

$$(2)\ Aa^{m-2}+A_1a^{m-3}+A_2a^{m-4}+\ldots A_{m-2}=-\frac{Q_1+A_{m-1}}{a}.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung eine ganze Zahl ist, so muss auch die rechte Seite ganz sein. Setzen wir daher $\frac{Q_1+A_{m-1}}{a}=Q_2$ und subtrahiren gleich A_{m-2} auf beiden Seiten, so geht (2) über in

$$Aa^{m-2}+A_1a^{m-3}+A_2a^{m-4}+\ldots A_{m-3}a=-(Q_2+A_{m-2}).$$

Indem wir beide Seiten dieser Gleichung durch a dividiren, kommt

$$(3)\ Aa^{m-3}+A_1a^{m-4}+\ldots+A_{m-3}=-\frac{Q_2+A_{m-2}}{a}$$

wo die rechte Seite wieder eine ganze Zahl sein muss. Wir setzen daher wieder $\frac{Q_2+A_{m-2}}{a}=Q_3$, wodurch, wenn wir gleich das letzte Glied A_{m-3} auf die rechte Seite schaffen, die Gleichung (3) übergeht in

$$Aa^{m-3}+A_1a^{m-4}+\ldots A_{m-4}\,a=-(Q_3+A_{m-3}).$$

Fahren wir in gleicher Weise fort, so bekommen wir als $(m-3)$te Gleichung:

$$(m-3)\ :\quad Aa^3+A_1a^2+A_2a+A_3=-\frac{Q_{m-4}+A_4}{a}$$

wo die rechte Seite wieder ganz sein muss. Wir setzen $\frac{Q_{m-4}+A_4}{a}=Q_{m-3}$, so bekommen wir durch Subtraktion von A_3 und Division des Resultates durch a

$$(m-2)\ :\ Aa^2+A_1a+A_2=-\frac{Q_{m-3}+A_3}{a}$$

Hier muss die rechte Seite wieder eine ganze Zahl sein; wir setzen daher $\frac{Q_{m-3}+A_3}{a}=Q_{m-2}$ so finden wir durch Fortetzung desselben Verfahrens aus $(m-2)$:

$$(m-1) : Aa + A_1 = -\frac{Q_{m-2} + A_2}{a} = -Q_{m-1}$$

und hieraus

$$m., : A = -\frac{Q_{m-1} + A_1}{a}$$

oder

$$\frac{Q_{m-1} + A_1}{a} = -A.$$

Wenn daher a eine ganzzahlige Wurzel unserer Gleichung ist, so erfüllt sie nach einander folgende Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{rl}
1) & \dfrac{A_m}{a} = Q_1 \\
2) & \dfrac{Q_1 + A_{m-1}}{a} = Q_2 \\
3) & \dfrac{Q_2 + A_{m-2}}{a} = Q_3 \\
4) & \dfrac{Q_3 + A_{m-3}}{a} = Q_4 \\
 & \cdots\cdots\cdots \\
m-2) & \dfrac{Q_{m-3} + A_3}{a} = Q_{m-2} \\
m-1) & \dfrac{Q_{m-2} + A_2}{a} = Q_{m-1} \\
m) & \dfrac{Q_{m-1} + A_1}{a} = -A
\end{array}\right\} (\alpha).$$

Umgekehrt behaupten wir, dass wenn eine ganze Zahl a alle diese Bedingungen erfüllt, sie nothwendig Wurzel unserer Gleichung sein muss. Denn multipliziren wir die erste der Gleichungen (α) mit a, die 2te mit a^2, die 3te mit a^3 u. s. f., die letzte mit a^m, so bekommen wir

$$\begin{array}{ll}
1., & A_m = Q_1 a \\
2., & Q_1 a + A_{m-1} a = Q_2 a^2 \\
3., & Q_2 a^2 + A_{m-2} a^2 = Q_3 a^3 \\
4., & Q_3 a^3 + A_{m-3} a^3 = Q_4 a^4 \\
 & \cdots\cdots\cdots \\
 & \cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

$$(m-2) \quad Q_{m-3}a^{m-3} + A_3 a^{m-3} = Q_{m-2}a^{m-2}$$

$$(m-1) \quad Q_{m-2}a^{m-2} + A_2 a^{m-2} = Q_{m-1}a^{m-1}$$

$$m) \quad Q_{m-1}a^{m-1} + A_1 a^{m-1} = -Aa^m$$

durch deren Addition unter Weglassung der beiden Seiten gemeinschaftlichen Glieder sich sofort ergibt:

$$A_m + A_{m-1}a + A_{m-2}a^2 + A_{m-3}a^3 + \ldots A_3 a^{m-3} + A_2 a^{m-2} + A_1 a^{m-1} = -Aa^m$$

oder $Aa^m + A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} + A_3 a^{m-3} + \ldots A_{m-2}a^2 + A_{m-1}a + A_m = 0$

d. h. a ist eine Wurzel unserer Gleichung.

Zusatz. Die m Quotienten: $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \ldots Q_{m-1}$ und $-A$ sind, in umgekehrter Ordnung und mit entgegengesetzten Zeichen genommen, gerade die Coeffizienten des Quotienten aus $f(x)$ durch $x-a$. In der That, wenn wir die Gleichungen (α) mit a multipliziren und in umgekehrter Ordnung anschreiben, so bekommen wir:

$$\begin{aligned}
Q_{m-1} &= -Aa - A_1 \\
Q_{m-2} &= Q_{m-1}a - A_2 \\
Q_{m-3} &= Q_{m-2}a - A_3 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
Q_3 &= Q_4 a - A_{m-3} \\
Q_2 &= Q_3 a - A_{m-2} \\
Q_1 &= Q_2 a - A_{m-1} \\
A_m &= Q_1 a
\end{aligned}$$

und wenn wir hier in der 2ten, 3ten, 4ten Gleichung etc. die Werthe von Q_{m-1}, Q_{m-2}, Q_{m-3} etc. einführen und die erhaltenen Gleichungen mit -1 multipliziren, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
-Q_{m-1} &= Aa + A_1 \\
-Q_{m-2} &= Aa^2 + A_1 a + A_2 \\
-Q_{m-3} &= Aa^3 + A_1 a^2 + A_2 a + A_3 \\
-Q_{m-4} &= Aa^4 + A_1 a^3 + A_2 a^2 + A_3 a + A_4
\end{aligned}$$

u. s. f., was gerade die Coeffizienten des Quotienten $\frac{f(x)}{x-a}$ sind nach Nro. 308.

Nach diesen Vorbereitungen können wir unmittelbar zur Aufsuchung der kommensurabeln Wurzeln einer Gleichung übergehen.

322. Aufgabe: Die ganzzahligen Wurzeln einer Gleichung $f(x)=0$ zu bestimmen, deren Coeffizienten als ganze Zahlen vorausgesetzt werden.

Auflösung. Wenn

$$f(x)=Ax^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+....+A_{m-1}x+A_m=0$$

die gegebene Gleichung ist, so bestimmen wir zunächst die obere Grenze L der positiven Wurzeln, dann die absolute obere Grenze der negativen Wurzeln $(-L')$, zerlegen das absolute Glied in seine Primfaktoren und bestimmen mit deren Hülfe die zwischen L und $-L'$ liegenden Divisoren desselben. Um zu erfahren, ob ein solcher Divisor a des letzten Gliedes auch Wurzel der Gleichung sei, dividiren wir A_m durch a, addiren zum Quotienten den Coeffizienten A_{m-1} des vorletzten Gliedes und dividiren die Summe wieder durch a. Fiele der Quotient gebrochen aus, so könnte a keine Wurzel sein und es müsste also dieser Divisor als Nichtwurzel weggeworfen werden. Wird aber der Quotient ganzzahlig, so addiren wir zu demselben den Coeffizienten A_{m-2} des vorangehenden Gliedes und dividiren die Summe wieder durch a. Fällt dieser Quotient wieder ganz aus, so addiren wir zu demselben den Coeffizienten A_{m-3} des vorangehenden Gliedes und dividiren die Summe wieder durch a. Erhalten wir als Quotient eine ganze Zahl, so addiren wir zu derselben den Coeffizienten A_{m-4} des vorangehenden Gliedes, dividiren die Summe durch a und fahren — wenn die Quotienten stets ganzzahlig ausfallen — so lange fort, bis wir den Coeffizienten A_1 des 2ten Gliedes addirt und die Summe wieder durch a dividirt haben. Ist dieser letzte Quotient gleich dem Coeffizienten des ersten Gliedes mit entgegengesetztem Zeichen, so ist a Wurzel unserer Gleichung.

Statt nun in gleicher Weise die übrigen Divisoren von A_m an der Gleichung $f(x)=0$ zu probiren, können wir die Sache vereinfachen durch folgende Ueberlegung: Wenn a eine Wurzel, so ist $f(x)$ durch $x-a$ theilbar und der Quotient muss das Produkt der den übrigen Wurzeln entsprechenden binomischen Faktoren sein, die Gleichung $\frac{f(x)}{x-a}=0$ also die übrigen Wurzeln liefern. Nun sind ja die bei Prüfung des a erhaltenen Quotienten gerade die Coeffizienten der Gleichung $-\frac{f(x)}{x-a}=0$, die mit $\frac{f(x)}{x-a}=0$

vollkommen identisch ist. Man wird also diesen Quotienten benutzen und die Wurzeln der Gleichung $\frac{f(x)}{x-a}=0$ aufsuchen, wobei, bevor man an die Prüfung der übrigen Divisoren geht, erst untersucht werden muss, ob a auch Wurzel dieser neuen Gleichung, somit eine 2mal vorkommende Wurzel der ursprünglichen Gleichung sei.

1stes Beispiel. Sei

$$f(x)=x^5-x^4-27x^3+41x^2+106x-120=0 \quad (1)$$

die gegebene Gleichung, so bestimmen wir erst die obere Grenze L der positiven Wurzeln, indem wir die Glieder in folgender Weise gruppiren:

$$f(x)=(x^5-x^4-27x^3)+(106x-120)+41x^2$$
$$=x^3(x^2-x-27)+106(x-\tfrac{120}{106})+41x^2$$

Für $x=6$ und jede noch grössere Zahl wird x^2-x-27 positiv; der zweite Theil $106(x-\frac{120}{106})$ würde schon für jede Zahl, die gleich oder grösser als 2, positiv und das 3te Glied bleibt stets positiv für jedes positive x; somit ist $L=6$ die obere Grenze der positiven Wurzeln unserer Gleichung. Als absolute obere Grenze der negativen Wurzeln haben wir schon in Nro. 320 gefunden $L'=-6$.

Das letzte Glied 120 ist $=1.2.2.2.3.5$ und die zwischen den Grenzen $+6$ und -6 liegenden Divisoren des letzten Gliedes sind demnach 1, 2, 3, 4 und 5, ferner -1, -2, -3, -4 und -5.

Um nun zu erfahren, welche dieser Divisoren Wurzeln der Gleichung seien, schreiben wir erst die Gleichung an, dann in eine von dieser durch einen Strich getrennte 2te Zeile die bei diesem Versuch entstandenen Quotienten, über den Strich aber die einzelnen Dividenden d. h. die Summen aus je einem Quotienten und dem Coeffizienten des vorangehenden Gliedes und zwar stets unter das Glied, dessen Coeffizient addirt wird. Indem wir zuerst den Divisor 1 prüfen, haben wir:

$$\begin{array}{cccccc|c} x^5 & -x^4 & -27x^3 & +41x^2 & +106x & -120 & =0 \\ & -1 & 0 & +27 & -14 & & \\ \hline & -1 & 0 & +27 & -14 & -120 & x=1 \end{array}$$

mit folgender Rechnung:

-120, dividirt durch 1, gibt: -120;

$-120+106=-14$; -14, dividirt durch 1, $=-14$;

$-14+41=+27$; $+27$, dividirt durch 1, $=+27$;

$+27+(-27) = 0$; 0, dividirt durch 1, $= 0$;
$0+(-1) = -1$; und -1 dividirt durch 1, $= -1$.

Da nun dieser letzte Quotient -1 gleich ist dem Coeffizienten des ersten Gliedes mit entgegengesetztem Zeichen, so ist 1 eine Wurzel der Gleichung (1). Die Gleichung $\frac{f(x)}{x-1} = 0$ liefert die noch übrigen Wurzeln. Nun sind aber -1, 0, 27, -14 und -120 gerade die Coeffizienten des Quotienten $\frac{-f(x)}{x-1}$; daher wird die mit $\frac{f(x)}{x-1} = 0$ identische Gleichung $\frac{-f(x)}{x-1} = 0$ sein:

$$-x^4+0.x^3+27x^2-14x-120=0 \quad (2).$$

Bevor wir nun die folgenden Divisoren prüfen, untersuchen wir erst, ob $x=1$ vielleicht auch noch Wurzel der Gleichung (2) sei, indem wir entweder direkte $f(1)$ berechnen oder das eben entwickelte Verfahren auf die Gleichung (2) anwenden. Wir finden auf dem e i n e n, wie auf dem andern Wege, dass 1 nicht mehr Wurzel der Gleichung (2) ist. Wir probiren daher den nächsten Divisor $+2$. Da wir bloss mit den Coeffizienten rechnen, so genügt es, bloss diese hinzuschreiben, wodurch wir erhalten:

-1	0	$+27$	-14	-120	
	-5	-10	-74		
	-5	-37	-60		$x=2$

mit folgender Rechnung:

-120, durch 2 dividirt, gibt -60;
$-60+(-14) = -74$; -74, dividirt durch 2, $= -37$;
$-37+27 = -10$; -10, dividirt durch 2, $= -5$;
$-5+0 = -5$; -5, durch 2 nicht theilbar;

also ist 2 keine Wurzel. Wir gehen daher an die Prüfung von 3:

-1	0	$+27$	-14	-120	
	$+3$	$+9$	-54		
	$+1$	$+3$	18	-40	$x=3$

-120, durch 3 dividirt, $= -40$
$-40+(-14) = -54$; -54, dividirt durch 3, $= -18$;
$-18+27 = +9$; $+9$, dividirt durch 3, $= +3$;
$(+3)+0 = +3$; 3, dividirt durch 3, $= +1$,

was gleich und im Zeichen entgegengesetzt ist dem Coeffizienten -1 des ersten Gliedes; somit ist 3 eine Wurzel der Gleichung (2) und daher auch Wurzel der Gleichung (1). Die von der Wurzel

3 befreite Gleichung (2) oder die von den 2 Wurzeln 1 und 3 befreite ursprüngliche Gleichung wird daher lauten:

$$x^3+3x^2-18x-40=0 \quad (3).$$

Da 3 hier kein Divisor des letzten Gliedes mehr ist, so probiren wir den nächsten Divisor 4 und bekommen:

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & +3 & -18 & -40 & \\ & -4 & -28 & & \\ \hline & -1 & -7 & -10 & x=4 \end{array}$$

denn: —40, durch 4 dividirt, gibt —10.

—10+(—18)=—28; —28, dividirt durch 4, =—7

—7+3=—4, und —4, durch 4 dividirt, =—1.

Da — 1 gleich ist dem Coeffizienten des ersten Gliedes mit entgegengesetztem Zeichen, so ist $x=4$ eine Wurzel der Gleichung (3), somit auch Wurzel der Gleichung (1); und die Gleichung, welche die noch fehlenden Wurzeln liefert, ist

$$-x^2-7x-10=0 \text{ oder}$$

$$x^2+7x+10=0 \quad (4)$$

Da diese vom 2ten Grade, so könnten wir die Wurzeln derselben unmittelbar finden. Wir wollen dieselben aber auf dem gleichen, noch kürzern Wege, wie die übrigen, bestimmen. Da die Coeffizienten der Gleichung (4) alle positiv sind, so kann dieselbe nach Nro. 315, (5) keine positiven Wurzeln haben; es bleiben also nur noch die zwischen 0 und —6 liegenden Divisoren von 10 zu untersuchen, nämlich —1, —2 und —5. Dass —1 keine Wurzel ist, erkennt man sogleich, da $f(-1)=1-7+10=+4$. Wir probiren daher $x=-2$ und haben:

$$\begin{array}{r|l} x^2+7x+10 & =0 \\ +2 & \\ \hline -1 \quad -5 & x=-2 \end{array}$$

d. h. +10, dividirt durch —2, gibt —5;

(—5)+(+7)=+2 und +2, dividirt durch —2, gibt —1,

was gleich ist dem Coeffizienten von x^2 mit entgegengesetztem Zeichen; folglich ist $x=-2$ eine Wurzel und die von dieser Wurzel befreite Gleichung ist:

$-x-5=0$, woraus $x=-5$, was wir übrigens durch nochmalige Anwendung desselben Verfahrens fänden.

$$\begin{array}{r|l} -1 \quad -5 & \\ \hline +1 & x=-5; \end{array}$$

denn —5, durch —5 dividirt, gibt +1, was gleich ist dem Coeffizienten —1 des ersten Gliedes mit entgegengesetztem Zeichen; so-

mit ist $x = -5$ noch eine Wurzel unserer Gleichung, welche daher die Wurzeln 1, 3, 4, —2 und —5 zulässt. Es wird daher

$$x^5 - x^4 - 27x^3 + 41x^2 + 106x - 120 = (x-1)(x-3)(x-4)(x+2)(x+5)$$

sein, was die Ausführung der rechts angedeuteten Operationen auch bestätigt.

Wenn wir die Versuche mit den Divisoren, welche nicht als Wurzeln sich erweisen, weglassen, so könnte die ganze, zur Bestimmung der 5 Wurzeln erforderliche Rechnung in folgender Weise übersichtlich angedeutet werden:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & -x^4 & -27x^3 & +41x^2 & +106x & -120 & = 0 \\
 & -1 & 0 & +27 & -14 & & \\
\hline
 & -1 & 0 & +27 & -14 & -120 & x = 1 \\
 & & +3 & +9 & -54 & & \\
\hline
 & & +1 & +3 & -18 & -40 & x = 3 \\
 & & & -4 & -28 & & \\
\hline
 & & & -1 & -7 & -10 & x = 4 \\
 & & & & -2 & & \\
\hline
 & & & & +1 & +5 & x = -2 \\
 & & & & & & \\
\hline
 & & & & & -1 & x = -5
\end{array}$$

2tes Beispiel. Wir nehmen die Gleichung

$$(1) \quad x^7 - 42x^5 + 84x^4 + 189x^3 - 420x^2 - 148x + 336 = 0$$

Behufs Aufsuchung der obern Grenze L haben wir

$$f(x) = (x^7 - 42x^5) + (84x^4 - 420x^2) + (189x^3 - 148x) + 336$$

oder $f(x) = x^5(x^2 - 42) + 84x^2(x^2 - \frac{420}{84}) + 189x(x^2 - \frac{148}{189}) + 336$

Für $x \geqq \sqrt{42}$ wird $f(x)$ entschieden positiv; somit $L = \sqrt{42}$ oder $=$ der nächst über ihr liegenden ganzen Zahl 7.

Zur Bestimmung der absoluten obern Grenze für die negativen Wurzeln setzen wir $x = -x'$ und bekommen

$$x'^7 - 42x'^5 - 84x'^4 + 189x'^3 + 420x'^2 - 148x' - 336 = 0$$

oder $f(-x') = x'^4(x'^2 - 42x' - 84) + 189x'(x'^2 - \frac{148}{189}) + 420(x' - \frac{336}{420})$

Für $L' = 8$ wird $x'^2 - 42x' - 84$ entschieden positiv und bleibt positiv für jedes noch grössere x'; die übrigen würden schon für $x' = 1$ positiv; somit -8 eine obere Grenze der negativen Wurzeln der Gleichung (1).

Es ist nun $336 = 2.2.2.2.3.7$. Die zwischen den beiden Grenzen 7 und —8 liegenden Divisoren desselben werden daher sein: 1, 2, 3, 4, 6 und —1, —2, —3, —4, —6 und —7.

Um zu ermitteln, welche dieser Divisoren Wurzeln unserer

Gleichung seien, stellen wir das fehlende 2te Glied mit dem Coeffizienten 0 her und prüfen zunächst den Divisor 1.

$$\begin{array}{lrrrrrrr|l}
(1)\ x^7+0.x^6-42x^5+84x^4+189x^3-420x^2-148x+336 & & & & & & & & =0 \\
 & -1 & -1 & +41 & -43 & -232 & +188 & & \\
\hline
 & -1 & -1 & +41 & -43 & -232 & +188 & +336 & x=1
\end{array}$$

Der letzte Quotient -1 ist gleich dem Coeffizienten des ersten Gliedes mit entgegengesetztem Zeichen; folglich ist $x=1$ Wurzel unserer Gleichung und die von der Wurzel 1 befreite Gleichung

$$-x^6-x^5+41x^4-43x^3-232x^2+188x+336=0$$

oder (2) : $x^6+x^5-41x^4+43x^3+232x^2-188x-336=0$

lässt offenbar die Wurzel 1 nicht mehr zu, indem die Summe der negativen Coeffizienten augenscheinlich die der positiven überragt. Wir prüfen daher den Divisor 2 und haben, indem wir bloss die Coeffizienten anschreiben:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
1 & 1 & -41 & +43 & +232 & -188 & -336 & \\
 & -2 & -6 & +70 & +54 & -356 & & \\
\hline
 & -1 & -3 & +35 & +27 & -178 & -168 & x=2
\end{array}$$

Der letzte Quotient ist $=-1$ d. h. gleich dem Coeffizienten des ersten Gliedes mit entgegengesetztem Zeichen; somit $x=2$ eine Wurzel der Gleichung (2), und die Gleichung, welche die noch fehlenden Wurzeln liefert, wäre

$$-x^5-3x^4+35x^3+27x^2-178x-168=0 \text{ oder}$$

(3) $$x^5+3x^4-35x^3-27x^2+178x+168=0$$

Da 2 hier noch Divisor des letzten Gliedes, so prüfen wir vor Allem, ob 2 noch Wurzel dieser Gleichung (3) sei. Wir bekommen so:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
1 & +3 & -35 & -27 & +178 & +168 & \\
 & & +17 & +104 & 262 & & \\
\hline
 & & & +52 & +131 & +84 & x=2
\end{array}$$

Die Summe $+17$ ist nicht mehr theilbar durch 2; daher 2 keine Wurzel der Gleichung (3) oder keine wiederholte Wurzel der Gleichung (1).

Wir probiren daher den nächsten Divisor des letzten Gliedes in (3), nämlich 3 und bekommen:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
1 & +3 & -35 & -27 & +178 & +168 & \\
 & -3 & -18 & +51 & +234 & & \\
\hline
 & -1 & -6 & +17 & +78 & +56 & x=3
\end{array}$$

Es ist somit $x=3$ eine Wurzel der Gleichung (3). Nach Division derselben durch $x-3$ bekommen wir die Gleichung:

(4) $-x^4-6x^3+17x^2+78x+56=0,$

deren letztes Glied nicht mehr durch 3 theilbar ist.

Wir untersuchen daher den nächsten Divisor 4 des letzten Gliedes und bekommen:

$$\begin{array}{rrrrr|l} -1 & -6 & +17 & +78 & +56 & \\ & +4 & +40 & +92 & & \\ \hline & +1 & +10 & +23 & +14 & x=4 \end{array}$$

Da der letzte Quotient $+1$ gleich dem Coeffizienten des 1sten Gliedes mit entgegengesetztem Zeichen, so ist 4 eine Wurzel der Gleichung (4) und somit auch der ursprünglichen Gleichung (1). Indem wir durch Division mit $x-4$ die Gleichung (4) von der Wurzel 4 befreien, bekommen wir die Gleichung

(5) $x^3+10x^2+23x+14=0,$

also eine Gleichung 3ten Grades mit lauter positiven Coeffizienten. Diese Gleichung hat daher keine positiven Wurzeln mehr und wir untersuchen die negativen Divisoren des letzten Gliedes $+14$, welche sind -1, -2 und -7.

Prüfen wir zunächst -1, so kommt

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +10 & +23 & +14 & \\ & +1 & +9 & & \\ \hline & -1 & -9 & -14 & x=-1 \end{array}$$

Es ist also $x=-1$ eine Wurzel der Gleichung (5) und $-x^2-9x-14=0$ oder $x^2+9x+14=0$ die Gleichung, welche die noch fehlenden Wurzeln liefert. Dass -1 keine Wurzel der Gleichung (5) mehr ist, zeigt sich sofort. Wir probiren daher -2 und finden

$$\begin{array}{rrr|l} -1 & -9 & -14 & \\ & -2 & & \\ \hline & +1 & +7 & x=-2 \end{array}$$

Es ist somit -2 eine Wurzel der Gleichung $x^2+9x+14=0$ und nach Entfernung derselben erhält man die Gleichung ersten Grades $x+7=0$ oder $x=-7$.

Wenn wir die Divisoren, welche keine Wurzeln sind, weglassen, so stellt die nachfolgende Uebersicht die zur Bestimmung der Wurzeln nöthigen Operationen dar:

x^7	$+0.x^6$	$-42x^5$	$+84x^4$	$+189x^3$	$-420x^2$	$-148x$	$+336$	$=0$
	-1	-1	$+41$	-43	-232	$+188$		
	-1	-1	$+41$	-43	-232	$+188$	$+336$	$x=1$
		$+2$	$+6$	-70	-54	$+356$		
		$+1$	$+3$	-35	-27	$+178$	$+168$	$x=2$
			-3	-18	$+51$	$+234$		
			-1	-6	$+17$	$+78$	$+56$	$x=3$
				$+4$	$+40$	$+92$		
				$+1$	$+10$	$+23$	$+14$	$x=4$
					$+1$	$+9$		
					-1	-9	-14	$x=-1$
						-2		
						$+1$	$+7$	$x=-2$
							-1	$x=-7$

3tes Beispiel:

$$f(x)=x^5-18x^4+126x^3-428x^2-705x-450=0$$

Da diese Gleichung vollständig ist und einen regelmässigen Zeichenwechsel darbietet, so hat sie keine negativen Wurzeln (siehe Nro. 315, (4)); wir brauchen daher nur die obere Grenze der positiven Wurzeln aufzusuchen. Es ist nun

$$f(x)=x^4(x-18)+126x^2(x-\tfrac{428}{126})+705(x-\tfrac{450}{705}),$$

woraus man sofort erkennt, dass für $x=18$ und jede noch grössere Zahl $f(x)$ positiv ausfällt. Es ist daher $L=18$ eine obere Grenze der positiven Wurzeln und die sämmtlichen reellen Wurzeln liegen demnach zwischen 0 und 18. Nun ist $450 = 2.3.3.5.5$ und die zwischen diesen Grenzen liegenden Divisoren des letzten Gliedes sind demnach

1, 2, 3, 5, 6, 9, 10 und 15.

Die Prüfung von 1 zeigt, dass 1 keine Wurzel ist und durch nachstehende Rechnung finden wir 2 als einfache, 3 und 5 dagegen als doppelte Wurzeln.

x^5	$-18x^4$	$+126x^3$	$-428x^2$	$+705x$	-450	$=0$
	-2	$+32$	-188	$+480$		
	-1	$+16$	-94	$+240$	-225	$x=2$
		$+3$	-39	$+165$		
		$+1$	-13	$+55$	-75	$x=3$
			-3	$+30$		
			-1	$+10$	-25	$x=3$
				$+5$		
				$+1$	-5	$x=5$
					-1	$x=5$

Es ist somit

$$x^5-18x^4+126x^3-428x^2+705x-450=(x-2)(x-3)^2(x-5)^2,$$

wie man sich leicht durch Ausführung der Multiplikation überzeugt.

323. Wir gehen nun an die Bestimmung der gebrochenen kommensurabeln Wurzeln einer Gleichung $f(x)=0$, müssen aber zunächst noch einige vorbereitende Aufgaben lösen.

Aufgabe: Eine Gleichung

$$(1)\quad x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+\ldots P_{m-1}x+P_m=0$$

zu verwandeln in eine andere, deren Wurzeln das $k$fache von den Wurzeln der gegebenen Gleichung seien.

Auflösung. Bezeichnen wir die Wurzel der neuen Gleichung mit y, so wird verlangt, dass $y=kx$ oder $x=\frac{y}{k}$ sei. Durch Einführung dieses Werthes von x in die Gleichung (1) erhalten wir unmittelbar die gesuchte Gleichung. Sie wird daher sein

$$\left(\frac{y}{k}\right)^m+P_1\left(\frac{y}{k}\right)^{m-1}+P_2\left(\frac{y}{k}\right)^{m-2}+\ldots P_{m-1}\frac{y}{k}+P_m=0 \text{ oder}$$

$$\frac{y^m}{k^m}+P_1\frac{y^{m-1}}{k^{m-1}}+P_2\frac{y^{m-2}}{k^{m-2}}+\ldots P_{m-1}\frac{y}{k}+P_m=0, \text{ oder}$$

$$(2)\quad y^m+P_1ky^{m-1}+P_2k^2y^{m-2}+\ldots P_{m-1}k^{m-1}y+P_mk^m=0$$

eine Gleichung, welche aus (1) abgeleitet werden könnte, wenn man die Glieder von (1) successive mit k^0, k^1, $k^2\ldots k^{m-1}$ und k^m multipliziren würde.

324. Aufgabe. Eine Gleichung mit gebrochenen Coeffizienten in eine andere mit ganzzahligen Coeffizienten zu verwandeln, welche die Einheit zum Coeffizienten des ersten Gliedes habe.

Auflösung. Wir suchen das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner. Wenn k dasselbe, so multipliziren wir die Glieder unserer Gleichung der Reihe nach mit k^0, k^1, $k^2\ldots k^m$, so ist die neu entstandene Gleichung die verlangte. Denn offenbar sind die Coeffizienten dieser Gleichung sämmtlich ganze Zahlen und der Coeffizient des ersten Gliedes ist $=1$. Ihre Wurzeln sind nach dem Vorigen das $k$fache von den Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Soll z. B. die Gleichung

$$(1)\quad x^3-\tfrac{2}{3}x^2+\tfrac{3}{4}x-\tfrac{7}{8}=0$$

in eine andere verwandelt werden, deren Coeffizienten ganze Zahlen sind und welche die Einheit zum Coeffizienten des ersten Gliedes hat, so setzen wir $k =$ dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner, also $= 3.8 = 24$ und bekommen:

$$(2) \quad x^3 - \tfrac{2}{3}kx^2 + \tfrac{3}{4}k^2x - \tfrac{7}{8}k^3 = 0,$$

die offenbar ganzzahlige Coeffizienten bekommt, wenn man $k = 24$ setzt. Man erhält dann nämlich

$$(3) \quad x^3 - 16x^2 + 432x - 12096 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind nach dem Vorigen das 24fache von den Wurzeln der Gleichung (1).

Anmerkung. Häufig kann man die Zahl, mit deren verschiedenen Potenzen die Glieder der Gleichung multiplizirt werden müssen, um eine von Nennern freie Gleichung zu erhalten, kleiner wählen, als das kleinste gemeinschaftliche Multiplum der Nenner. In der That zeigt der blosse Anblick der Gleichung (2), dass der Coeffizient $\frac{2k}{3}$ für $k = 3$, die beiden andern $\frac{3k^2}{4}$ und $\frac{7k^3}{8}$ aber schon für $k = 2$ zu ganzen Zahlen würden. Wenn man daher $k = 2.3 = 6$ wählt, so erhält man statt der Gleichung (3) die viel einfachere:

$$(4) \quad x^3 - 4x^2 + 27x - 189 = 0$$

Sei ferner die Gleichung

$$x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + \tfrac{3}{4}x - \tfrac{7}{9} = 0$$

zu transformiren, so setzen wir $k = 4.9 = 36$ und bekommen

$$x^3 - 90x^2 + 972x - 36288 = 0.$$

Man erreicht aber den Zweck auch, wenn man $k = 2.3 = 6$ setzt, wodurch man die einfachere Gleichung

$$x^3 - 15x^2 + 27x - 168 = 0 \text{ bekommt.}$$

Sei 3tens gegeben die Gleichung

$$(1) \quad x^3 - \tfrac{4}{5}x^2 + \tfrac{8}{75}x + \tfrac{11}{135} = 0,$$

so brauchen wir, um sie in eine andere zu verwandeln mit ganzen Coeffizienten, welche aber doch die Einheit zum Coeffizienten des ersten Gliedes habe, nicht $k =$ dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner d. h. nicht $= 675$ zu setzen, sondern es genügt schon, $k = 3.5 = 15$ zu setzen. In der That: Wenn wir die Glieder der Gleichung mit k^0, k^1, k^2, k^3 multipliziren, so bekommen wir

$$(2) \quad x^3 - \frac{4k}{5}x^2 + \frac{8k^2}{75}x + \frac{11k^3}{135} = 0$$

und da erkennt man nun sofort, dass $\frac{4k}{5}$ für $k=5$, $\frac{8k^2}{75}$ und $\frac{11k^3}{135}$ für $k=3.5$ ganz werden. Wir bekommen für $k=15$ die Gleichung

$$(3) \quad x^3-12x^2+24x+275=0,$$

eine Gleichung, deren Wurzeln das 15 fache von den Wurzeln der Gleichung (1) sind.

Die hier gelöste Aufgabe könnte mit andern Worten auch so gestellt werden: Eine beliebige Gleichung

$$Ax^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots A_{m-1}x+A_m=0$$

in eine andere zu verwandeln, welche die Einheit zum Coeffizienten des ersten Gliedes und daneben lauter ganzzahlige Coeffizienten habe.

325. Lehrsatz: *Eine Gleichung, deren erstes Glied den Coeffizienten* 1 *hat und deren übrige Coeffizienten sämmtlich ganze Zahlen sind, kann keine gebrochenen kommensurabeln Wurzeln haben.*

Gesetzt, die Gleichung

$$x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+\ldots P_{m-1}x+P_m=0 \quad (1),$$

deren Coeffizienten P_1, P_2 bis P_m sämmtlich ganze Zahlen seien, liesse den nicht reduzirbaren Bruch $\frac{a}{b}$ als Wurzel zu, so müsste

$$\frac{a^m}{b^m}+P_1\frac{a^{m-1}}{b^{m-1}}+P_2\frac{a^{m-2}}{b^{m-2}}+\ldots P_{m-1}\frac{a}{b}+P_m=0$$

oder, wenn man $\frac{a^m}{b^m}$ auf die andere Seite schafft und dann noch mit b^{m-1} beide Seiten multiplizirt:

$$P_1a^{m-1}+P_2ba^{m-2}+P_3b^2a^{m-3}+\ldots P_mb^{m-1}=-\frac{a^m}{b} \quad (2)$$

Da a prim zu b, so ist die rechte Seite ein Bruch, die linke aber eine Summe von lauter ganzen Zahlen; also ist die Gleichung (2) unmöglich und daher auch die Annahme, welche uns auf die Gleichung (2) geführt hat, unzulässig.

Die reellen Wurzeln einer solchen Gleichung können also nur ganze oder dann inkommensurable Zahlen sein.

Zusatz 1. Soll ein nicht reducirbarer Bruch $\frac{a}{b}$ Wurzel einer Gleichung $f(x)=0$ sein, so muss sein Zähler a Divisor des letzten Gliedes und sein Nenner b Divisor vom Coeffizienten A des ersten Gliedes sein.

Zusatz 2. Legt man den Coeffizienten $P_1, P_2 \ldots P_m$ in Gleichung (1) nicht mehr die Bedingung auf, dass sie ganze Zahlen sein sollen, sondern nur noch die, geschlossene dekadische Zahlen zu sein, dann kann die Gleichung (1) allerdings gebrochene Wurzeln zulassen; diese sind dann aber Brüche, welche endliche Decimalbrüche liefern. So lässt die Gleichung

$$x^3-1,65x^2-0,685x+1,02=0$$

die Wurzeln $x=0,75=\frac{3}{4}$

$x=1,7 = \frac{17}{10}$

und $x=-0,8=-\frac{4}{5}$ zu.

326. Wir wollen nun die Bestimmung der gebrochenen kommensurablen Wurzeln an speciellen Beispielen zeigen.

Beispiel 1. $36x^5-36x^4+47x^3-37x^2+11x-1=0$

Diese Gleichung hat jedenfalls keine negativen Wurzeln, weil sie vollständig ist und einen regelmässigen Zeichenwechsel darbietet (4te Consequenz in No. 315). Um die obern Grenzen der positiven Wurzeln zu finden, bringen wir $f(x)$ in die Form

$$f(x)=36x^4(x-1)+47x^2(x-\tfrac{37}{47})+11(x-\tfrac{1}{11}),$$

woraus wir sofort erkennen, dass für $x=$ oder grösser als 1 $f(x)$ stets positiv wird, die reellen Wurzeln dieser Gleichung also zwischen 0 und 1 liegen müssen. Um sie zu finden, dividiren wir die Gleichung durch den Coeffizienten des ersten Gliedes und bekommen

$$(1)\quad x^5-x^4+\tfrac{47}{36}x^3-\tfrac{37}{36}x^2+\tfrac{11}{36}x-\tfrac{1}{36}=0$$

Setzen wir nun $x=\frac{y}{k}$, so geht (1) über in

$$y^5-ky^4+\frac{47k^2}{36}y^3-\frac{37}{36}k^3y^2+\frac{11}{36}k^4y-\frac{k^5}{36}=0$$

Hier erkennt man gleich, dass für $k=6$ sämmtliche Coeffizienten ganze Zahlen werden. Man erhält nämlich für $k=6$:

$$(2)\quad y^5-6y^4+47y^3-222y^2+396y-216=0$$

als neue Gleichung, deren Wurzeln gerade das 6 fache von den Wurzeln der Gleichung (1) sind. Diese liegen zwischen 0 und 1, somit die reellen Wurzeln von (2) zwischen 0 und 6 und wir haben daher nur die unter 6 liegenden Divisoren des letzten Gliedes zu prüfen, also die Zahlen 1, 2, 3 und 4. Wir bekommen dabei folgende, aus dem Vorangegangenen verständliche Rechnung:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
y^5 & -6y^4 & +47y^3 & -222y^2 & +396y & -216 & \\
 & -1 & +5 & -42 & +180 & & \\
\hline
 & -1 & +5 & -42 & +180 & -216 & y=1 \\
 & & +2 & -6 & +72 & & \\
\hline
 & & +1 & -3 & +36 & -108 & y=2 \\
 & & & -3 & +0 & & \\
\hline
 & & & -1 & +0 & -36 & y=3
\end{array}
$$

Es sind daher $y=1$, 2 und 3 Wurzeln der Gleichung (2) und die übrigen Wurzeln werden gefunden durch Auflösung der Gleichung

$$-y^2-36=0$$
$$y^2+36=0$$

woraus folgt: $$y=\pm 6\sqrt{-1}.$$

Die Gleichung (2) hat somit die 5 Wurzeln

$$y_1=1,\ y_2=2,\ y_3=3,\ y_4=+6\sqrt{-1} \text{ und } y_5=-6\sqrt{-1}$$

Nun war $x=\frac{y}{6}$; daher werden

$$x_1=\tfrac{1}{6},\ x_2=\tfrac{1}{3},\ x_3=\tfrac{1}{2},\ x_4=+\sqrt{-1} \text{ und } x_5=-\sqrt{-1}$$

die Wurzeln der gegebenen Gleichung (1) sein.

Beispiel 2. Es sollen die Wurzeln der Gleichung

(1) $180x^6-684x^5+667x^4+247x^3-768x^2+436x-80=0$

bestimmt werden.

Zur Bestimmung der obern Grenze für die positiven Wurzeln haben wir:

$$f(x)=180x^5(x-\tfrac{684}{180})+667x^2(x^2-\tfrac{768}{667})+247(x^3-\tfrac{80}{247})+436x$$

Für $x=4$ und jede noch grössere Zahl wird $f(x)$ positiv, daher $L=4$. Um die absolute obere Grenze der negativen Wurzeln zu finden, setzen wir $x=-x'$, so kommt

(2) $f(x)=f(-x')=180x'^6+684x'^5+667x'^4-247x'^3-768x'^2-$
$436x'-80=0$

Zur Bestimmung der obern Grenze der positiven Wurzeln dieser Gleichung gruppiren wir die Glieder, wie folgt:

$$f(-x')=(180x'^6-247x'^3)+(684x'^5-768x'^2)+(667x'^4-436x'-80)$$
$$f(-x')=\underbrace{180x'^3(x'^3-\tfrac{247}{180})}_{A}+\underbrace{684x'^2(x'^3-\tfrac{768}{684})}_{B}+\underbrace{667(x'^4-\tfrac{436}{667}x'-\tfrac{80}{667})}_{C}$$

Für $x=2$ wird jede der 3 Gruppen A, B und C positiv und ebenso für jedes $x>2$; daher $L=2$ eine obere Grenze für die positiven Wurzeln der Gleichung (2) und daher -2 eine absolute obere Grenze für die negativen Wurzeln der ursprünglichen

Gleichung. Es liegen daher die reellen Wurzeln unserer Gleichung (1) sämmtlich zwischen -2 und $+4$ und wir können zunächst die ganzzahligen Wurzeln derselben aufsuchen. Da $f(1)=1530-1532=-2$, so ist 1 keine Wurzel und wir probiren daher von den 3 einzigen zwischen -2 und $+4$ liegenden Divisoren 1, 2 und -1 des letzten Gliedes den Divisor 2 zunächst und bekommen:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 180x^6 & -684x^5 & +667x^4 & +247x^3 & -768x^2 & +436x & -80 & \\ & -360 & +648 & -38 & -570 & +396 & & \\ \hline & -180 & +324 & -19 & -285 & +198 & -40 & x=2 \end{array}$$

Der letzte Quotient ist gleich dem Coeffizienten des ersten Gliedes mit entgegengesetztem Zeichen; folglich ist 2 eine Wurzel. Um zu erfahren, ob 2 nochmals Wurzel sei, haben wir folgende Rechnung:

$$\begin{array}{rrrrrr|l} -180 & +324 & -19 & -285 & +198 & -40 & \\ & & -117 & -196 & +178 & & \\ \hline & & & -98 & +89 & -20 & x=2. \end{array}$$

Da -117 nicht mehr durch 2 theilbar, so ist 2 keine Wurzel unserer Gleichung und da überdiess 2 der grösste unter der obern Grenze 4 liegende Divisor des letzten Gliedes, so hat die Gleichung überhaupt keine ganzzahlige positive Wurzel mehr. Wir haben daher nur noch den Divisor -1 zu probiren.

$$\begin{array}{rrrrrr|l} -180 & +324 & -19 & -285 & +198 & -40 & \\ & -180 & +504 & -523 & +238 & & \\ \hline & +180 & -504 & +523 & -238 & +40 & x=-1. \end{array}$$

Da der letzte Quotient gleich ist dem Coeffizienten des ersten Gliedes mit entgegengesetztem Zeichen, so ist $x=-1$ eine Wurzel unserer Gleichung und die von den Wurzeln 2 und -1 befreite Gleichung lautet:

$$(3)\quad 180x^4-504x^3+523x^2-238x+40=0.$$

Diese Gleichung ist vollständig und hat einen regelmässigen Zeichenwechsel; sie kann folglich keine negativen Wurzeln mehr zulassen. Wenn sie also noch reelle Wurzeln hat, so können es nur gebrochene oder inkommensurable p o s i t i v e Wurzeln sein. Eine obere Grenze derselben ist, wie sich durch Zerlegung leicht findet, jedenfalls 3.

Um noch die gebrochenen inkommensurabeln Wurzeln zu finden, dividiren wir erst durch den Coeffizienten des ersten Gliedes, wodurch wir bekommen:

$$(3\alpha)\quad x^4-\tfrac{14}{5}x^3+\tfrac{523}{180}x^2-\tfrac{119}{90}x+\tfrac{2}{9}=0$$

Setzen wir $x = \frac{y}{k}$, so kommt

$$y^4 - \frac{14}{5} k y^3 + \frac{523}{180} k^2 y^2 - \frac{119 k^3}{90} y + \frac{2k^4}{9} = 0.$$

Setzt man hier $k = 30$, so werden alle Coeffizienten ganz und man erhält als transformirte Gleichung:

$$(4) \quad y^4 - 84y^3 + 2615y^2 - 35700y + 180000 = 0,$$

deren Wurzeln das 30fache der Wurzeln der Gleichung (3) sind, und da die letzten zwischen 0 und 3 liegen, so werden die der Gleichung (4) zwischen 0 und 90 liegen. Die zwischen diesen Grenzen liegenden Divisoren des letzten Gliedes sind: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 25, 30, 32, 36, 40, 45, 48, 50, 60, 75, 80.

Die Prüfung derselben zeigt, dass von 1 bis 12 keiner die Gleichung verifizirt, dass dagegen 15, 20, 24 und 25 Wurzeln der Gleichung (4) sind, welche Rechnung mit Weglassung der Divisoren, die keine Wurzeln sind, in Folgendem dargestellt ist:

$$\begin{array}{rrrr|l}
y^4 - 84y^3 & + 2615y^2 & - 35700y & + 180000 & \\
-15 & + 1035 & - 23700 & & \\
\hline
-1 & + 69 & - 1580 & + 12000 & y=15 \\
 & + 20 & - 980 & & \\
\hline
 & + 1 & - 49 & + 600 & y=20
\end{array}$$

Die von den Wurzeln 15 und 20 befreite Gleichung heisst somit:

$$y^2 - 49y + 600 = 0$$

woraus folgt:

$$y = \tfrac{49}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{49}{2})^2 - 600}$$

$$y = \frac{49 \pm \sqrt{2401 - 2400}}{2} = \frac{49 \pm 1}{2};$$

daher $y = \frac{50}{2} = 25$ und $y = \frac{48}{2} = 24$ die beiden andern Wurzeln. Die Wurzeln der Gleichung (4) sind also:

$$y_1 = 15,\ y_2 = 20,\ y_3 = 24,\ y_4 = 25$$

und daher die Wurzeln von (3):

$$x_1 = \tfrac{15}{30} = \tfrac{1}{2};\ x_2 = \tfrac{20}{30} = \tfrac{2}{3};\ x_3 = \tfrac{24}{30} = \tfrac{4}{5} \text{ und } x_4 = \tfrac{25}{30} = \tfrac{5}{6};$$

somit die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (1):

-1, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{6}$ und daher das Polynom

$$180x^6 - 684x^5 + 667x^4 + 247x^3 - 768x^2 + 436x - 80 =$$
$$180(x+1)(x-2)(x-\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{2}{3})(x-\tfrac{4}{5})(x-\tfrac{5}{6}) =$$
$$(x+1)(x-2)(2x-1)(3x-2)(5x-4)(6x-5),$$

was man bei wirklicher Ausführung der Multiplikation auch bestätigt findet.

327. Beschränkung der Anzahl der als Wurzeln zu prüfenden Divisoren des letzten Gliedes.

Wenn, wie in dem eben behandelten Beispiel, die Anzahl der zu prüfenden Divisoren gross ist, so kann man eine Anzahl von Faktoren, die keine Wurzeln sind, durch ein einfaches Verfahren ausschliessen. Wenn nämlich a eine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$, so ist $f(x)$ theilbar durch $x-a$ (Nro. 307, Zusatz 1) und die sämmtlichen Coeffizienten des Quotienten $\frac{f(x)}{x-a}$ sind nach Nro. 308 ganze Zahlen, wenn die Coeffizienten von $f(x)$ es sind. Bezeichnen wir mit $f_1(x)$ diesen Quotienten, so haben wir also die identische Gleichung: $f(x)=(x-a)f_1(x)$.

Aus dieser ergeben sich folgende 2 Gleichungen:

1., für $x=1$: $f(1)=(1-a)f_1(1)=-(a-1)f_1(1)$

2., für $x=-1$: $f(-1)=(-1-a)f_1(-1)=-(a+1)f_1(-1)$

Da aber $f(1)$ und $f(-1)$ beide ganze Zahlen sind, so erkennen wir hieraus, dass wenn a eine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ ist, alsdann die um 1 verminderte Wurzel $f(1)$, die um 1 vermehrte Wurzel aber $f(-1)$ theilen muss.

Jede ganze Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ hat demnach die doppelte Eigenschaft, um 1 vermehrt $f(-1)$, und, um 1 vermindert, $f(+1)$ zu theilen. Divisoren, welche diese beiden Eigenschaften nicht zugleich besitzen, können daher von vorn herein als nicht Wurzeln weggeworfen worden.

So hatten wir im vorigen Beispiel:

$$f(y)=y^4-84y^3+2615y^2-35700y+180000=0$$

als zu prüfende Divisoren des letzten Gliedes:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 25, 30, 32, 36, 40, 45, 48, 50, 60, 75, 80.

Nun ist $f(1)=1-84+2615-35700+180000=146832=$
$2^4.3.7.19.23$ und

$f(-1)=1+84+2615+35700+180000=218400=2^5.3.5^2.7.13.$

Wir haben hier $f(1)$ und $f(-1)$ in ihre Primfaktoren zerlegt, weil man dann unmittelbar die Theilbarkeit beurtheilen kann. Die Divisoren 2, 3, 4 und 5 erfüllen beide Bedingungen, dagegen 6 nicht; denn $f(1)$ ist nicht theilbar durch $6-1$ oder 5; also ist 6 zu streichen; ebenso 8; denn $8+1=9$ theilt nicht $f(-1)$; ebenso 10 und 12; denn $10+1$ theilt nicht $f(-1)$ und $10-1$ nicht $f(1)$; 12 ist zu streichen, weil $12+1=13$ zwar wohl $f(-1)$, dagegen $12-1=11$ nicht $f(1)$ theilt, u. s. f. Wenn wir in dieser

Weise fortfahren, so finden wir, dass 18 und sämmtliche auf 25 folgende Divisoren weggeworfen werden müssen. Es bleiben demnach als Wurzeln nur zu prüfen: 1, 2, 3, 4, 5, 15, 20, 24 und 25, wodurch die Rechnung sehr vereinfacht wird.

328. Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Divisors zweier ganzen algebraischen Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$. Denkt man sich jede der beiden Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ in ihre Faktoren des ersten Grades zerlegt (Nro. 313), so kann es geschehen, dass einzelne dieser Faktoren beiden Funktionen gemeinschaftlich zukommen. Das Produkt sämmtlicher den beiden Funktionen gemeinschaftlichen Faktoren des ersten Grades heisst dann ihr grösster gemeinschaftlicher Divisor.

Die Bestimmung desselben ist ganz analog der des grössten gemeinschaftlichen Divisors zweier ganzen Zahlen. Wenn z. B. $f(x)$ von höherem Grade ist als $\varphi(x)$, so dividiren wir $f(x)$ durch $\varphi(x)$ so lange, bis wir zu einem Rest kommen von niedrigerem Grade als der Divisor. Mit diesem Rest dividiren wir in den ersten Divisor wieder bis wir einen Rest erhalten von niedrigerem Grade als der als Divisor verwendete erste Rest und fahren so fort, bis wir zu einer Division kommen, die aufgeht oder dann zu einem von x unabhängigen und von Null verschiedenen Rest. Im ersten Fall ist dann der Divisor der letzten Division der gesuchte grösste gemeinschaftliche Divisor; im letzten Fall existirt gar kein gemeinschaftlicher Divisor zwischen $f(x)$ und $\varphi(x)$ d. h. die beiden Funktionen sind prim unter sich.

Gesetzt $f(x) : \varphi(x)$ gebe als Quotient Q und als Rest R
$\varphi(x) : R$ „ „ „ Q_1 „ „ „ R_1
$R : R_1$ „ „ „ Q_2 „ „ „ R_2
$R_1 : R_2$ „ „ „ Q_3 „ „ „ R_3
$R_2 : R_3$ „ „ „ Q_4 „ „ „ $R_4=0$,

so schreiben wir wieder so viele Gleichungen an, als Divisionen vorkommen, deren jede ausdrückt, dass der Dividend gleich dem Produkt aus dem Divisor in den Quotienten mehr dem Rest sei. Wir haben dann:

1., $f(x) = \varphi(x) \cdot Q + R$
2., $\varphi(x) = R \cdot Q_1 + R_1$
3., $R = R_1 \cdot Q_2 + R_2$
4., $R_1 = R_2 \cdot Q_3 + R_3$
5., $R_2 = R_3 \cdot Q_4$

Durch Wiederholung des Raisonnements von Nro. 154 finden wir, 1., dass R_3 wirklich gemeinschaftlicher Divisor der beiden Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ ist, und 2., dass kein gemeinschaftlicher Divisor von höherem Grade als R_3 existirt.

Anmerkung. Der grösste gemeinschaftliche Divisor zweier Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ wird nicht verändert, wenn man eine derselben mit irgend einer Grösse multiplizirt oder dividirt, welche zu der andern prim ist. Denn die den beiden Funktionen gemeinschaftlichen Primfaktoren werden nach dieser Multiplikation oder Division noch genau dieselben sein, wie vorher, weil ja nach Voraussetzung die Grösse, mit der man die eine der beiden Funktionen multiplizirt oder dividirt hat, mit der andern gegebenen Funktion keinen Faktor gemein hat. Es wird somit auch das Produkt der den beiden gemeinschaftlichen Primfaktoren d. h. der grösste gemeinschaftliche Divisor nachher noch derselbe sein, wie vorher.

Man kann hievon Gebrauch machen, um die Rechnung zu vereinfachen, indem man, um die bei der Division entstehenden gebrochenen Coeffizienten zu vermeiden, den Dividenden mit einem passenden Zahlenfaktor multiplizirt. Ebenso wird man, wenn in einem Rest ein allen Gliedern gemeinschaftlicher Faktor vorkommt, diesen ohne weiteres weglassen können.

Beispiel 1. Den grössten gemeinschaftlichen Divisor zwischen

$$f(x)=x^4-14x^3+71x^2-154x+120$$

und

$$\varphi(x)=x^3-10x^2+29x-20 \text{ zu suchen.}$$

Erste Division.

$$\begin{array}{r|l}
x^4-14x^3+71x^2-154x+120 & x^3-10x^2+29x-20 \\
x^4-10x^3+29x^2-\ \ 20x & x-4 \\
\hline
-\ 4x^3+42x^2-134x+120 & \\
-\ 4x^3+40x^2-116x+\ \ 80 & \\
\hline
2x^2-\ \ 18x+\ \ 40 &
\end{array}$$

Dieser Rest ist theilbar durch 2; wir lassen daher diesen Faktor 2 weg und nehmen $x^2-9x+20$ als Divisor für die nächste Division.

2te Division.

$$\begin{array}{r|l}
x^3-10x^2+29x-20 & x^2-9x+20 \\
x^3-\ \ 9x^2+20x & x-1 \\
\hline
-\ \ x^2+\ \ 9x-20 & \\
-\ \ x^2+\ \ 9x-20 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Da dieser Rest $= 0$, so ist $x^2 - 9x + 20$ der grösste gemeinschaftliche Divisor dieser beiden Funktionen.

Beispiel 2. Den grössten gemeinschaftlichen Divisor zu suchen zwischen

$$f(x) = x^5 - 8x^4 + 13x^3 + 57x^2 - 198x + 135$$

und $$\varphi(x) = 2x^3 - 15x^2 + 37x - 15.$$

Zur Vermeidung von Brüchen multipliziren wir $f(x)$ mit 2 und bekommen dann:

Erste Division.

$$2x^5 - 16x^4 + 26x^3 + 114x^2 - 396x + 270 \mid 2x^3 - 15x^2 + 37x - 15$$

$$2x^5 - 15x^4 + 37x^3 - 15x^2 \qquad x^2 - x - 37$$

$$- x^4 - 11x^3 + 129x^2 - 396x + 270$$ oder, mit 2 multiplizirt:

$$- 2x^4 - 22x^3 + 258x^2 - 792x + 540$$

$$- 2x^4 + 15x^3 - 37x^2 + 15x$$

$$- 37x^3 + 295x^2 - 807x + 540$$ oder, mit 2 multiplizirt:

$$- 74x^3 + 590x^2 - 1614x + 1080$$

$$- 74x^3 + 555x^2 - 1369x + 555$$

$$R = 35x^2 - 245x + 525;$$

daher $$\frac{R}{35} = x^2 - 7x + 15.$$

Zweite Division:

$$2x^3 - 15x^2 + 37x - 15 \mid x^2 - 7x + 15$$

$$2x^3 - 14x^2 + 30x \qquad 2x - 1$$

$$- x^2 + 7x - 15$$

$$- x^2 + 7x - 15$$

$$0$$

Also ist der grösste gemeinschaftliche Divisor unserer 2 Polynome $= x^2 - 7x + 15$.

Beispiel 3. Den grössten gemeinschaftlichen Divisor zwischen

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 12$$

und $$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 6x + 5$$ zu bestimmen.

1ste Division.

Um die Division ohne Brüche möglich zu machen, multipliziren wir den Dividenden mit 4 und bekommen:

$$4x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 20x - 48 \mid 4x^3 + 6x^2 - 6x + 5$$

$$4x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 5x \qquad x + 1$$

$$2x^3 - 6x^2 + 15x - 48$$

mit 2 : $$4x^3 - 12x^2 + 30x - 96$$

$$4x^3 + 6x^2 - 6x + 5$$

$$R = - 18x^2 + 36x - 101$$

Wir dividiren diesen Rest durch -1 d. h. nehmen das Entgegengesetzte desselben als Divisor für die 2te Division.

2te Division.

$$\begin{array}{lrl}
 & 4x^3+\ 6x^2-\ 6x+\ 5 & |\ 18x^2-36x+101 \\
\text{mit } 9: & 36x^3+54x^2-54x+45 & \quad 2x+7 \\
 & 36x^3-72x^2+202x & \\ \hline
 & +126x^2-256x+45 & \\
 & 126x^2-252x+707 & \\ \hline
R= & -\ 4x-662 &
\end{array}$$

$$\frac{R}{-2}=2x+331.$$

Dritte Division:

$$\begin{array}{lrl}
 & 18x^2-\ 36x+\ 101 & |\ 2x+331 \\
 & 18x^2+2979x & \quad 9x-3015 \\ \hline
 & -3015x+\ 101 & \\
\text{mit } 2: & -6030x+\ 202 & \\
 & -6030x-997965 & \\ \hline
\text{Rest} = & +998167 &
\end{array}$$

Es bleibt also ein von x unabhängiger Rest; folglich hat $f(x)=x^4+2x^3-3x^2+5x-12$ mit ihrer ersten Ableitung $f'(x)=4x^3+6x^2-6x+5$ keinen gemeinschaftlichen Divisor.

329. Gemeinschaftliche Wurzeln zweier Gleichungen. Aus dem Vorigen folgt leicht, dass man die gemeinschaftlichen Wurzeln zweier Gleichungen $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ finden kann, wenn man den grössten gemeinschaftlichen Divisor zwischen $f(x)$ und $\varphi(x)$ sucht und diesen $=0$ setzt. Denn wenn D der grösste gemeinschaftliche Divisor, so sind die Quotienten $\frac{f(x)}{D}=f_1(x)$ und $\frac{\varphi(x)}{D}=\varphi_1(x)$ prim unter sich. Da nun $f(x)=D\,.\,f_1(x)$ und $\varphi(x)=D\,.\,\varphi_1(x)$, so können die beiden obigen Gleichungen ersetzt werden durch

$$D\,.\,f_1(x)=0 \text{ und } D\,.\,\varphi_1(x)=0,$$

welche zerfallen in

$$\begin{array}{c} D=0 \\ f_1(x)=0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c} D=0 \\ \varphi_1(x)=0. \end{array}$$

Weil aber $f_1(x)$ und $\varphi_1(x)$ prim unter sich, so sind die Wurzeln von $f_1(x)=0$ alle verschieden von denen von $\varphi_1(x)=0$ und es sind daher nur die Wurzeln der Gleichung $D=0$ den beiden Gleichungen gemeinschaftlich.

So fanden wir in Nro. 328 (Beispiel 1) $x^2-9x+20$ als grössten gemeinschaftlichen Divisor zwischen $x^4-14x^3+71x^2-154x+120$

und $x^3-10x^2+29x-20$; die gemeinschaftlichen Wurzeln der beiden Gleichungen:

$$(1) \quad x^4-14x^3+71x^2-154x+120=0$$
$$(2) \quad x^3-10x^2+29x-20=0$$

werden daher durch die Gleichung

$$x^2-9x+20=0$$

geliefert, welche 4 und 5 zu Wurzeln hat.

Indem man durch Division mit $x^2-9x+20$ diese gemeinschaftlichen Wurzeln entfernt, erhält man in

$$x^2-5x+6=0 \text{ und } x-1=0$$

die Gleichungen, deren erste die übrigen Wurzeln der Gleichung (1), die zweite aber die noch fehlende Wurzel der Gleichung (2) liefert.

Gleiche Wurzeln.

330. Hat eine Gleichung wiederholte kommensurable (ganze oder gebrochene) Wurzeln, so können wir sie nach den in No. 322 und 326 entwickelten Verfahren von diesen gleichen Wurzeln befreien.

In den für die Ermittlung der inkommensurabeln Wurzeln später abzuleitenden Methoden wird nun ausdrücklich vorausgesetzt, dass die Gleichung überhaupt keine wiederholten Wurzeln mehr habe. Es bleibt daher hier noch anzudeuten, wie man die Existenz gleicher Wurzeln erkennen und die Auflösung solcher Gleichungen auf die anderer Gleichungen zurückführen kann, deren Wurzeln sämmtlich verschieden sind.

331. Lehrsatz. *Wenn für $x=a$ die Funktion $f(x)$ und ihre $(n-1)$ ersten Derivirten verschwinden, so hat die Gleichung $f(x)=0$ n Wurzeln, jede $= a$.*

Setzen wir $x=a+h$, so ist

$$f(a+h)=f(a)+f'(a).h+f^2(a).\frac{h^2}{2}+f^3(a).\frac{h^3}{3!}+\dots f^{n-1}(a).\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$+f^n(a).\frac{h^n}{n!}+\dots+f^m(a).\frac{h^m}{m!}$$

Aus $x=a+h$ folgt auch: $h=x-a$; daher können wir die vorige Gleichung auch so schreiben:

$$(1) \quad f(x)=f(a)+f'(a).(x-a)+\frac{f^2(a)}{2}.(x-a)^2+\frac{f^3(a)}{3!}(x-a)^3+\dots$$
$$+\frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n+\dots+\frac{f^m(a)}{m!}(x-a)^m$$

Da nun nach Voraussetzung $f(a) = 0$, $f'(a) = 0$ etc. bis $f^{n-1}(a) = 0$, so reduzirt sich die Gleichung (1) auf

$$f(x) = (x-a)^n \frac{f^n(a)}{n!} + \ldots (x-a)^m \frac{f^m(a)}{m!} \text{ oder}$$

(2) $f(x) = (x-a)^n \cdot \varphi(x)$, wo dann $\varphi(x)$ für $x = a$ weder verschwindet, noch unendlich wird d. h. $x-a$ weder als Faktor, noch als Divisor enthält.

Aus (2) erkennt man aber sofort, dass die Gleichung $f(x) = 0$ die $n$fache Wurzel a enthält.

332. Lehrsatz. *Umgekehrt wenn $f(x) = 0$ n Wurzeln hat, jede $= a$, so müssen für $x = a$ ausser $f(x)$ auch noch ihre $(n-1)$ ersten Derivirten verschwinden.*

Denn wenn a eine $n$fache Wurzel von $f(x) = 0$, so muss $f(x)$ theilbar sein durch $(x-a)^n$ und somit

$$f(x) = (x-a)^n \cdot \varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ den Faktor $x-a$ nicht mehr enthält.

Damit aber $f(x)$ oder die in Gleichung (1) von Nro. 331 stehende Entwicklung theilbar sei durch $(x-a)^n$, müssen alle vor $(x-a)^n \frac{f^n(a)}{n!}$ stehenden Glieder $= 0$ sein und zwar für jeden Werth von x, was nur möglich ist, wenn ihre sämmtlichen Coeffizienten einzeln $= 0$ sind, woraus dann folgt, dass nicht nur $f(a)$, sondern auch $f'(a)$, $f^2(a) \ldots$ bis $f^{n-1}(a) = 0$ sein müssen.

333. Betrachten wir die n Gleichungen, welche erforderlich sind, damit a eine $n$fache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ sei, nämlich die Gleichungen:

$$f(a) = 0,\ f'(a) = 0,\ f^2(a) = 0 \ldots,\ f^{n-1}(a) = 0,$$

so drücken die $(n-1)$ letzten, nämlich die Gleichungen: $f'(a) = 0$ bis $f^{n-1}(a) = 0$ aus, dass $x = a$ auch Wurzel ist der Gleichung $f'(x) = 0$ und ihrer $(n-2)$ ersten Derivirten; nach Lehrsatz 331 muss daher $x = a$ eine $(n-1)$fache Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ sein und wir bekommen daher folgendes Resultat:

Wenn eine Gleichung $f(x) = 0$ die $n$fache Wurzel $x = a$ zulassen soll, so muss die Gleichung $f'(x) = 0$ dieselbe Wurzel $(n-1)$mal zulassen; somit existirt zwischen $f(x)$ und $f'(x)$ ein gemeinschaftlicher Divisor, der $= (x-a)^{n-1}$. Würde daher $f(x) = 0$ $n$mal die Wurzel a und $r$mal die Wurzel b zulassen, so müsste die Gleichung $f'(x) = 0$ $(n-1)$mal die Wurzel a und $(r-1)$ mal die Wurzel b zulassen d. h. $(x-a)^{n-1}(x-b)^{r-1}$ wäre gemeinschaftlicher Divisor zwischen $f(x)$ und $f'(x)$.

Der grösste gemeinschaftliche Divisor zwischen $f(x)$ und ihrer Derivirten $f'(x)$ ist demnach gleich dem Produkt der den wiederholten Wurzeln entsprechenden binomischen Faktoren, jeder derselben erhoben zu einer um 1 niedrigern Potenz, als die Wiederholungszahl der betreffenden Wurzel Einheiten hat.

334. Um zu erfahren, ob eine Gleichung $f(x) = 0$ wiederholte Wurzeln habe, darf man nur zwischen $f(x)$ und $f'(x)$ den grössten gemeinschaftlichen Divisor aufsuchen. Wenn kein solcher vorhanden ist, so hat die Gleichung auch keine wiederholten Wurzeln. Wollte man dann bloss die Gleichung von den wiederholten Wurzeln befreien d. h. nur eine Gleichung ableiten, in welcher jede Wurzel nur einmal vorkommt, so dürfte man nur $f(x)$ durch diesen grössten gemeinschaftlichen Divisor zwischen $f(x)$ und $f'(x)$ dividiren und den Quotienten $= 0$ setzen. Gesetzt z. B. die Gleichung enthielte die einfachen Wurzeln a, b, c, die doppelten Wurzeln d und e und die 3 fachen Wurzeln f und g, so wäre

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)^2(x-e)^2(x-f)^3(x-g)^3$$

Der grösste gemeinschaftliche Divisor zwischen $f(x)$ und ihrer Derivirten $f'(x)$ wäre

$$D = (x-d)(x-e)(x-f)^2(x-g)^2; \text{ daher}$$

$$\frac{f(x)}{D} = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)(x-f)(x-g)$$

und somit

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)(x-f)(x-g) = 0$$

eine Gleichung, die lauter verschiedene Wurzeln hat.

Es ergibt sich nun hieraus auch leicht eine Methode zur Bestimmung dieser Wurzeln. Setzen wir zur Abkürzung:

$$(x-a)(x-b)(x-c) = X_1$$
$$(x-d)(x-e) = X_2$$
$$(x-f)(x-g) = X_3,$$

so ist

$$f(x) = X_1 X_2^2 X_3^3$$

Der grösste gemeinschaftliche Divisor D zwischen $f(x)$ und $f'(x)$ wird daher sein:

$$D = X_2 X_3^2 .$$

Sei ferner D_1 der grösste gemeinschaftliche Divisor zwischen D und seiner Derivirten, so wäre $D_1 = X_3$ und wir hätten daher:

$$1., \; f(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 \; ; \; 2., \; D = X_2 X_3^2 \quad 3., \; D_1 = X_3$$

Es ist nun leicht zu übersehen, wie man die Polynome X_1, X_2 und X_3 selber finden kann. Indem wir jede der obigen Gleichungen durch die folgende dividiren, ergibt sich:

$$1., \quad \frac{f(x)}{D} = Q = X_1 X_2 X_3$$

$$2., \quad \frac{D}{D_1} = Q_1 = X_2 X_3$$

wozu wir noch schreiben 3., $D_1 = X_3$

Indem wir wieder jede Gleichung durch die folgende dividiren, bekommen wir endlich

$$\frac{Q}{Q_1} = X_1$$

$$\frac{Q_1}{D_1} = X_2$$

zu der wir setzen: $D_1 = X_3$

Nun könnte man die Funktionen X_1, X_2 und X_3 einzeln $= 0$ setzen, so bekäme man die Gleichungen

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0 \text{ und } X_3 = 0,$$

deren erste die einfachen, die zweite die doppelten, die dritte die dreifachen Wurzeln liefern würde.

B e i s p i e l. Sei

$$f(x) = x^7 + x^6 - 7x^5 - 7x^4 + 11x^3 + 11x^2 - 5x - 5 = 0$$

die gegebene Gleichung, so ist

$$f'(x) = 7x^6 + 6x^5 - 35x^4 - 28x^3 + 33x^2 + 22x - 5$$

Als grössten gemeinschaftlichen Divisor zwischen $f(x)$ und $f'(x)$ findet man:

$$D = x^3 + x^2 - x - 1$$

Ferner als grössten gemeinschaftlichen Divisor zwischen D und seiner Derivirten $3x^2 + 2x - 1$ findet man $D_1 = x + 1$ und da D_1 prim ist zu seiner Derivirten, so kann $f(x)$ nur von der Form sein $X_1 X_2^2 X_3^3$. Wir haben daher

$$1., \quad f(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 = x^7 + x^6 - 7x^5 - 7x^4 + 11x^3 + 11x^2 - 5x - 5$$

$$2., \quad D = X_2 X_3^2 = x^3 + x^2 - x - 1$$

$$3., \quad D_1 = X_3 = x + 1$$

Hieraus folgt:

$$\frac{f(x)}{D} = x^4 - 6x^2 + 5 = Q$$

$$\frac{D}{D_1} = x^2 - 1 = Q_1$$

$$D_1 = x + 1 = D_1$$

Daraus endlich ergibt sich:

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{x^4-6x^2+5}{x^2-1} = x^2-5 = X_1$$

$$\frac{Q_1}{D_1} = \frac{x^2-1}{x+1} = x-1 = X_2$$

$$D_1 = x+1 = X_3$$

Somit gibt uns $X_1 = x^2-5 = 0$ die einfachen,

$X_2 = x-1 = 0$ die doppelten,

$X_3 = x+1 = 0$ die dreifachen Wurzeln.

Die Gleichung hat demnach die einfachen Wurzeln $+\sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$, die doppelte Wurzel 1 und die dreifache Wurzel -1.

335. Lehrsatz: *Wenn zwischen zwei Zahlen k und k', die selber nicht Wurzeln sind einer Gleichung $f(x)=0$, eine, drei, überhaupt eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln liegen, so haben die Substitutionsresultate $f(k)$ und $f(k')$ entgegengesetzte Zeichen. Umgekehrt wenn man für die Substitution von k ein positives, für die Substitution von k' aber ein negatives Resultat erhält oder umgekehrt, so muss zwischen k und k' eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ liegen.*

Gesetzt, die Gleichung $f(x) = 0$ habe n reelle Wurzeln a_1, a_2, $a_3 \dots a_n$ und r complexe Wurzelpaare $\alpha_1 \pm \beta_1 i$, $\alpha_2 \pm \beta_2 i, \dots$ $\alpha_r \pm \beta_r i$, so entspricht dem Wurzelpaare $\alpha_1 \pm \beta_1 i$ das Produkt $(x-\alpha_1-\beta_1 i)(x-\alpha_1+\beta_1 i) = (x-\alpha_1)^2+\beta_1^2 = x^2-2\alpha_1 x+\alpha_1^2+\beta_1^2$, also ein trinomischer Faktor, der als Summe zweier Quadrate erscheint, von welchen das zweite (β_1^2) nie $= 0$ werden kann, so lange die Wurzel nicht reell d. h. β_1 nicht $= 0$ ist. Ebenso entspricht jedem complexen Wurzelpaar ein solcher trinomischer Faktor zweiten Grades und wir haben daher

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]\dots[(x-\alpha_r)^2+\beta_r^2]$$

oder $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)\varphi(x)$, wenn $\varphi(x)$ das Produkt der den complexen Wurzeln entsprechenden Faktoren bedeutet, welches Produkt stets positiv bleibt, was man auch an die Stelle von x für eine reelle Zahl setzen mag. Gesetzt nun, zwischen k und k' liege nur die eine reelle Wurzel a_3 und es sei etwa $k < a_3 < k'$, so wäre $k-a_3$ negativ, $k'-a_3$ aber positiv. Die beiden Ausdrücke

$$f(k)=(k-a_1)(k-a_2)(k-a_3)\ldots(k-a_n)\varphi(k) \text{ und}$$
$$f(k')=(k'-a_1)(k'-a_2)(k'-a_3)\ldots(k'-a_n)\varphi(k')$$

sind dann so beschaffen, dass die sämmtlichen Faktoren des zweiten Produktes das nämliche Zeichen besitzen, wie die ihnen entsprechenden des ersten mit Ausnahme des dritten, der im ersten Produkt negativ, im zweiten aber positiv ist; somit hat $f(k')$ das entgegengesetzte Zeichen von $f(k)$. Ebenso wenn zwischen k und k' 3, 5, 7, überhaupt eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln liegen, müssen eben so viele Faktoren des Produktes $f(k')$ das entgegengesetzte Vorzeichen von den entsprechenden Faktoren in $f(k)$ haben, während die übrigen alle in beiden Produkten das nämliche Vorzeichen besitzen; folglich müssen wieder $f(k)$ und $f(k')$ entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Umgekehrt behaupten wir: Wenn $f(k)$ und $f(k')$ entgegengesetzte Zeichen haben, so muss zwischen k und k' eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln liegen; denn wenn das Produkt $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)\varphi(x)$ für $x=k$ etwa positiv, für $x=k'$ aber negativ ausfällt, so ist — da $\varphi(x)$ unter allen Umständen positiv bleibt, — das nur dadurch möglich, dass durch Substitution von k' an die Stelle von k mehrere der n ersten Faktoren und zwar in ungerader Anzahl ihr Zeichen wechseln. Soll aber ein Faktor $x-a_2$ sein Zeichen ändern, wenn man erst $x=k$ und nachher $x=k'$ setzt d. h. sollen $k-a_2$ und $k'-a_2$ entgegengesetzte Zeichen haben, so muss a_2 zwischen k und k' liegen, entweder $k<a_2<k'$ oder $k'<a_2<k$ sein. Und sollen durch diese Substitution von k' an die Stelle von k 3, 5, 7 ... allgemein $2n+1$ Faktoren und damit das Produkt selbst das Zeichen wechseln, so müssen eben so viele, also jedenfalls eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln zwischen k und k' liegen. Würden dagegen 2, 4, 6 Faktoren ihr Zeichen ändern, so lägen eben so viele Wurzeln zwischen k und k'; das Produkt selbst aber bliebe im Zeichen unverändert d. h. $f(k)$ und $f(k')$ hätten dasselbe Zeichen.

336. Wir ziehen aus dem obigen Satze folgende Consequenzen:

1. Jede Gleichung von ungeradem Grade hat mindestens **eine** reelle Wurzel, deren Zeichen entgegengesetzt ist dem Vorzeichen des letzten Gliedes. Denn sei z. B. das letzte Glied positiv, wie in

$$f(x)=x^5-6x^4+7x^3-10x^2+12x+20=0$$

so wird $f(x)=+20$ für $x=0$; allein für $x=-\infty$ hat man $f(-\infty)$ $=-\infty$ nach Nro 305.

Da nun $f(0)$ und $f(-\infty)$ Resultate von entgegengesetztem Zeichen sind, so muss zwischen 0 und $-\infty$ eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln, also mindestens eine liegen. Diese Wurzel ist negativ, somit im Vorzeichen entgegengesetzt dem absoluten Gliede $+20$.

Wäre dagegen das letzte Glied negativ, wie z. B. in

$$x^5-6x^4+4x^3+3x^2-5x-13=0,$$

so hätte man: $f(0)=-13$ und $f(+\infty)=+\infty$; die Gleichung muss somit zwischen 0 und $+\infty$ eine gerade Anzahl reeller Wurzeln haben, hat daher mindestens eine positive Wurzel.

2. Jede Gleichung paaren (geraden) Grades, deren letztes Glied negativ ist, hat mindestens zwei reelle Wurzeln, deren eine positiv, die andere negativ ist.

Sei z. B. $f(x)=x^4+5x^3-10x^2+2x-12=0$,

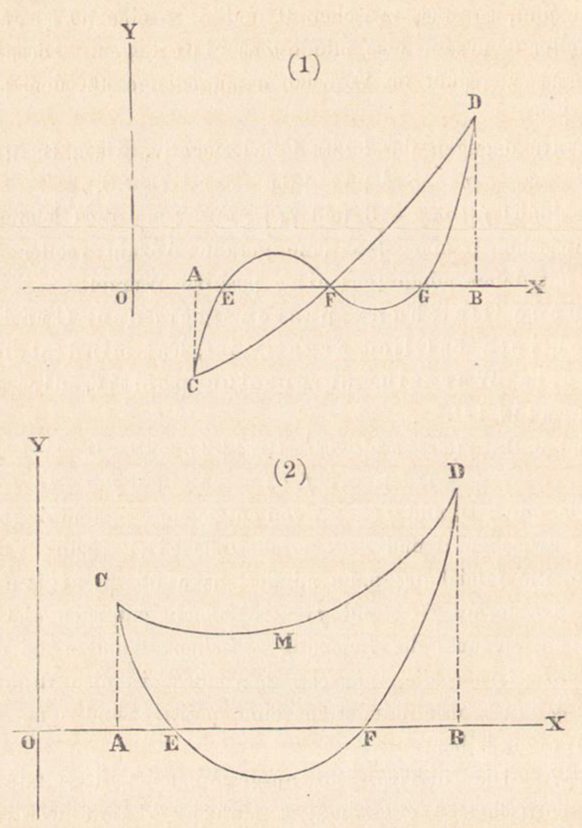
so ist $f(+\infty)=+\infty$, $f(0)=-12$ und $f(-\infty)=+\infty$.

Da nun $f(0)$ und $f(+\infty)$ von entgegengesetztem Zeichen sind, so muss zwischen 0 und $+\infty$ mindestens eine reelle Wurzel liegen d. h. die Gleichung muss mindestens eine positive Wurzel haben. Da ferner $f(0)$ und $f(-\infty)$ auch entgegengesetzte Zeichen haben, so muss die Gleichung zwischen 0 und $-\infty$ ebenfalls mindestens eine reelle Wurzel haben; diese ist also negativ; die Gleichung muss also mindestens eine positive und eine negative reelle Wurzel haben.

337. Die in Nro. 335 ausgesprochenen Resultate können auf geometrischem Wege äusserst einfach erkannt werden. Hat man eine Gleichung $f(x)=0$, so ist $f(x)$ eine stetige Funktion von x für das ganze Intervall von $-\infty$ bis $+\infty$, sobald $f(x)$ eine ganze algebraische Funktion ist. Man kann sich nun leicht ein graphisches Bild von dem Verlauf der Funktion $f(x)$ machen, wenn man ein rechtwinkliges Achsensystem wählt und dann die Werthe von x als Abscissen, die zugehörigen Funktionswerthe aber als Ordinaten aufträgt d. h. die Gleichung $y=f(x)$ geometrisch konstruirt.

Es genügt im Allgemeinen, dem x eine Anzahl ganzzahliger Werthe zu geben und die so erhaltenen Punkte durch einen zusammenhängenden Zug zu verbinden, um eine Vorstellung von dem Verlauf der Funktion, von der Anzahl und der Lage ihrer

reellen Wurzeln zu bekommen. Diese sind dann offenbar nichts Anderes, als die Abscissen der Durchgangspunkte der Curve durch die X Achse.



Wenn nun, wie in Fig. (1), für zwei Werthe $x = OA$ und $x = OB$ die entsprechenden Funktionswerthe AC und BD entgegengesetzte Zeichen haben, so liegen die dadurch bestimmten Curvenpunkte C und D auf verschiedenen Seiten der X Achse, und es muss daher die Curve, welche eine ununterbrochene ist, um vom Punkte C zum Punkte D zu gelangen, die X Achse nothwendig in einem Punkte F, oder in 3 Punkten (E, F und G), jedenfalls aber in einer ungeraden Anzahl von Punkten durchschneiden. Es liegen also zwischen $x = OA$ und $x = OB$ eine ungerade Anzahl von Wurzeln.

Haben dagegen die dem $x = OA$ und $x = OB$ entsprechenden Funktionswerthe AC und BD das nämliche Zeichen, wie in Fig.

(2), so muss die Curve, um von C zu D zu gelangen, die Abscissenachse entweder gar nicht (wie CMD) oder dann eine gerade Anzahl mal schneiden (wie $CEFD$). Denkt man sich in Fig. 2 die Curve $CEFD$ gehoben oder die X Achse gesenkt, so werden die Durchschnittspunkte E und F immer näher zusammenrücken und schliesslich in einen Punkt zusammenfallen, sobald die X Achse zur Tangente geworden ist; analytisch gesprochen heisst das: Die beiden Wurzeln $x=OE$ und $x=OF$ nähern sich immer mehr und fallen schliesslich zusammen; die Gleichung $f(x)=0$ hat dann zwischen $x=OA$ und $x=OB$ zwei gleiche reelle Wurzeln.

338. Definition. Betrachtet man in einem Polynom irgend zwei aufeinander folgende Glieder, so haben sie entweder gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen. Sie bilden im ersten Fall eine Zeichenfolge, im zweiten einen Zeichenwechsel. Ein vollständiges Polynom vom $m$ten Grade enthält $m+1$ Glieder; das zweite bildet mit dem ersten, das dritte mit dem zweiten u. s. f., das $(m+1)$te mit dem $m$ten eine Aufeinanderfolge zweier Zeichen, also entweder eine Zeichenfolge oder einen Zeichenwechsel, woraus hervorgeht, dass in jedem vollständigen Polynom die Anzahl der Zeichenfolgen mehr der Anzahl der Zeichenwechsel gleich der um 1 verminderten Gliederzahl oder gleich dem Grad des Polynoms sein muss.

339. Lehrsatz. (Zeichenregel von Descartes).

Wenn $f(x)$ irgend eine ganze rationale Funktion von x ist, ob vollständig oder unvollständig, so hat die Gleichung $f(x)=0$ nie mehr positive Wurzeln, als Zeichenwechsel.

Sei $\varphi(x)=0$ eine Gleichung, welche nur imaginäre und reelle negative Wurzeln enthält, so können wir daraus eine Gleichung mit den n positiven Wurzeln a_1, a_2, a_3 .... a_n ableiten, indem wir die linke Seite $\varphi(x)$ mit dem Produkt der diesen positiven Wurzeln entsprechenden binomischen Faktoren $x-a_1$, $x-a_2$ etc. bis $x-a_n$ multipliziren, so dass also die Gleichung

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots\ldots(x-a_n)\,\varphi(x)=0$$

n positive Wurzeln hat. Können wir nun zeigen, dass so oft ein Polynom $\varphi(x)$ mit einem Binom von der Form $x-a$ multiplizirt wird, wo a an sich positiv ist, das Produkt mindestens einen Zeichenwechsel mehr enthält, als der Multiplikand, so folgt daraus, dass durch Einführung jeder neuen positiven Wurzel mindestens ein Zeichenwechsel mehr entsteht, somit die Zahl der positiven

Wurzeln unter keinen Umständen grösser sein kann, als die Anzahl der Zeichenwechsel. Sei nun

$$(1)\quad \varphi(x) =$$
$$x^m + \ldots . A x^n - B x^{n-1} - \ldots . - B' x^r + C x^{r-1} + \ldots . \pm F x^s \mp G x^{s-1} \ldots . \mp L,$$

worin Ax^n das letzte der unmittelbar auf x^m folgenden positiven Glieder bedeutet, $-Bx^{n-1}$ das *erste* und $-B'x^r$ dann das *letzte* der zunächst folgenden *negativen* Glieder vorstellt, B' also $= 0$ ist, wenn nur *ein* negatives Glied auf Ax^n folgt. Das nächste, auf $-B'x^r$ folgende Glied müsste also unter allen Umständen positiv sein; wir haben es mit Cx^{r-1} bezeichnet. Wir wollen ferner annehmen, auf Cx^{r-1} folge noch eine Anzahl beliebiger, bald positiver, bald negativer Glieder, deren letztes wir mit $\pm Fx^s$ bezeichnen, worauf noch Glieder mit entgegengesetzten Zeichen folgen, nämlich lauter negative, wenn $\pm Fx^s$ positiv und lauter positive, wenn $\pm Fx^s$ negativ ist. Es ist nun vor der Hand einmal klar, dass jedes *beliebige* Polynom, wie auch die Vorzeichen der einzelnen Glieder beschaffen sein mögen, durch das Polynom (1) repräsentirt wird. Denn entweder enthält dasselbe lauter positive Glieder, in welchem Fall B, B', C etc. sämmtlich $= 0$ und Ax^n das letzte Glied wäre; oder es enthält auch negative Glieder. Folgt das erste negative Glied unmittelbar auf x^m, so wäre $A = 0$ und $-Bx^{n-1}$ wäre das 2te Glied. Hat es auf dieses noch mehr negative Glieder, so ist das unmittelbar in (1) angedeutet; würde aber nach $-Bx^{n-1}$ gleich wieder ein positives Glied folgen, so wären alle Coeffizienten nach $-B$ bis und mit $-B' = 0$ und Cx^{r-1} wäre das nächste Glied u. s. f.

Bilden wir nun das Produkt aus $\varphi(x)$ in $x - a$, so kommt:

$$\begin{array}{lllllll}
(1)\ [x^m + \ldots & + A x^n & - B x^{n-1} - \ldots - B' x_r & + C x^{r-1} + \ldots \pm F x^s & \mp G^{s-1} \mp \ldots & \mp L](x- \\
\hline
(2)\begin{cases} x^{m+1} + \ldots \\ \quad - a x^m \ldots + \end{cases} & \begin{array}{l} + A x^{n+1} \\ \end{array} & \begin{array}{l} - B x^n - \ldots - B' x^{r+1} \\ - A a x^n - \ldots \end{array} & \begin{array}{l} + C x^r + \ldots \\ + B' a x^r + \ldots . \end{array} & \begin{array}{l} \pm F x^{s+1} \mp G x^s \mp \ldots \\ \mp F a x^s \mp \ldots \end{array} & \begin{array}{l} \mp L x \\ \pm L \end{array} \\
\hline
(3)\ x^{m+1} + \ldots & & - (B + A a) x^n - \ldots & + (C + B' a) x^r + \ldots & \mp (G + F a) x^s \mp \ldots & \pm L
\end{array}$$

Die Glieder des ersten Partialproduktes (erste Zeile von (2)) haben sämmtlich das *gleiche*, die des zweiten Partialproduktes (2te Zeile von (2)) dagegen sämmtlich das *entgegengesetzte* Vorzeichen der entsprechenden (gleichvielten) Glieder des Multiplikanden. Wie steht es aber mit dem Totalprodukt (3)? Das erste Glied x^{m+1} ist nothwendig positiv; von den $m - n$ zunächst darauf folgenden Gliedern lässt sich nichts Bestimmtes in Bezug auf das Vorzeichen behaupten; denn ihre Coeffizienten sind aus je einem positiven und einem negativen Theil zusammengesetzt, von

deren Grössenverhältniss das Vorzeichen des ganzen Coeffizienten abhängt. Dagegen ist das Glied mit x^n im Totalprodukt entschieden negativ; denn von den zwei Bestandtheilen $-B$ und $-Aa$ seines Coeffizienten können nie beide gleich Null sein. Es könnte $B=0$ sein, dann nämlich, wenn $\varphi(x)$ lauter positive Glieder enthielte, so dass Ax^n das letzte Glied in $\varphi(x)$ und die Coeffizienten B, B', C etc. also sämmtlich $=0$ wären. Alsdann würde $-(B+Aa)x^n$ sich auf $-Aax^n$ reduziren und diess wäre dann das letzte Glied des Produktes $(x-a)\varphi(x)$ und zwar negativ, während die vorangehenden Glieder alle positiv wären. Es hätte somit $(x-a)\varphi(x)$ mindestens einen Zeichenwechsel, während $\varphi(x)$ gar keinen besässe. Ist aber B nicht $=0$ d. h. hat $\varphi(x)$ auch negative Glieder, so könnte allenfalls $A=0$ sein (dann nämlich, wenn in $\varphi(x)$ schon das zweite Glied negativ wäre). Allein da jetzt B nicht $=0$ sein kann, so wird das Glied mit x^n im Produkt jedenfalls einen von Null verschiedenen negativen Coeffizienten haben; folglich enthält das Produkt $(x-a)\varphi(x)$ von x^{m+1} an bis zu dem Gliede $-(B+Aa)x^n$ mindestens einen Zeichenwechsel, indess $\varphi(x)$ von dem Gliede x^m bis zu dem Gliede $-Bx^{n-1}$ nur einen Zeichenwechsel enthält. Von dem Gliede $-Bx^{n-1}$ bis zu $+Cx^{r-1}$ in $\varphi(x)$ hat es nur einen Zeichenwechsel; in dem Produkt $(x-a)\varphi(x)$ aber hat es von $-(B+Aa)x^n$ bis zu $+(C+B'a)x^r$ wieder mindestens einen Zeichenwechsel, da der Coeffizient $C+B'a$ von Null verschieden ist, sobald $\varphi(x)$ auch negative Glieder enthält. So können wir fortfahren und finden, dass jedem Zeichenwechsel von $\varphi(x)$ mindestens ein Zeichenwechsel in dem Produkt $(x-a)\varphi(x)$ entspricht bis zu dem Gliede $\mp Gx^{s-1}$ in $\varphi(x)$ und dem Gliede $\mp(G+Fa)x^s$ im Produkt. Allein $\varphi(x)$ enthält von $\mp Gx^{s-1}$ nur noch Zeichenfolgen, während in dem Produkt (3) das letzte Glied $\pm La$ dem Vorzeichen nach entgegengesetzt ist dem Gliede $\mp(G+Fa)x^s$; somit enthält $(x-a)\varphi(x)$ mindestens einen Zeichenwechsel mehr als $\varphi(x)$.

Es hat also $(x-a_1)\varphi(x)$ wenigstens einen Zeichenwechsel mehr als $\varphi(x)$; $(x-a_2)(x-a_1)\varphi(x)$ hat wieder mindestens einen Zeichenwechsel mehr als $(x-a_1)\varphi(x)$, also mindestens zwei mehr als $\varphi(x)$, und so ergibt sich, dass $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)\varphi(x)$ endlich wenigstens n Zeichenwechsel mehr als $\varphi(x)$ enthält.

Wenn also $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)\varphi(x)=f(x)$, so hat die Gleichung $f(x)=0$ gerade n positive Wurzeln und mindestens

n Zeichenwechssl, also unter keinen Umständen mehr positive Wurzeln, als Zeichenwechsel.

340. Lehrsatz. *Eine vollständige Gleichung hat nie mehr negative Wurzeln als Zeichenfolgen; ebenso eine unvollständige Gleichung, in welcher die Glieder abwechselnd von paarem und unpaarem Grade sind.*

Um das einzusehen, denken wir uns in der Gleichung $f(x) = 0$ die Unbekannte x durch $-x'$ ersetzt, so sind die Wurzeln der neuen Gleichung $f(-x') = 0$ dem Zeichen nach entgegengesetzt denen von $f(x) = 0$. Allein wenn $f(x) = 0$ vollständig ist oder wenn, falls sie unvollständig, von je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern das eine von geradem, das andere von ungeradem Grade ist, so wird in Folge der Substitution von $-x'$ an die Stelle von x je das 2te, 4te, 6te Glied etc. sein Zeichen ändern, wodurch eine Zeichenfolge in einen Zeichenwechsel, ein Zeichenwechsel aber in eine Zeichenfolge übergeht. Die Gleichung $f(-x') = 0$ wird demnach genau so viele Zeichenfolgen haben, wie die frühere Zeichenwechsel, und so viele Zeichenwechsel, als die frühere Zeichenfolgen. Nun kann aber $f(-x') = 0$ nicht mehr positive Wurzeln haben, als Zeichenwechsel oder, was dasselbe ist, nicht mehr positive Wurzeln, als die ursprüngliche Gleichung $f(x) = 0$ Zeichenfolgen; da aber die positiven Wurzeln der zweiten Gleichung den negativen Wurzeln der ursprünglichen Gleichung $f(x) = 0$ entsprechen, so hat diese nicht mehr negative Wurzeln, als Zeichenfolgen.

Anmerkung 1: Wenn die Gleichung $f(x) = 0$ unvollständig, aber nicht so beschaffen ist, dass je zwei aufeinanderfolgende Glieder von verschiedenartigem Grade sind, so würde keineswegs die Zahl der negativen Wurzeln übertroffen oder zum mindesten erreicht werden von der Zahl der Zeichenfolgen. So hat nach No. 336 (1) die Gleichung

$$x^5 - 7x^3 + 10x^2 - 15x + 20 = 0$$

jedenfalls eine negative Wurzel, obschon sie nur Zeichenwechsel und keine Zeichenfolge darbietet.

Anmerkung 2. Aus dem obigen Lehrsatz ergibt sich auch, dass wenn man von einer vollständigen Gleichung wüsste, dass ihre Wurzeln alle reell wären, alsdann die Anzahl ihrer positiven Wurzeln gerade gleich der Anzahl der Zeichenwechsel, die der negativen aber gleich der Anzahl der Zeichenfolgen sein müsste. Denn wenn v

die Zahl der Zeichenwechsel, f die der Zeichenfolgen, p die Anzahl der positiven und n die der negativen Wurzeln bedeutet, so muss sowol $v+f$, als $p+n$ gleich dem Grade der Gleichung, daher $v+f=p+n$ sein. Nun ist nach No. 339 die Zahl p der positiven Wurzeln einmal nie grösser, als die Anzahl v der Zeichenwechsel; sie kann aber auch nicht kleiner sein; denn wäre $p<v$, so würde aus $v+f=p+n$ mit Nothwendigkeit folgen: $n>f$, was nach No. 340 unmöglich ist. Kann aber p weder grösser, noch kleiner als v sein, so muss $p=v$ sein, woraus dann folgt, dass auch $n=f$ d. h. eine vollständige Gleichung mit lauter reellen Wurzeln hat gerade so viele positive Wurzeln, als Zeichenwechsel und so viele negative, als Zeichenfolgen.

Damit ist natürlich noch keineswegs gesagt, dass nicht auch eine unvollständige Gleichung lauter reelle Wurzeln haben könne; so sind z. B. die Wurzeln der Gleichung $x^2-25=0$ reell, die eine $=+5$, die andere $=-5$; es entspricht hier der negativen Wurzel -5 gar keine Zeichenfolge; ebenso sind die Wurzeln der Gleichung $x^4-9x^2+20=0$ alle reell, zwei positiv und zwei negativ, ohne dass den letzten Zeichenfolgen entsprächen.

341. Definition. Wenn wir für die beiden complexen Wurzelpaare $\alpha_1\pm\beta_1 i$ und $-\alpha_1\pm\beta_1 i$, die sich bloss durch das Vorzeichen des reellen Theiles unterscheiden, die entsprechenden binomischen Faktoren bilden, so erhalten wir:

$$(x-\alpha_1-\beta_1 i)(x-\alpha_1+\beta_1 i)=(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2=x^2-2\alpha_1 x+\alpha_1^2+\beta_1^2$$
$$(x+\alpha_1-\beta_1 i)(x+\alpha_1+\beta_1 i)=(x+\alpha_1)^2+\beta_1^2=x^2+2\alpha_1 x+\alpha_1^2+\beta_1^2.$$

Die erhaltenen Resultate unterscheiden sich also nur durch das Vorzeichen des Gliedes mit der ersten Potenz von x. Wir wollen daher eine complexe Wurzel positiv oder negativ nennen, je nachdem ihr reeller Theil positiv oder negativ ist. Es entspricht alsdann einem positiven complexen Wurzelpaar ein trinomischer Faktor von der Form: x^2-Px+Q, und einem negativen ein Faktor von der Form x^2+Px+Q.

Wir haben früher (No. 312, 4 und 5) gesehen, dass wenn alle Wurzeln einer Gleichung reell und positiv sind, die Gleichung vollständig sein und einen regelmässigen Zeichenwechsel darbieten muss; dass dagegen, wenn die Wurzeln alle reell und negativ sind, die Gleichung ebenfalls vollständig wird, aber mit lauter Zeichenfolgen. Aehnliches findet nun auch bei complexen Wurpaaren statt.

342. Lehrsatz: *Eine Gleichung mit lauter positiven complexen Wurzelpaaren ist vollständig und bietet einen regelmässigen Zeichenwechsel dar; eine Gleichung mit lauter negativen complexen Wurzelpaaren ist ebenfalls vollständig und hat nur Zeichenfolgen.*

Betrachten wir zunächst eine Gleichung mit zwei positiven complexen Wurzelpaaren, etwa $\alpha_1 \pm \beta_1 i$ und $\alpha_2 \pm \beta_2 i$, so wird diese sein:

$$(1)\quad (x-\alpha_1-\beta_1 i)(x-\alpha_1+\beta_1 i)(x-\alpha_2-\beta_2 i)(x-\alpha_2+\beta_2 i)=0$$

oder $[(x-\alpha_1)^2+\beta_1{}^2][(x-\alpha_2)^2+\beta_2{}^2]=0$, wo jeder der beiden Faktoren die Form hat x^2-Px+Q.

Bezeichnen wir zur Abkürzung den ersten mit $x^2-P'x+Q'$, den zweiten mit $x^2-P''x+Q''$, so bekommt man durch unmittelbare Ausführung der Multiplikation:

$$x^4-(P'+P'')x^3+(Q'+P'P''+Q'')x^2-(P''Q'+P'Q'')x+Q'Q''=0.$$

Die Gleichung (1) hat daher die Form:

$$(2)\quad x^4-P_1x^3+P_2x^2-P_3x+P_4=0$$

d. h. sie ist vollständig und hat einen regelmässigen Zeichenwechsel. Um nun die allgemeine Gültigkeit dieses Gesetzes nachzuweisen, wollen wir einmal annehmen, es bestehe dasselbe für eine Gleichung mit n positiven complexen Wurzelpaaren und dann zeigen, dass es auch für $n+1$ solche Wurzelpaare gelten muss. Sei daher

$$(2)\quad x^{2n}-P_1x^{2n-1}+P_2x^{2n-2}-P_3x^{2n-3}+\dots$$
$$+P_{2n-2}x^2-P_{2n-1}x+P_{2n}=0$$

eine solche Gleichung mit n positiven complexen Wurzelpaaren, so erhalten wir hieraus eine Gleichung, welche ein complexes Wurzelpaar mehr enthält, wenn wir die linke Seite mit dem diesem Wurzelpaare entsprechenden trinomischen Faktor multipliziren. Sei x^2-Rx+S dieser Faktor, so bekommen wir:

$$(x^{2n}-P_1x^{2n-1}+P_2x^{2n-2}-P_3x^{2n-3}+\dots+P_{2n-2}x^2-P_{2n-1}x+P_{2n})(x^2-Rx+S)$$

$$\begin{array}{l} x^{2n+2}-P_1x^{2n+1}+P_2x^{2n}-P_3x^{2n-1}+\dots+P_{2n-2}x^4-P_{2n-1}x^3+P_{2n}x^2 \\ \quad -Rx^{2n+1}+RP_1x^{2n}-RP_2x^{2n-1}+\dots\quad -RP_{2n-2}x^3+RP_{2n-1}x^2-RP_{2n}x \\ \quad\quad +Sx^{2n}-SP_1x^{2n-1}+\dots\quad +SP_{2n-2}x^2-SP_{2n-1}x+SP_{2n} \end{array}$$

$$x^{2n+2}-(P_1+R)x^{2n+1}+(P_2+RP_1+S)x^{2n}-(P_3+RP_2+SP_1)x^{2n-1}+\dots$$
$$+(P_{2n}+RP_{2n-1}+SP_{2n-2})x^2-(RP_{2n}+SP_{2n-1})x+SP_{2n}$$

welches Produkt ein vollständiges Polynom vom Grade $2n+2$ mit regelmässigem Zeichenwechsel ist. Indem wir es $=0$ setzen, bekommen wir eine Gleichung von derselben Form, wie (2). Wenn also jenes Gesetz für n complexe Wurzelpaare gilt, so muss es

auch noch für $n+1$ solcher Wurzelpaare gelten. Nun haben wir aber die Richtigkeit des Satzes für zwei Wurzelpaare direkte erkannt; es gilt somit auch für 3, daher auch für 4 Wurzelpaare u. s. f. d. h. es ist allgemein.

Dass aber eine Gleichung mit lauter negativen complexen Wurzelpaaren nur positive und reelle Coeffizienten haben kann, leuchtet sofort ein; denn jedem solchen Wurzelpaar entspricht ein trinomischer Faktor von der Form x^2+Px+Q d. h. ein Trinom mit lauter positiven Coeffizienten; das Produkt derselben wird daher auch nur positive Glieder haben können.

Wenn wir dieses Resultat zusammenhalten mit dem früher in Nro. 312 gefundenen, so können wir sagen: Sobald eine Gleichung lauter positive Wurzeln hat, gleichviel, ob reelle positive Wurzeln oder complexe positive Wurzelpaare oder beides zugleich, so ist sie vollständig und hat lauter Zeichenwechsel; wenn sie dagegen nur negative Wurzeln besitzt, so ist sie ebenfalls vollständig, hat aber lauter Zeichenfolgen.

Zusatz. Wenn umgekehrt eine Gleichung vollständig ist und einen regelmässigen Zeichenwechsel hat, so kann sie entweder

1. lauter reelle positive Wurzeln, oder
2. lauter complexe positive Wurzelpaare, oder
3. theils reelle positive Wurzeln, theils complexe positive

Wurzelpaare haben, womit jedoch noch keineswegs gesagt ist, dass einer dieser 3 Fälle stattfinden müsse d. h. dass eine vollständige Gleichung mit lauter Zeichenwechseln nicht auch durch andere Combinationen der Wurzeln erreichbar sei.

Ebenso kann eine vollständige Gleichung mit lauter Zeichenfolgen entweder

1. lauter reelle negative Wurzeln, oder
2. lauter complexe negative Wurzelpaare, oder
3. theils reelle negative, theils complexe negative Wurzelpaare haben.

Lehrsatz von Sturm.

343. Wir wissen bereits, dass wenn zwei Zahlen k und k', in $f(x)$ gesetzt, Resultate von entgegengesetztem Vorzeichen geben, zwischen k und k' eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln liegen muss. Es wäre nun von grosser Wichtigkeit, die Anzahl der zwischen zwei beliebigen Zahlen α und β liegenden reellen Wurzeln genau kennen zu lernen, und das lehrt uns in der

That der Sturm'sche Lehrsatz, an dessen Entwicklung wir nun gehen.

Vorerst denken wir uns eine von ihren gleichen (wiederholten) Wurzeln befreite Gleichung, stellen uns also eine Gleichung $f(x)=0$ vor so beschaffen, dass zwischen $f(x)$ und $f'(x)$ kein gemeinschaftlicher Divisor mehr existirt d. h. dass $f(x)$ und $f'(x)$ prim unter sich sind. Dann verfahren wir mit $f(x)$ und $f'(x)$ gerade so, als ob wir ihren grössten gemeinschaftlichen Divisor aufsuchen wollten, mit dem einzigen Unterschied, dass wir das Vorzeichen eines jeden Restes ändern, bevor wir ihn als Divisor verwenden. Wir dividiren daher $f(x)$ durch $f'(x)$ und wenn wir dann mit $f_2(x)$ den mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Rest dieser ersten Division bezeichnen, so dividiren wir $f'(x)$ durch $f_2(x)$, bis wir zu einem Rest kommen von niedrigerem Grade als der Divisor und den wir nach Aenderung der Vorzeichen aller seiner Glieder mit $f_3(x)$ bezeichnen wollen. Wir dividiren wieder $f_2(x)$ durch $f_3(x)$ und kommen so zu einem Reste von niedrigerem Grade als $f_3(x)$, den wir, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, durch $f_4(x)$ bezeichnen wollen. In gleicher Weise fahren wir fort, bis wir schliesslich zu einem von x unabhängigen d. h. numerischen Reste kommen. Sei $f_n(x)$ dieser mit entgegengesetztem Zeichen genommene Rest, so sind also $-f_2(x)$, $-f_3(x)$, $-f_4(x) \ldots -f_n(x)$ die successiven Reste, $f_2(x)$, $f_3(x) \ldots$ bis $f_n(x)$ aber die mit umgekehrtem Zeichen genommenen Reste. Die Betrachtung der Polynome

$$f(x),\ f'(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x)\ \ldots\ldots f_n(x)$$

gibt uns nun ein Mittel in die Hand, genau zu entscheiden, wie viele reelle Wurzeln die Gleichung $f(x)=0$ zwischen den beiden Zahlen α und β enthält, von welchen die zweite die grössere sein möge. Wir substituiren nämlich in jene Reihe die Zahl α, hernach die grössere Zahl β, bilden also die zwei Reihen

$$f(\alpha),\ f'(\alpha),\ f_2(\alpha),\ f_3(\alpha),\ f_4(\alpha)\ \ldots\ldots f_n(\alpha) \text{ und}$$
$$f(\beta),\ f'(\beta),\ f_2(\beta),\ f_3(\beta),\ f_4(\beta)\ \ldots\ldots f_n(\beta)$$

und zählen nun die Zeichenwechsel, welche in jeder dieser beiden Reihen vorkommen. Wenn die erste Reihe v, die zweite v' Zeichenwechsel darbietet, so liegen gerade $v - v'$ reelle Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ zwischen α und β. Darin besteht der Lehrsatz von Sturm, den wir in folgender Weise ausdrücken können:

Lehrsatz: *Wenn man in der Reihe*

$$f(x),\ f'(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x)\ \ldots\ldots f_n(x) \quad (\gamma)$$

die beiden Zahlen α und β, die selber nicht Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ sind und von denen $\beta > \alpha$ sein möge, an die Stelle von x substituirt, so ist die Anzahl der Zeichenwechsel für $x=\beta$ höchstens so gross als die Zahl der Zeichenwechsel für $x=\alpha$, und wenn sie geringer ist, so gibt die Differenz genau die Anzahl der zwischen α und β liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ an.

Wir wollen mit q_1, q_2, q_3 etc. bis q_{n-1} die Quotienten der einzelnen Divisionen bezeichnen, so ist bei jeder derselben das Produkt aus dem Divisor in den Quotienten mehr dem Rest gleich dem Dividenden. Wir bekommen daher folgende identische Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= q_1 \cdot f'(x) - f_2(x) \\ f'(x) &= q_2 \cdot f_2(x) - f_3(x) \\ f_2(x) &= q_3 \cdot f_3(x) - f_4(x) \qquad \text{(I)} \\ f_3(x) &= q_4 \cdot f_4(x) - f_5(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n-2}(x) &= q_{n-1} \cdot f_{n-1}(x) - f_n(x) \end{aligned}$$

Wir wollen uns nun zunächst Folgendes merken:

1. Für den nämlichen Werth von x können nie zwei aufeinander folgende Funktionen der Reihe (γ) verschwinden. Wenn also für $x=a$ z. B. $f_r(x)=0$ würde d. h. wenn $f_r(a)=0$ wäre, so könnten weder $f_{r-1}(a)$ noch $f_{r+1}(a)=0$ sein. Denn man hat:

$$(1)\quad f_{r-1}(x)=q_r f_r(x) - f_{r+1}(x)$$

$$(2)\quad f_r(x) = q_{r+1} f_{r+1}(x) - f_{r+2}(x).$$

Wenn nun für $x=a$ die Funktionen $f_{r-1}(x)$ und $f_r(x)$ verschwänden, so müsste nach Gleichung (1) auch $f_{r+1}(a)=0$ sein. Allein aus $f_r(a)=0$ und $f_{r+1}(a)=0$ würde mittelst der Gleichung (2) sich ergeben: $f_{r+2}(a)=0$, und so könnte man fortschliessen und fände dann, dass auch $f_n(a)=0$ sein d. h. $f_n(x)$ für $x=a$ verschwinden müsste. Das ist aber unmöglich; denn da nach Voraussetzung $f(x)$ und $f'(x)$ prim unter sich sind, so ist $f_n(x)$ von x unabhängig und von Null verschieden.

2. Wenn für $x=a$ irgend eine der Funktionen, z. B. $f_r(x)$ verschwindet, so reduziren sich die ihr vorangehende und die nachfolgende auf unbenannte Zahlen mit entgegengesetztem Vorzeichen. Denn setzt man in der ersten der obigen Gleichungen $x=a$, so bekommt man

$$f_{r-1}(a) = q_r f_r(a) - f_{r+1}(a)$$

und wenn nun $f_r(a)=0$, so hat man: $f_{r-1}(a) = -f_{r+1}(a)$, woraus

hervorgeht, dass $f_{r-1}(x)$ und $f_{r+1}(x)$ für $x = a$ entgegengesetzte Vorzeichen annehmen.

Wir wollen nun in der Reihe der Funktionen

$$f(x), f'(x), f_2(x), f_3(x) \dots f_n(x) \quad (\gamma)$$

die Variable x stetig wachsen lassen von $x=\alpha$ bis zu $x=\beta$ und untersuchen, welche Veränderungen dadurch in den Zeichenwechseln dieser Reihe hervorgerufen werden.

Da ist nun einmal leicht einzusehen, dass keine dieser Funktionen ihr Zeichen ändert, so lange x bei seinem Wachsen nicht einen Werth annimmt, für welchen irgend eine derselben annullirt wird. Denn wenn zwischen k und k' keine Zahl liegt, welche Wurzel ist der Gleichung $f_r(x)=0$, so müssen $f_r(k)$ und $f_r(k')$ gleiche Zeichen haben. Es behält also dann jede der obigen Funktionen ihr Zeichen bei und die Anzahl der Zeichenwechsel in Reihe (γ) bleibt demnach ungestört. Eine Aenderung in der Anzahl oder in der Aufeinanderfolge der Zeichenwechsel ist also nur dann möglich, wenn x bei seinem stetigen Wachsen durch einen Werth hindurchgeht, für welchen eine oder mehrere dieser Funktionen verschwinden. Wir behaupten nun: Wenn x einen Werth annimmt, für welchen eine der spätern d. h. der auf die erste folgenden Funktionen verschwindet, die erste aber nicht, so bleibt die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe (γ) unverändert; so oft dagegen x einen Werth annimmt, für welchen die erste Funktion selbst annullirt wird, so muss ein Zeichenwechsel in (γ) verschwinden.

Um die erste dieser Behauptungen nachzuweisen, nehmen wir an, es sei a eine zwischen α und β liegende Zahl, für welche $f_r(x)=0$ werde und es bezeichne ω eine unendlich kleine Zahl, so dass $a-\omega$, a und $a+\omega$ drei unmittelbar auf einander folgende Werthe bedeuten, welche x bei seinem stetigen Wachsen von α bis β annimmt; da dann zwischen $a-\omega$ und $a+\omega$ nur die eine Wurzel a von $f_r(x) = 0$ liegt, so werden $f_r(a-\omega)$ und $f_r(a+\omega)$ entgegengesetzte Zeichen haben. Da ferner, wenn $f_r(a) = 0$, die beiden benachbarten Funktionen $f_{r-1}(x)$ und $f_{r+1}(x)$ für $x = a$ nicht verschwinden, sondern entgegengesetzte Vorzeichen annehmen, so ist a weder Wurzel der Gleichung $f_{r-1}(x)=0$, noch der Gleichung $f_{r+1}(x)=0$. Zwischen $a-\omega$ und $a+\omega$ liegt also keine Wurzel der Gleichung $f_{r-1}(x)=0$; es müssen also $f_{r-1}(a-\omega)$ und $f_{r-1}(a+\omega)$ das nämliche Vorzeichen haben. Da ebenso die Gleichung $f_{r+1}(x) = 0$ keine Wurzel hat zwischen $a-\omega$ und

$a+\omega$, so müssen auch $f_{r+1}(a-\omega)$ und $f_{r+1}(a+\omega)$ das nämliche Vorzeichen haben. Dieses Vorzeichen ist aber das Vorzeichen von $f_{r+1}(a)$; denn nach dem Taylor'schen Satze hat man:

$$f_{r+1}(a+\omega)=f_{r+1}(a)+f'_{r+1}(a).\omega+\ldots,$$

wo $f_{r+1}(a)$ einen endlichen Werth hat, der bei unendlich kleinem ω an Grösse die Summe aller folgenden überragt, also der ganzen Entwicklung das Vorzeichen des ersten Gliedes $f_{r+1}(a)$ gibt (No. 305); es hat also wirklich $f_{r+1}(a+\omega)$ das Vorzeichen von $f_{r+1}(a)$ und somit haben die 3 Grössen $f_{r+1}(a-\omega)$, $f_{r+1}(a)$ und $f_{r+1}(a+\omega)$ alle das nämliche Vorzeichen. Ebenso haben die 3 Grössen $f_{r-1}(a-\omega)$, $f_{r-1}(a)$ und $f_{r-1}(a+\omega)$ alle das gleiche.und zwar dasjenige von $f_{r-1}(a)$, welches entgegengesetzt ist dem von $f_{r+1}(a)$. Die 3 Grössen: $f_{r-1}(a-\omega)$, $f_{r-1}(a)$ und $f_{r-1}(a+\omega)$ sind daher dem Vorzeichen nach entgegengesetzt den Grössen $f_{r+1}(a-\omega)$, $f_{r+1}(a)$ und $f_{r+1}(a+\omega)$. Man hat also entweder: $f_{r-1}(a-\omega)$, $f_{r-1}(a)$ und $f_{r-1}(a+\omega)$ alle p o s i t i v und dann $f_{r+1}(a-\omega)$, $f_{r+1}(a)$ und $f_{r+1}(a+\omega)$ alle n e g a t i v oder umgekehrt. Welches also das Vorzeichen von $f_r(x)$ sein möge: die 3 Funktionen $f_{r-1}(x)$, $f_r(x)$ und $f_{r+1}(x)$ bieten für $x=a-\omega$ entweder einen Zeichenwechsel und eine Zeichenfolge oder dann erst eine Zeichenfolge und dann einen Zeichenwechsel, somit s t e t s einen Zeichenwechsel dar, und für $x=a+\omega$ bilden sie abermals einen und n u r e i n e n Zeichenwechsel, weil ja die erste und dritte, $f_{r-1}(x)$ und $f_{r+1}(x)$, sowol für $x=a-\omega$, als auch für $x=a+\omega$ entgegengesetzte Zeichen haben. Wenn daher für $x=a-\omega$ die Funktionen $f_{r-1}(x)$, $f_r(x)$ und $f_{r+1}(x)$ die Vorzeichen $+$ $+$ $-$ hatten, so müssen sie für $x=a+\omega$ die Zeichen $+$ $-$ $-$ haben. Hatten sie aber für $x=a-\omega$ die Vorzeichen $+$ $-$ $-$, so müssen sie für $x=a+\omega$ die Vorzeichen $+$ $+$ $-$ aufweisen. Der Zeichenwechsel wäre also im ersten Fall von rechts nach links, im zweiten von links nach rechts gerückt d. h. er hätte bloss seine Stelle geändert. Es bietet somit die Reihe (γ) für $x=a+\omega$ genau so viele Zeichenwechsel dar, wie für $x=a-\omega$, wenn für $x=a$ bloss eine der spätern Funktionen, nicht aber $f(x)$ selbst verschwindet.

Um nun noch zu zeigen, dass in der Reihe (γ) jedesmal ein Zeichenwechsel verloren geht, so oft x einen Werth annimmt, für welchen $f(x)$ selbst verschwindet, wollen wir annehmen, es sei b eine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$; dann könnte b jedenfalls nicht zugleich Wurzel der Gleichung $f'(x)=0$ sein, weil nach Voraussetzung $f(x)=0$ keine gleichen Wurzeln und daher mit

$f'(x)=0$ keine gemeinschaftliche Wurzel besitzt. Wenn daher ω unendlich klein ist, so muss die Substitution von $b-\omega$ und $b+\omega$ an die Stelle von x in $f(x)$ Resultate von entgegengesetztem Zeichen, die gleiche Substitution aber, in $f'(x)$ ausgeführt, Resultate vom nämlichen Vorzeichen hervorbringen d. h.

$f(b-\omega)$ und $f(b+\omega)$ haben entgegengesetzte,
$f'(b-\omega)$ und $f'(b+\omega)$ aber gleiche Vorzeichen.

Allein aus $f(b+\omega)=f(b)+f'(b).\omega+f^2(b).\frac{\omega^2}{1.2}+..$ folgt, da $f(b)=0$

$$f(b+\omega)=f'(b)\,.\,\omega+\ldots,$$

woraus man erkennt, dass $f(b+\omega)$ dasselbe Vorzeichen hat, wie $f'(b)$ und umgekehrt $f'(b)$ das nämliche Vorzeichen, wie $f(b+\omega)$. Es haben folglich die 3 Grössen $f'(b-\omega)$, $f'(b)$ und $f'(b+\omega)$ alle dasselbe Vorzeichen, wie $f(b+\omega)$, während $f(b-\omega)$ ein dem Zeichen von $f(b+\omega)$ entgegengesetztes Vorzeichen hat. Also ist entweder

	$f(b-\omega)$: —		$f'(b-\omega)$: +
	$f(b)$ = 0	und dann	$f'(b)$: +
	$f(b+\omega)$: +		$f'(b+\omega)$: +
oder dann:	$f(b-\omega)$: +		$f'(b-\omega)$: —
	$f(b)$ = 0	und dann	$f'(b)$: —
	$f(b+\omega)$: —		$f'(b+\omega)$: —

Die zwei ersten Glieder $f(x)$ und $f'(x)$ der Reihe (γ) haben also jedenfalls für $x=b-\omega$ entgegengesetzte, für $x=b+\omega$ aber gleiche Zeichen; sie bilden also einen Zeichenwechsel, bevor x den Werth b erreicht, dagegen eine Zeichenfolge, sobald x über den Werth b hinaus ist. Wenn daher x zwischen α und β einen Werth b annimmt, welcher Wurzel ist der Gleichung $f(x)=0$, so verschwindet ein Zeichenwechsel in Reihe (γ) d. h. die Reihe

$$f(b+\omega),\ f'(b+\omega),\ f_2(b+\omega),\ f_3(b+\omega)\ \ldots\ f_n(b+\omega)$$

bietet einen Zeichenwechsel weniger dar, als die Reihe $f(b-\omega)$, $f'(b-\omega)$, $f_2(b-\omega)$, $f_3(b-\omega)\ldots f_n(b-\omega)$.

Wenn ferner c eine weitere zwischen α und β liegende Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ wäre, so würde die Reihe (γ) für $x=c+\omega$ wieder einen Zeichenwechsel weniger darbieten, als für $x=c-\omega$ u. s. f. So viele reelle Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ zwischen α und β liegen, so viele Zeichenwechsel hat die Reihe

$$f(\beta),\ f'(\beta),\ f_2(\beta),\ f_3(\beta)\ldots f_n(\beta) \text{ weniger, als}$$

die Reihe $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)\ldots f_n(\alpha)$,

und man kann daher auch umgehrt aus der Anzahl der Zeichenwechsel, welche die erste Reihe weniger darbietet, als die zweite,

auf die Anzahl der zwischen α und β liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ zurückschliessen.

Zusatz 1. Mit Hülfe des Sturm'schen Satzes lässt sich die Anzahl aller reellen Wurzeln einer Gleichung $f(x)=0$ bestimmen. Man bildet nämlich noch die Funktionen $f'(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x), \ldots f_n(x)$ und setzt dann in die Reihe

$$f(x),\ f'(x),\ f_2(x),\ f_3(x), \ldots f_n(x) \quad (\gamma)$$

1., die absolute obere Grenze $-L'$ der negativen Wurzeln,

2., die obere Grenze L der positiven Wurzeln. So viele Zeichenwechsel jene Reihe für die letzte Substitution weniger darbietet, als die erste, so viele reelle Wurzeln besitzt die Gleichung. Damit ist zugleich auch die Zahl der imaginären Wurzeln bestimmt.

Zur grössern Einfachheit kann man $-L' = -\infty$ und $L = +\infty$ setzen; dadurch nehmen die obigen Funktionen alle die Vorzeichen ihrer ersten Glieder an; man darf daher nur untersuchen, welche Vorzeichen diese ersten Glieder für $x = +\infty$ und welche sie für $x = -\infty$ annehmen.

Beispiel 1. Man soll untersuchen, wie viele reelle Wurzeln die Gleichung $x^3-2x-5=0$ habe.

Es ist $f(x)=x^3-2x-5$ und $f'(x)=3x^2-2$.

1ste Division: $x^3-2x-5 \mid 3x^2-2$

$$\begin{array}{rr|l}
 & x^3-2x-5 & 3x^2-2 \\
 & 3x^3-6x-15 & x \\
 & 3x^3-2x & \\ \hline
-f_2(x) = & -4x-15 &
\end{array}$$

und $\quad f_2(x) = 4x+15.$

2te Division:

$$\begin{array}{rr|l}
 & 3x^2-2 & 4x+15 \\
 & 12x^2-8 & 3x-45 \\
 & 12x^2+45x & \\ \hline
 & -45x-8 & \\
 & -45.4x-32 & \\
 & -45.4x-675 & \\ \hline
-f_3(x) = & +643 & \\
f_3(x) = & -643 &
\end{array}$$

Wir haben daher:

	$f(x)$ x^3-2x-5	$f'(x)$ $3x^2-2$	$f_2(x)$ $4x+15$	$f_4(x)$ -643
$x=-\infty$ gibt:	$-$	$+$	$-$	$-$
$x=+\infty$ „	$+$	$+$	$+$	$-$

Die Reihe (γ) bietet also für $x=+\infty$ einen Zeichenwechsel

weniger dar, als für $x=-\infty$; somit hat die Gleichung $x^3-2x-5=0$ nur eine reelle Wurzel; die beiden andern sind imaginär.

Beispiel 2. Die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $x^3-4x^2-2x+4=0$ zu bestimmen.

Hier ist $f(x)=x^3-4x^2-2x+4$

$f'(x)=3x^2-8x-2.$

1ste Division:

$$\begin{array}{rl|l}
& x^3-\ 4x^2-\ 2x+\ 4 & 3x^2-8x-2 \\
& 3x^3-12x^2-\ 6x+12 & x-4 \\
& 3x^3-\ 8x^2-\ 2x & \\
\hline
& -\ 4x^2-\ 4x+12 & \\
& -12x^2-12x+36 & \\
& -12x^2+32x+\ 8 & \\
\hline
-f_2(x)= & -44x+28 &
\end{array}$$

$f_2(x)=44x-28=4(11x-7).$

2te Division:

$$\begin{array}{rl|l}
& 3x^2-\ 8x-\ 2 & 11x-7 \\
& 33x^2-88x-22 & 3x-67 \\
& 33x^2-21x & \\
\hline
& -67x-\ 22 & \\
& -11.67x-242 & \\
& -11.67x+469 & \\
\hline
-f_3(x) = & -711 & \\
f_3(x) = & +711 &
\end{array}$$

Für unsere Untersuchung haben wir statt $f_2(x)=44x-28$ den 4ten Theil davon, also $11x-7$ genommen, wie wir denn überhaupt auch hier, wie bei Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Divisors, Dividend oder Divisor durch irgend eine positive Zahl dividiren oder multipliziren können. Wir haben daher

	$f(x)$ x^3-4x^2-2x+4	$f'(x)$ $3x^2-8x-2$	$f_2(x)$ $11x-7$	$f_3(x)$ $+711$
$x=-\infty$:	$-$	$+$	$-$	$+$
$x=+\infty$:	$+$	$+$	$+$	$+$

Die erste Reihe hat 3, die letzte gar keinen Zeichenwechsel; folglich liegen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ 3 reelle Wurzeln unserer Gleichung d. h. die gegebene Gleichung hat lauter reelle Wurzeln.

Zusatz 2. Will man speziell die Anzahl der positiven reellen Wurzeln kennen, so setzt man

1., $x=-\infty$ 2., $x=0$ und 3., $x=+\infty$,

dann gibt die Anzahl der Zeichenwechsel, welche die 2te Substitution weniger als die erste liefert, die Zahl der negativen,

die Anzahl der Zeichenwechsel aber, welche die 3te Substitution weniger als die 2te darbietet, die Anzahl der positiven reellen Wurzeln an. Allein für $x=+\infty$ nehmen die sämmtlichen Funktionen die Vorzeichen ihrer ersten, für $x=0$ aber die Vorzeichen ihrer letzten Glieder an. Man darf daher nur abzählen 1. die Zeichenwechsel, welche die letzten Glieder der obigen Funktionen bilden, 2. die Zeichenwechsel, welche die ersten Glieder bilden, um in der Differenz dieser beiden Zahlen sofort die Anzahl der positiven reellen Wurzeln zu bekommen, eine Untersuchung, die ohne Rechnung durch den blossen Anblick der Funktionen (γ) gemacht werden kann.

Zusatz 3. (Bedingung der Realität sämmtlicher Wurzeln einer Gleichung).

Damit eine Gleichung $m$ten Grades lauter reelle Wurzeln habe, ist erforderlich 1., dass die Reihe (γ) gerade $m+1$ Glieder enthalte und dass 2., die Coeffizienten ihrer ersten Glieder alle positiv seien.

Denn soll die Gleichung m reelle Wurzeln haben, so muss die Reihe (γ) für $x=+\infty$ m Zeichenwechsel weniger geben, als für $x=-\infty$; sie muss aber, um m Zeichenwechsel liefern zu können, mindestens $m+1$ Glieder haben. Wenn aber $f(x)$ vom $m$ten Grade ist, so kann jene Reihe überhaupt höchstens $m+1$ Glieder enthalten, in welchem Fall jedes folgende Glied um einen Grad niedriger als das vorangehende ist. Damit nun diese aus $m+1$ Gliedern bestehende Reihe m Zeichenwechsel darbieten könne für $x=-\infty$, müssen die Coeffizienten ihrer ersten Glieder alle positiv sein; denn dann werden für $x=-\infty$ die ersten Glieder abwechselnd positiv und negativ oder umgekehrt, für $x=+\infty$ aber alle positiv; man hat also dann für $x=-\infty$ gerade m, für $x_1=+\infty$ aber gar keine Zeichenwechsel.

Wenden wir das auf die Gleichung 3ten Grades an, die wir uns in der Form $x^3+3px+2q=0$ denken wollen, so ist $f(x)=x^3+3px+2q$, $f'(x)=3x^2+3p$.

1ste Division:

$$\begin{array}{rl|l} & x^3+3px+2q & x^2+p \\ & \underline{x^3+px} & x \\ -f_2(x) = & 2px+2q & \\ f_2(x) = & -2px-2q = 2(-px-q) & \end{array}$$

2te Division:

$$\begin{array}{l|l} x^2+p & -px-q \\ px^2+p^2 & -x+q \\ \underline{px^2+qx} & \\ -qx+p^2 & \\ -pqx+p^3 & \\ \underline{-pqx-q^2} & \\ -f_3(x)=q^2+p^3 & \end{array}$$

und daher $f_3(x)=-q^2-p^3$.

Wir haben also: $f(x)=x^3+3px+2q$, $f_2(x)=-px-q$
$f'(x)=3x^2+3p$, $f_3(x)=-q^2-p^3$

Die Coeffizienten der ersten Glieder dieser Funktionen sind demnach: 1, 3, $-p$ und $-q^2-p^3$.

Diese müssen sämmtlich positiv sein, damit die Wurzeln alle reell ausfallen; es muss also
$-p>0$ und $-q^2-p^3>0$ sein, was erfordert: 1., p negativ und 2., q^2 dem absoluten Werthe nach kleiner als p^3 oder $\frac{q^2}{p^3}<1$, Bedingungen, die wir früher schon kennen gelernt haben.

Zusatz 4. Man kann sich die Untersuchung zuweilen etwas erleichtern, wenn man berücksichtigt, dass sobald eine der Funktionen unserer Reihe (γ), z. B. $f_r(x)$, zwischen $x=\alpha$ und $x=\beta$ keine Wurzel hat, alle auf $f_r(x)$ folgenden Funktionen weggelassen werden können. Denn unmittelbar aus dem Beweis des Sturm'schen Satzes ergibt sich, dass wenn $f_r(x)$ für keinen zwischen α und β liegenden Werth von x verschwindet, die Zahl der Zeichenwechsel zwischen $f_r(x)$ und $f_n(x)$ völlig unverändert bleibt. Es hat also die Reihe $f_r(x)$ bis $f_n(x)$ für $x=\beta$ genau so viele Zeichenwechsel, wie für $x=\alpha$ und bleibt daher ohne Einfluss auf die Differenz zwischen den Anzahlen der Zeichenwechsel, welche die Reihe (γ) für die beiden Substitutionen $x=\alpha$ und $x=\beta$ darbietet. Wäre z. B. $f_r(x)$ vom 2ten Grade, so könnte man sofort erkennen, ob ihre Wurzeln reell oder imaginär wären; im letzten Fall brauchte man die spätern Funktionen nicht zu berechnen.

344. Bestimmung der reellen Wurzeln einer Gleichung $f(x)=0$ bis auf eine Einheit genau. Um jede der Wurzeln einer Gleichung $f(x)=0$ bis auf eine Einheit zu bestimmen, setzt man die zwischen den beiden Grenzen L und $-L'$ liegenden ganzen Zahlen in $f(x)$ und bestimmt die Vorzeichen der Grössen

$$f(L),\ f(L-1),\ f(L-2) \ldots f(1),\ f(0),\ f(-1), \ldots f(-L').$$

Enthält diese Reihe so viele Zeichenwechsel, als der Grad der Gleichung Einheiten hat, so sind die Wurzeln sämmtlich getrennt und es ist jede derselben bis auf eine Einheit genau bestimmt. Enthält sie dagegen weniger als m Zeichenwechsel, so kann man, wenn $f(k)$ und $f(k+1)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, nicht mehr sagen, dass zwischen k und $k+1$ nur eine, und falls sie gleiche Vorzeichen haben, ebenso wenig behaupten, dass zwischen ihnen gar keine reelle Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ liege. Man bildet alsdann die Reihe der Polynome $f(x)$, $f'(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x) \ldots f_n(x)$ und findet durch Substitution der Zahlen L, $L-1$, $L-2$ etc. bis $-L'$ genau, wie viele reelle Wurzeln zwischen je zwei dieser Zahlen liegen. Stellt sich dann heraus, dass zwischen k und $k+1$ etwa 3 reelle Wurzeln liegen, so kann man durch Substitution der Zahlen k, $k+\frac{1}{10}$, $k+\frac{2}{10}+\ldots$ bis $k+\frac{9}{10}$ und $k+1$ in $f(x)$ jede derselben bis auf $\frac{1}{10}$ genau bestimmen.

345. Lehrsatz von Rolle. *Zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Wurzeln a und b einer Gleichung $f(x)=0$ muss mindestens eine reelle Wurzel der abgeleiteten Gleichung $f'(x)=0$ liegen.*

Es sind nämlich $f(x)$ und $f'(x)$ als ganze algebraische Funktionen stetig über das ganze Intervall von $-\infty$ bis $+\infty$. Wenn daher $f(a)=0$ und $f(b)=0$ und man lässt x von a bis b stetig variiren, so muss $f(x)$, von $f(a)=0$ ausgehend, entweder zuerst wachsen und nachher wieder abnehmen, um $=f(b)$ d. h. $=0$ zu werden oder dann umgekehrt, wobei auch ein mehrmaliger Wechsel von Wachsen und Abnehmen möglich wäre. Da aber bei wachsendem $f(x)$ die Derivirte $f'(x)$ positiv, bei abnehmendem $f(x)$ aber negativ ist, so muss dieselbe also von positiven Werthen zu negativen oder umgekehrt übergehen, was bei ihrer Stetigkeit nicht anders möglich ist, als wenn sie ein oder mehrere Male durch Null hindurch geht. Es muss also zwischen a und b mindestens einen Werth von x geben, für welchen $f'(x)=0$ wird.

Zusatz. Zwischen zwei aufeinander folgenden reellen Wurzeln der derivirten Gleichung $f'(x)=0$ kann höchstens eine reelle Wurzel der ursprünglichen Gleichung liegen. Vorerst ist einmal leicht einzusehen, dass zwischen 2 reellen Wurzeln der derivirten Gleichung $f'(x)=0$ nicht nothwendig eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ zu liegen braucht. Denn wenn a und b zwei auf einander folgende

reelle Wurzeln von $f(x)=0$ bedeuten, zwischen welchen mehrere reelle Wurzeln α, β und γ von $f'(x)=0$ liegen, so ist klar, dass zwischen α und β, sowie zwischen β und γ oder zwischen α und γ gar keine reelle Wurzel der Gleichuug $f(x)=0$ liegen kann. Dass aber zwischen 2 auf einander folgenden reellen Wurzeln von $f'(x)=0$ unter keinen Umständen mehr als eine reelle Wurzel von $f(x)=0$ liegen kann, folgt unmittelbar aus dem obigen Lehrsatz. Denn gesetzt, zwischen 2 auf einander folgenden reellen Wurzeln α und β der Gleichung $f'(x)=0$ könnten mehrere Wurzeln, etwa a und b, der Gleichung $f(x)=0$ liegen, so befände sich dann zwischen den Wurzeln a und b der Gleichung $f(x)=0$ gar keine reelle Wurzel der derivirten Gleichung $f'(x)=0$, was nach dem obigen Lehrsatz unmöglich ist.

Hieraus geht hervor, dass wenn alle Wurzeln einer Gleichung $f(x)=0$ reell sind, die Wurzeln der derivirten Gleichung $f'(x)=0$ sämmtlich reell sein müssen, da ja zwischen 2 reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ mindestens eine reelle Wurzel von $f'(x)=0$ liegt.

346. Von den verschiedenen Verfahren, welche zur Bestimmung der inkommensurablen Wurzeln einer Gleichung in Anwendung kommen, wollen wir hier nur zwei noch näher erwähnen, die Newton'sche, von Horner modifizirte Methode und die Regula Falsi, wollen aber vorerst noch zeigen, wie man aus einer gegebenen Gleichung eine andere ableiten kann, deren Wurzeln um eine bestimmte Grösse von denen der ersten sich unterscheiden.

Aufgabe: Eine Gleichung in eine andere umzuformen, deren Wurzeln um eine gegebene Zahl α kleiner, als die der gegebenen seien.

Erste Auflösung. Sei

$$(1)\quad f(x)=Ax^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_{m-1}x+A_m=0$$

die gegebene Gleichung und y die Wurzel der neuen, so sollte y um α kleiner als x, somit $y=x-\alpha$ und daher $x=y+\alpha$ $=\alpha+y$ sein. Wir dürfen daher nur in (1) x durch $\alpha+y$ ersetzen, um die transformirte Gleichung mit y zu bekommen. Statt diese Substitution direkte vorzunehmen, können wir auch von dem Taylor'schen Satz Gebrauch machen und bekommen dann:

$$f(x)=f(\alpha+y)=f(\alpha)+f'(\alpha)y+\frac{f^2(\alpha)}{1.2}y^2+\frac{f^3(\alpha)}{1.2.3}y^3+\ldots\frac{f^m(\alpha)}{1.2.3..m}\cdot y^m$$

Die neue, nach fallenden Potenzen von y geordnete Gleichung lautet daher:

$$(2)\quad \frac{f^m(\alpha)}{1.2.3...m}y^m + \frac{f^{m-1}(\alpha)}{1.2.3...(m-1)}y^{m-1} + \frac{f^{m-2}(\alpha)}{1.2.3...(m-2)}y^{m-2} + \ldots + f'(\alpha).y + f(\alpha) = 0$$

Nun ist aber der Coeffizient des ersten Gliedes dieser Gleichung (2) gerade der Coeffizient des ersten Gliedes der Gleichung (1); denn es ist

$f^m(x) = m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1.A$; und somit

$\dfrac{f^m(x)}{1.2.3\ldots m} = A$, also von x unabhängig; somit auch

$\dfrac{f^m(\alpha)}{1.2.3\ldots m} = A$, und die Gleichung (2) kann daher auch so geschrieben werden:

$$Ay^m + \frac{f^{m-1}(\alpha)}{1.2.3\ldots(m-1)}.y^{m-1} + \frac{f^{m-2}(\alpha)}{1.2.3...(m-2)}.y^{m-2} + ..f'(\alpha).y + f(\alpha) = 0$$

B e i s p i e l. Es sollen die Wurzeln der Gleichung

$$(1)\quad f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24 = 0$$

um 4 vermindert werden. Da wird $x = 4 + y$ und die transformirte Gleichung somit lauten:

$$(2)\quad y^4 + \frac{f^3(4)}{1.2.3}y^3 + \frac{f^2(4)}{1.2}y^2 + f'(4).y + f(4) = 0$$

und wir haben also nur noch die Coeffizienten $f(4)$, $f'(4)$, $\dfrac{f^2(4)}{1.2}$ und $\dfrac{f^3(4)}{1.2.3}$ zu bestimmen. Nun ist

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24$$
$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 26x + 38$$
$$\frac{f^2(x)}{1.2} = \frac{12x^2 - 12x - 26}{1\,.\,2} = 6x^2 - 6x - 13$$
$$\frac{f^3(x)}{1.2.3} = \frac{24x - 12}{1.2.3} = 4x - 2$$
$$\frac{f^4(x)}{1.2.3.4} = \frac{24}{1.2.3.4} = 1$$

$$f(4) = 256 - 128 - 208 + 152 - 24 = 408 - 360 = +48$$
$$f'(4) = +94$$
$$\frac{f^2(4)}{1.2} = +59$$
$$\frac{f^3(4)}{1.2.3} = +14$$
$$\frac{f^4(4)}{1.2.3.4} = +1.$$

Die Gleichung (2) wird daher sein:

$$(2\alpha)\quad y^4 + 14y^3 + 59y^2 + 94y + 48 = 0.$$

Die Wurzeln der ersten Gleichung sind nun 1, 2, 3 und —4; die der zweiten Gleichung werden daher sein: —3, —2, —1 und

—8, und in der That zeigt sich, dass die Gleichung (2) durch jede dieser 4 Wurzeln verifizirt wird.

Zweite Auflösung: Sei wieder

(1) $f(x)=Ax^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots A_{m-1}x+A_m=0$

die gegebene Gleichung, so wollen wir vorläufig mit B, B_1, B_2, B_3 . . . bis B_m die Coeffizienten der transformirten Gleichung bezeichnen, wo wir zum Voraus wissen, dass $B=A$; dann wäre also

(2) $Ay^m+B_1y^{m-1}+B_2y^{m-2}+\ldots.+B_{m-1}y+B_m=0$

diese transformirte Gleichung, deren Wurzeln y mit den Wurzeln x der Gleichung (1) verbunden sind durch die Relation $x=y+\alpha$ oder $y=x-\alpha$.

Wie nun die Gleichung (2) aus der Gleichung (1) dadurch entsteht, dass wir x durch $y+\alpha$ ersetzen, so müsste umgekehrt aus (2) die Gleichung (1) wieder abgeleitet werden können, wenn wir y ersetzen durch $x-\alpha$. Die dadurch erhaltene Gleichung (3)

(3) $A(x-\alpha)^m+B_1(x-\alpha)^{m-1}+B_2(x-\alpha)^{m-2}+\ldots+B_{m-1}(x-\alpha)+B_m=0$

muss daher mit der Gleichung (1) vollkommen identisch sein. Aus dieser Gleichung (3) erkennt man aber leicht, wie man die Coeffizienten B_m, B_{m-1}, B_{m-2}, . . . B_2 und B_1 finden kann. In der That ist B_m gerade der Divisionsrest der linken Seite der Gleichung (3) durch $x-\alpha$. Da aber (3) mit (1) identisch ist, so darf man auch nur die gegebene Funktion $f(x)$ aus Gleichung (1) durch $x-\alpha$ dividiren, dann wird der Rest das letzte Glied B_m der zu suchenden Gleichung (2) sein. Der Quotient dieser Division ist aber, wie der blosse Anblick der Gleichung (3) zeigt:

(3α) $A(x-\alpha)^{m-1}+B_1(x-\alpha)^{m-2}+B_2(x-\alpha)^{m-3}+\ldots$
$+B_{m-2}(x-\alpha)+B_{m-1}$.

Wenn man diesen Quotienten wieder durch $x-\alpha$ dividirt, so bekommt man als Rest B_{m-1} d. h. den Coeffizienten des vorletzten Gliedes der zu bestimmenden Gleichung; der Quotient aber wird sein:

(3β): $A(x-\alpha)^{m-2}+B_1(x-\alpha)^{m-3}+B_2(x-\alpha)^{m-4}+\ldots B_{m-1}(x-\alpha)+B_{m-2}$

Mit Ausnahme des letzten Gliedes sind hier wieder alle Glieder theilbar durch $x-\alpha$; man erhält bei Ausführung der Division daher B_{m-2} als neuen Rest und als Quotienten:

(3γ): $A(x-\alpha)^{m-3}+B_1(x-\alpha)^{m-4}+B_2(x-\alpha)^{m-5}+\ldots$
$+B_{m-4}(x-\alpha)+B_{m-3}$.

Dieser neue Quotient, durch $x-\alpha$ dividirt, würde B_{m-3} als Rest und

(3δ) $A(x-\alpha)^{m-4}+B^1(x-\alpha)^{m-5}+B_2(x-\alpha)^{m-6}+\ldots.+B_{m-4}$

als Quotienten liefern u. s. f. Wenn man in gleicher Weise fortfährt, so erhält man successive die Coeffizienten B_{m-4}, B_{m-5} . . . B_3, B_2, B_1 und B. Wir haben daher zur Bestimmung der Coeffizienten dieser transformirten Gleichung folgende Regel:

Man dividirt 1. die gegebene Gleichung durch $x—\alpha$,
2. den erhaltenen Quotienten durch $x—\alpha$,
3. den neuen Quotienten wieder durch $x—\alpha$,
4. den neuen Quotienten abermals durch $x—\alpha$

u. s. f., bis man zu einem von x unabhängigen Quotienten kommt. Die hiebei zum Vorschein kommenden Reste sind dann der Reihe nach die Coeffizienten B_m, B_{m-1}, B_{m-2}, B_{m-3} . . . B_2, B_1 und B der transformirten Gleichung. Diese successiven Divisionen werden nun nach dem in Nro. 308 entwickelten Verfahren ausgeführt, wodurch die Coeffizienten der transformirten Gleichung auf viel kürzerem Wege bestimmt werden, als durch das gewöhnliche, in der ersten Auflösung angewandte Verfahren.

Beispiel. Wir nehmen wieder die obige Gleichung

$$x^4-2x^3—13x^2+38x—24=0$$

und wollen daraus eine andere ableiten, deren Wurzeln sämmtlich um 4 kleiner sind. Wir dividiren daher die Funktion durch $x—4$, den Quotienten wieder durch $x—4$, den neuen Quotienten abermals durch $x—4$ u. s. f. Die dabei erhaltenen Reste sind dann die Coeffizienten des letzten, vorletzten, des 3ten, 2ten und ersten Gliedes der transformirten Gleichung. Wir machen die Rechnung in folgender Weise:

	1	— 2	—13	+38	—24
		+ 4	+ 8	—20	+72
$\alpha=4$	1	+ 2	— 5	+18	(+48)
		+ 4	+24	+76	
	1	+ 6	+19	(+94)	
		+ 4	+40		
	1	+10	(+59)		
		+ 4			
	1	(+14)			

Also sind 48, 94, 59 und 14 die Coeffizienten des letzten, vorletzten, dritten und zweiten Gliedes; der Coeffizient des ersten Gliedes ist immer gleich dem Coeffizienten des ersten Gliedes der ursprünglichen Funktion. Somit heisst unsere transformirte Gleichung

$$y^4+14y^3+59y^2+94y+48=0, \text{ wie oben.}$$

Beispiel 2. Es sollen die Wurzeln der Gleichung

$$7x^5 - 8x^4 + 2x - 10 = 0$$

um 2 vermindert werden. Wir setzen $x = y + 2$, woraus folgt $y = x - 2$, und müssen daher zur Bestimmung der transformirten Gleichung $f(x)$ durch $x - 2$ dividiren, den Quotienten wieder durch $x - 2$ u. s. f. und dann die Reste als Coeffizienten des letzten, vorletzten Gliedes etc. nehmen. In unserer Gleichung fehlen die Glieder mit x^3 und x^2; wir denken uns dieselben mit dem Coeffizienten 0 hergestellt und haben dann zur Bestimmung der Coeffizienten der transformirten Gleichung folgende Rechnung:

	7	— 8	0	0	+ 2	— 10
$\alpha = 2$		14	12	24	48	100
	7	6	12	24	50	(+ 90)
		14	40	104	256	
	7	20	52	128	(+306)	
		14	68	240		
	7	34	120	(+368)		
		14	96			
	7	48	(+216)			
		14				
	7	(+62)				

Die transformirte Gleichung wird daher heissen:

$$7y^5 + 62y^4 + 216y^3 + 368y^2 + 306y + 90 = 0$$

Beispiel 3. Man soll die Wurzeln der Gleichung

$$(1) \quad 3x^4 + 11x^3 - 16x^3 - 44x + 16 = 0$$

um 1 vermindern.

Wir setzen $x = y + 1$ oder $y = x - 1$, müssen also, um die transformirte Gleichung zu erhalten, $f(x)$ durch $x - 1$, den Quotienten wieder durch $x - 1$ dividiren u. s. f. und dann die Reste als Coeffizienten der neuen Gleichung nehmen.

	3	11	—16	—44	+16
$\alpha = 1$		3	14	— 2	—46
	3	14	— 2	—46	(—30)
		3	17	15	
	3	17	+15	(—31)	
		3	20		
	3	20	(+35)		
		3			
	3	(+23)			

Die transformirte Gleichung heisst demnach:

(2) $3y^4+23y^3+35y^2-31y-30=0$

Die Wurzeln der Gleichung (1) sind: 2, —2, —4 und $\frac{1}{3}$; die Wurzeln der Gleichung (2) sollten demnach sein: 1, —3, —5 und $-\frac{2}{3}$, welche auch in der That die Gleichung (2) verifiziren.

Wollen wir aber die Wurzeln der Gleichung (1) um 1 vermehren, so setzen wir $x=y-1$ oder $y=x+1$ und müssen dann, um die transformirte Gleichung zu erhalten, $f(x)$ durch $x+1$ dividiren, den Quotienten wieder durch $x+1$ u. s. f. Hiebei ist also $\alpha=-1$.

	3	+11	—16	—44	+16
		— 3	— 8	24	+20
$\alpha=-1$	3	+ 8	—24	—20	(+36)
		— 3	— 5	+29	
	3	5	—29	(+9)	
		— 3	— 2		
	3	2	(—31)		
		— 3			
	3	(— 1)			

Die transformirte Gleichung lautet demnach:

(3) $3y^4-y^3-31y^2+9y+36=0$,

welche in der That die Wurzeln 3, —1, —3 und $\frac{4}{3}$ zulässt, die beziehungsweise um 1 grösser sind, als die entsprechenden Wurzeln 2, —2, —4 und $\frac{1}{3}$ der Gleichung (1).

347. Ist die Zahl α, um welche die Wurzeln einer Gleichung vermehrt oder vermindert werden sollen, mehrstellig, so kann, wenn man vorzieht, bloss einen einstelligen Operationsfaktor zu haben, die Operation in so viele einzelne Transformationen zerlegt werden, als die Zahl α geltende Stellen hat. Wollte man z. B. die Wurzeln einer Gleichung um 54,27 vermindern, so hätte man die ursprüngliche Funktion durch $x-54{,}27$ zu dividiren, den Quotienten wieder durch $x-54{,}27$ u. s. f., und endlich aus den erhaltenen Resten die transformirte Gleichung zu bilden. Statt dessen könnte man 4 verschiedene Transformationen vornehmen, indem man die Wurzeln erst um 50, dann um 4, dann um 0,2 und endlich um 0,07 verminderte. Sollten umgekehrt die Wurzeln der Gleichung um 54,27 vermehrt werden, so hätte man $f(x)$ durch $x+54{,}27$ zu dividiren, den Quotienten wieder durch $x+54{,}27$ u. s. f., d. h. man müsste den Operationsfaktor $\alpha=-54{,}27$ setzen. Statt dessen könnte man wieder 4 Operationen vor-

nehmen, indem man als Operationsfaktoren der Reihe nach —50, —4, —0,2 und —0,07 wählen würde.

Beispiel: Es sollen die Wurzeln der Gleichung

$$x^3-3x^2+4x+12=0$$

um 2,13 vermindert werden.

Erste Auflösung:

	1	—3	+4	+12
		2,13	—1,8531	+ 4,572897
	1	—0,87	+2,1469	(+16,572897)
$\alpha=2,13$		2,13	2,6838	
	1	1,26	(+4,8307)	
		2,13		
	1	(+3,39)		

Somit lautet die transformirte Gleichung, deren Wurzeln um 2,13 kleiner als die der gegebenen sind:

$$\text{I.}\quad x^3+3,39x^2+4,8307x+16,572897=0$$

Zweite Auflösung.

Wir zerlegen die Operation in 3 einzelne Transformationen, indem wir die Wurzeln erst um 2, dann um 0,1 und endlich um 0,03 vermindern.

1ste Operation.

	1	—3	+4	+12
		2	—2	4
$\alpha=2$	1	—1	+2	(+16)
		2	2	
	1	1	(+4)	
		2		
	1	(+3)		

Die erste transformirte Gleichnng heisst also:

$$x^3+3x^2+4x+16=0$$

2te Operation. Wir vermindern die Wurzeln dieser Gleichung um 0,1.

	1	3	4	16
		0,1	0,31	0,431
	1	3,1	4,31	(+16,431)
$\alpha=0,1$		0,1	0,32	
	1	3,2	(+4,63)	
		0,1		
	1	(+3,3)		

Die zweite transformirte Gleichung wäre demnach:

$$x^3+3,3x^2+4,63x+16,431 = 0$$

3te Operation: Wir vermindern die Wurzeln dieser Gleichung noch um 0,03.

	1	3,3	4,63	+16,431
		0,03	0,0999	0,141897
$\alpha = 0{,}03$	1	3,33	+4,7299	(+16,572897)
		0,03	0,1008	
	1	3,36	(+4,8307)	
		0,03		
	1	(+3,39)		

Die 3te transformirte oder die gesuchte Gleichung heisst daher:

$$\text{II.} \quad x^3+3,39x^2+4,8307x+16,572897 = 0,$$

gerade, wie oben in (I).

Berechnung der inkommensurabeln reellen Wurzeln einer Gleichung nach der Horner'schen Methode.

348. Sei $f(x) = Ax^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots A_{m-1} x + A_m = 0$ (1) die gegebene Gleichung. Wenn α den bis auf eine Einheit genauen Werth einer ihrer inkommensurablen Wurzeln bezeichnet, so handelt es sich darum, die noch fehlenden Decimalstellen zu bestimmen. Bezeichnen wir mit x_1 den gesammten noch fehlenden Theil der Wurzel, so wäre $x = \alpha + x_1$ und dieses x_1 besteht dann aus Zehnteln, Hundertsteln, Tausendsteln etc. Wenn α_1, α_2, α_3 α_4 etc. die absoluten Werthe der auf α folgenden Glieder bedeuten, so wäre $x_1 = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} + \frac{\alpha_3}{1000} + \frac{\alpha_4}{10000} + \ldots$, wo dann α_1, α_2, α_3 etc. ganze Zahlen von 0 bis 9 vorstellen, so dass also die gesammte Wurzel $x = \alpha + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} + \frac{\alpha_3}{1000} + \ldots = \alpha + x_1$ wäre. Man hat somit auch:

(2) $f(x) = f(\alpha + x_1) =$

$$f(\alpha) + f'(\alpha).x_1 + f^2(\alpha).\frac{x_1^2}{1.2} + \ldots \frac{f^m(\alpha)}{1.2.3\ldots m}.x_1^m = 0$$

Hier ist x_1 jedenfalls kleiner als 1; wenn wir daher die höhern Potenzen von x_1 vernachlässigen, so bekommen wir näherungsweise

$$f(\alpha) + f'(\alpha).x_1 = 0$$

woraus folgt $x_1 = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$.

Allein die Gleichung (2) ist nichts Anderes als eine Gleichung, deren Wurzeln um α kleiner sind als die der gegebenen Gleichung (1); sie kann daher nach dem oben in No. 346 (zweite Auflösung) entwickelten Verfahren aus (1) abgeleitet werden, wenn wir $f(x)$ durch $x-\alpha$ dividiren, den Quotienten wieder durch $x-\alpha$ u. s. f. und dann die dabei zum Vorschein kommenden Reste als Coeffizienten verwenden. Wir dürfen also, um die Gleichung (2) zu erhalten, nur die Wurzeln der gegebenen Gleichung (1) nach dem oben angedeuteten Verfahren um α vermindern und bekommen so eine Gleichung

$$\varphi(x_1)=Bx_1{}^m+B_1x_1{}^{m-1}+B_2x_1{}^{m-2}+\ldots B_{m-1}x_1+B_m = 0 \quad (2\alpha),$$

die mit der obigen Gleichung (2) vollkommen übereinstimmt, so dass $B_m=f(\alpha)$ und $B_{m-1}=f'(\alpha)$. Man hat daher bei Weglassung der höhern Potenzen von x_1 die Gleichung:

$$B_{m-1}x_1+B_m=0, \text{ woraus } x_1=-\frac{B_m}{B_{m-1}}=-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Von diesem Quotienten $-\frac{B_m}{B_{m-1}}$ bestimmen wir nur das 1ste Glied $\frac{z}{10}$, so wird dieses $=\frac{\alpha_1}{10}$ sein. Da wir indessen von x_1 nur wissen, dass es kleiner als 1 ist, so wird die Gleichung $B_{m-1}x_1+B_m=0$ noch eine verhältnissmässig geringe Annäherung geben und wir sind nicht sicher, dass der Quotient $-\frac{B_m}{B_{m-1}}$ schon bis auf $\frac{1}{10}$ genau die Wurzel der Gleichung (2) und folglich $x_1=\alpha_1+\frac{z}{10}$ bis auf $\frac{1}{10}$ genau die Wurzel der Gleichung (1) sei. Wir werden daher gut thun, eine Prüfung hierüber eintreten zu lassen, bevor wir weiter rechnen, indem wir $\varphi\left(\frac{z}{10}\right)$ und $\varphi\left(\frac{z+1}{10}\right)$ berechnen, welche nichts Anderes sind, als die Reste der Division von $\varphi(x_1)$ durch $x_1-\frac{z}{10}$ und $x_1-\frac{z+1}{10}$. Wenn diese Reste entgegengesetzte Zeichen haben, so liegt x_1 zwischen $\frac{z}{10}$ und $\frac{z+1}{10}$ oder x zwischen $\alpha+\frac{z}{10}$ und $\alpha+\frac{z+1}{10}$ d. h. $x=\alpha+\frac{z}{10}$ ist wirklich bis auf $\frac{1}{10}$ genau die zu suchende Wurzel der Gleichung (1) und somit $z=\alpha_1$. Hätten dagegen $\varphi\left(\frac{z}{10}\right)$ und $\varphi\left(\frac{z+1}{10}\right)$ beide dasselbe

Zeichen, so wäre das ein Beweis, dass beide auf derselben Seite der Wurzel x_1 lägen und man würde dann $\varphi\frac{(z-1)}{10}$ berechnen oder $\varphi\left(\frac{z+2}{10}\right)$ bis man zwei Resultate von entgegengesetztem Zeichen erhielte. Wir wollen annehmen, α_1 sei richtig bestimmt, d. h. $x=\alpha+\frac{\alpha_1}{10}$ sei die bis auf $\frac{1}{10}$ genaue Wurzel der Gleichung (1). Dann vermindern wir die Wurzeln der Gleichung (2α) um $\frac{\alpha_1}{10}$, indem wir dieselbe durch $x_1-\frac{\alpha_1}{10}$ dividiren, den Quotienten wieder durch $x_1-\frac{\alpha_1}{10}$ u. s. f. und die herauskommenden Reste als Coefficienten verwenden. Wir kommen so zu einer neuen Gleichung

$$\psi(x_1)=Cx^m+C_1x_1^{m-1}+C_2x_1^{m-2}+\ldots+C_{m-1}x_1+C_m=0 \quad (3),$$

deren Wurzeln um $\frac{\alpha_1}{10}$ kleiner sind, als die der Gleichung (2) und um $\alpha+\frac{\alpha_1}{10}$ kleiner als die der Gleichung (1). Wenn also $x=\alpha+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{100}+\frac{\alpha_3}{1000}+\ldots$ eine Wurzel ist der Gleichung (1), so wird $x_1=\frac{\alpha_2}{100}+\frac{\alpha_3}{1000}+\ldots$ eine Wurzel sein der Gleichung (3), die jedenfalls kleiner ist als $\frac{1}{10}$. Wir können daher die höhern Potenzen von x_1 vernachlässigen und näherungsweise setzen:

$$C_{m-1}x_1+C_m=0, \text{ woraus folgt } x_1=-\frac{C_m}{C_{m-1}}$$

Das erste Glied dieses Quotienten gibt uns das nächste Glied der zu suchenden Wurzel, d. h. $\frac{\alpha_2}{100}$, was wir zur vollkommenen Sicherheit noch verifiziren, indem wir, wenn wieder $\frac{z}{100}$ dieses erste Glied des Quotienten bezeichnet, $\psi\left(\frac{z}{100}\right)$ und $\psi\left(\frac{z+1}{100}\right)$ berechnen. Wir wollen annehmen, es sei die 2te Decimale α_2 unserer Wurzel richtig bestimmt; dann vermindern wir die Wurzeln der Gleichung (3) um $\frac{\alpha_2}{100}$, indem wir die Gleichung (3) durch

$x_1 - \frac{\alpha_2}{100}$, den Quotienten wieder durch $x_1 - \frac{\alpha_2}{100}$ u. s. f. dividiren und die dabei erhaltenen Divisionsreste als Coeffizienten verwenden. Wir bekommen so eine Gleichung

(4) $Dx_1^m + D_1 x_1^{m-1} + D_2 x_1^{m-2} + \ldots D_{m-1} x_1 + D_m = 0,$

deren Wurzeln um $\frac{\alpha_2}{100}$ kleiner sind, als die der Gleichung (3) oder um $\alpha + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100}$ kleiner, als die der Gleichung (1). Wenn daher $x = \alpha + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} + \frac{\alpha_3}{1000} + \ldots$ eine Wurzel ist der Gleichung (1), so wird $x_1 = \frac{\alpha_3}{10^3} + \frac{\alpha_4}{10^4} + \ldots$ eine Wurzel sein der Gleichung (4), und da diese Wurzel unter allen Umständen kleiner ist als $\frac{1}{100}$, so werden wir die höhern Potenzen von x_1 vernachlässigen und näherungsweise setzen können:

$$D_{m-1} x_1 + D_m = 0 \text{ oder } x_1 = -\frac{D_m}{D_{m-1}},$$

von welchem Quotienten das erste Glied uns die nächste Stelle $\frac{\alpha_3}{1000}$ liefern wird.

Wir vermindern nun die Wurzeln der Gleichung (4) um $\frac{\alpha_3}{1000}$, indem wir diese Gleichung durch $x_1 - \frac{\alpha_3}{1000}$, den Quotienten wieder durch $x_1 - \frac{\alpha_3}{1000}$ u. s. f. dividiren und die erhaltenen Divisionsreste zu Coeffizienten der neuen Gleichung machen. Dadurch erhalten wir eine Gleichung

(5) $Ex_1^m + E_1 x_1^{m-1} + E_2 x_1^{m-2} + \ldots E_{m-1} x_1 + E_m = 0,$

deren Wurzeln um $\frac{\alpha_3}{1000}$ kleiner sind, als die der Gleichung (4) oder um $\alpha + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} + \frac{\alpha_3}{1000}$ kleiner als die der Gleichung (1). Es wird daher die Gleichung (5) eine Wurzel

$$x_1 = \frac{\alpha_4}{10^4} + \frac{\alpha_5}{10^5} + \ldots$$

haben, die unter allen Umständen kleiner ist als $\frac{1}{1000}$; und wir können daher mit noch mehr Recht als früher die höheren Potenzen von x_1 weglassen und setzen:

$$E_{m-1} x_1 + E_m = 0 \text{ oder}$$

$$x_1 = -\frac{E_m}{E_{m-1}},$$

von welchem Quotienten wir wieder nur das erste Glied berechnen, das uns $\frac{\alpha_4}{10000}$ geben wird.

Wir vermindern abermals die Wurzeln der Gleichung (5) um das neu bestimmte Glied $\frac{\alpha_4}{10^4}$ und bekommen so eine Gleichung

$$(6) \quad Fx_1^m + F_1 x_1^{m-1} + F_2 x_1^{m-2} + \ldots F_{m-1} x_1 + F_m = 0,$$

welche eine Wurzel $x_1 = \frac{\alpha_5}{10^5} + \frac{\alpha_6}{10^6} + \ldots$ hat, die kleiner ist, als $\frac{1}{10^4}$ und wir können daher abermals setzen:

$$F_{m-1} x + F_m = 0, \text{ woraus } x = -\frac{F_m}{F_{m-1}} \text{ folgt.}$$

Das erste Glied dieses Quotienten liefert das nächste Glied unserer Wurzel, nämlich $\frac{\alpha^5}{10^5}$. In gleicher Weise fährt man fort und bestimmt von der Wurzel so viele Glieder, als der vorgeschriebene Grad von Genauigkeit erfordert.

Anmerkung. Bei Bestimmung der einzelnen Stellen der Wurzel wird immer das letzte, von x unabhängige oder sogenannte absolute Glied durch den Coeffizienten des vorletzten Gliedes dividirt und der Quotient mit entgegengesetztem Zeichen genommen. Dabei stellt sich heraus, dass diese zwei letzten Glieder der einzelnen transformirten Gleichungen stets entgegengesetzte Vorzeichen haben, die mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Quotienten $\left(-\frac{B_m}{B_{m-1}}, -\frac{C_m}{C_{m-1}}, -\frac{D_m}{D_{m-1}} \text{ etc.}\right)$ also positiv ausfallen.

Die Zähler dieser Quotienten d. h. die absoluten Glieder der transformirten Gleichungen werden immer kleiner und man hat gegen das Ende hin nicht mehr nöthig, sie vollständig zu berechnen. Es genügt, so viele Stellen davon zu bestimmen, als man zur Ermittlung der geforderten Anzahl von Stellen in der Wurzel nothwendig hat. Gesetzt z. B. die Wurzel sollte bis zur 8ten Decimale genau berechnet werden, so ist nur erforderlich, dass man schliesslich die 8te Decimalstelle der Wurzel noch bestimmen könne. Das ist aber der Fall, wenn man die absoluten Glieder berechnet bis zu der Stelle, deren Lokalwerth gleich ist dem Produkt aus dem Lokalwerth des letzten Wurzelgliedes, das man noch

bestimmen will, (10^{-8}) in den Lokalwerth vom ersten Gliede des Divisors d. i. des Coeffizienten vom vorletzten Gliede. Ebenso kann man bei Berechnung der vorangehenden Glieder diejenigen Stellen weglassen, welche auf die Ermittlung der im letzten Gliede nothwendigen Stellen ohne Einfluss sind.

B e i s p i e l 1. Die Gleichung

$$(1) \quad x^3+3x-5=0$$

hat eine reelle Wurzel zwischen 1 und 2, da $f(1) = -1$ und $f(2) = +9$. Wir wollen diese Wurzel bis auf 6 Decimalen bestimmen. Es ist $\alpha = 1$ die bis auf eine Einheit genaue Wurzel; daher hat man $x = \alpha + x_1 = 1 + x_1$, wo $x_1 = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} + \frac{\alpha_3}{1000} +$ etc. ist.

Wir vermindern nun die Wurzeln um 1, indem wir $f(x)$ durch $x-1$ dividiren, den Quotienten wieder durch $x-1$ u. s. f. und die Reste zu Coeffizienten der ersten transformirten Gleichung nehmen. Wir bekommen so:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & 3 & -5 \\
 & & 1 & 1 & 4 \\
\hline
\alpha=1 & 1 & 1 & 4 & -1 \\
 & & 1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 2 & +6 & \\
 & & 1 & & \\
\hline
 & 1 & 3 & &
\end{array}$$

Die erste transformirte Gleichung ist also:

$$(2) \quad \varphi(x_1) = x_1^3 + 3x_1^2 + 6x_1 - 1 = 0, \text{ aus welcher}$$

$$\text{folgt: } x_1 = -\frac{-1}{6} = \frac{1}{6} = 0{,}1.$$

Um zu wissen, ob dieses Glied von x_1 richtig bestimmt sei, berechnen wir $\varphi(0{,}2)$ und $\varphi(0{,}1)$, die nichts Anderes sind als die Divisionsreste von $\varphi(x_1)$ durch $x_1-0{,}2$ und $x_1-0{,}1$ (Nro. 307).

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 3 & 6 & -1 \\
\alpha=0{,}2 & & 0{,}2 & 0{,}64 & 1{,}328 \\
\hline
 & 1 & 3{,}2 & 6{,}64 & +0{,}328
\end{array} \;;\ \varphi(0{,}2) \text{ ist also positiv.}$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 3 & 6 & -1 \\
 & & 0{,}1 & 0{,}31 & 0{,}631 \\
\hline
\alpha=0{,}1 & 1 & 3{,}1 & 6{,}31 & -0{,}369
\end{array} \;;\ \text{also } \varphi(0{,}1) \text{ ist negativ.}$$

Die Wurzel der Gleichung (2) liegt also zwischen 0,1 und 0,2, und somit $\frac{\alpha_1}{10} = 0{,}1$ oder $\alpha_1 = 1$.

Wir vermindern nun die Wurzeln dieser Gleichung (2) um 0,1, indem wir $\varphi(x_1)$ durch x_1—0,1 dividiren, den Quotienten wieder durch x_1—0,1 etc.

	1	3	6	—1
α=0,1		0,1	0,31	0,631
	1	3,1	6,31	—0,369
		0,1	0,32	
	1	3,2	+6,63	
		0,1		
	1	3,3		

Die nächste transformirte Gleichung wird daher sein:

$$(3)\quad x_1{}^3+3{,}3x_1{}^2+6{,}63x_1-0{,}369=0,$$

deren Wurzeln um 0,1 kleiner sind als die von (2) und um 1,1 kleiner als die der ursprünglichen Gleichung. Aus (3) folgt näherungsweise: $x_1=\frac{0{,}369}{6{,}63}=0{,}05$, und man überzeugt sich wieder leicht, dass diese Ziffer richtig bestimmt ist, dass also $\frac{\alpha_2}{100}=0{,}05$ oder $\alpha_2=5$.

Wir vermindern jetzt die Wurzeln der Gleichung (3) um 0,05 und haben daher folgende Rechnung:

	1	3,3	6,63	—0,369 . . .
0,05		0,05	0,1675	0,339875
	1	3,35	6,7975	—0,029125
		0,05	0,1700	
	1	3,40	+6,9675	
		0,05		
	1	3,45;	daher	

$$(4)\quad x_1{}^3+3{,}45x_1{}^2+6{,}9675x_1-0{,}029125=0$$

die neue Gleichung, deren Wurzeln um 0,05 kleiner sind, als die der Gleichung (3). Man findet hieraus:

$$x_1=\frac{0{,}029125}{6{,}9675}=0{,}004$$

daher $\frac{\alpha_3}{10^3}=0{,}004$ und $\alpha_3=4$.

Wir vermindern die Wurzeln der Gleichung (4) wieder um 0,004 und haben hiefür folgende Rechnung:

	1	3,45	6,9675	—0,029125
		0,004	0,013816	0,027925
0,004	1	3,454	6,981316	—0,001200
		0,004	0,013832	
	1	3,458	6,995148	
		0,004		
	1	3,462;	daher	

$$(5)\quad x_1^3+3{,}462x_1^2+6{,}995148x-0{,}001200=0$$

die neue transformirte Gleichung, bei der das letzte Glied nur auf 6 Decimalen berechnet wurde. Hieraus folgt

$x_1 = \frac{0{,}0012}{6{,}995} = 0{,}0001$. Daher ist die 4te Decimale $\alpha_4 = 1$.

Wir vermindern die Wurzeln dieser Gleichung wieder um 0,0001 und haben daher:

	1	3,462	6,995148	—0,001200
		0,0001	346	6995
0,0001	1	3,4621	6,995494	—0,0005005
		0,0001	346	
	1	3,4622	6,995840	
		0,0001		
	1	3,4623		

was uns die neue Gleichung

$$(6)\quad x_1^3+3{,}4623x_1^2+6{,}995840x_1-0{,}0005005=0$$

liefert, deren Wurzeln um 0,0001 kleiner sind als die der Gleichung (5) oder um 1,1541 kleiner als die der ursprünglichen Gleichung (1). Wir finden hieraus

$$x_1 = \frac{0{,}0005005}{6{,}9958} = 0{,}00007$$

und es wäre demnach $\frac{\alpha_5}{10^5} = 0{,}00007$ oder $\alpha_5 = 7$.

Wir wollen noch das nächste Glied berechnen und vermindern daher die Wurzeln der Gleichung (6) um 0,00007, bei welcher Rechnung die Coeffizienten des 2ten und 3ten Gliedes bis zur 3ten Decimale unverändert bleiben. Wir haben daher

	1	3,462	6,996	—0,0005005
0,00007				4897
	1	3,462	6,996	—0,0000108

woraus folgt: $x_1 = \frac{0{,}0000108}{6{,}996} = 0{,}000001$.

Die 6te Decimale unserer Wurzel wäre demnach 1 und um

zu wissen, ob die Wurzel bis auf eine Einheit der 6ten Decimale genau bestimmt ist, dürfen wir nur in die neue transformirte Gleichung

$$\varphi(x_1)=x_1^3+3{,}462x_1^2+6{,}996x_1-0{,}0000108=0$$

an die Stelle von x_1 einmal 0,000001 und ein andermal 0,000002 setzen. Es zeigt sich hiebei, dass die Substitution von 0,000001 ein negatives, die von 0,000002 aber ein positives Resultat gibt, woraus folgt, dass eine Wurzel dieser Gleichung zwischen 0,000001 und 0,000002 und somit eine Wurzel der ursprünglichen Gleichung zwischen 1,154171 und 1,154172 liegt.

Beispiel 2. Sei $f(x)=x^4-4x^3+x+4=0$ (1) die gegebene Gleichung, so hat diese eine Wurzel zwischen 1 und 2; daher ist $x=\alpha+x_1=1+x_1=1+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{100}+\frac{\alpha_3}{1000}+\ldots$

Zur Bestimmung von α_1 vermindern wir die Wurzel dieser Gleichung um 1 und haben, indem wir uns das fehlende Glied mit dem Coeffizienten Null hergestellt denken:

	1	—4	0	1	4
		1	—3	—3	—2
$\alpha=1$	1	—3	—3	—2	+2
		1	—2	—5	
	1	—2	—5	—7	
		1	—1		
	1	—1	—6		
		+1			
	1	0 ; daher			

$$\varphi(x_1)=x_1^4-6x_1^2-7x_1+2=0 \quad (2)$$

und $$x_1=\tfrac{2}{7}=0{,}2.$$

Um zu wissen, ob 0,2 richtig bestimmt sei, bilden wir $\varphi(0{,}2)$ und $\varphi(0{,}3)$ und bekommen:

0,2 :	1	0	—6	—7	+2
		0,2	0,04	—1,192	—1,6384
	1	0,2	—5,96	—8,192	+0,3616
0,3	1	0	—6	—7	+2
		0,3	0,09	—1,773	—2,6319
	1	0,3	—5,91	—8,773	—0,6319

Es ist also $\varphi(0{,}2)=+0{,}3616$ und $\varphi(0{,}3)=-0{,}6319$; daher liegt die Wurzel der Gleichung (2) zwischen 0,2 und 0,3 und es ist $\alpha_1=2$ richtig bestimmt. Wir vermindern die Wurzeln der Gleichung (2) wieder um 0,2.

	1	0	—6	—7	+2
		0,2	0,04	—1,192	—1,6384
0,2	1	0,2	—5,96	—8,192	+0,3616
		0,2	0,08	—1,176	
	1	0,4	—5,88	—9,368	
	1	0,6	—5,76		
		0,2			
	1	+0,8			

(3) $\varphi(x_1) = x_1^4 + 0{,}8x_1^3 - 5{,}76x_1^2 - 9{,}368x_1 + 0{,}3616 = 0$

woraus $x_1 = \dfrac{0{,}3616}{9{,}368} = 0{,}03.$

Der Quotient liegt näher an 0,04 als an 0,03; wi r berechnen daher zur Sicherheit $\varphi(0{,}04)$, was nichts Anderes ist als der Rest der Division von $\varphi(x_1)$ durch $x_1 - 0{,}04$

	1	0,8	—5,76	—9,368	+0,3616
0,04		0,04	0,0336	—0,229056	—0,3839
	1	0,84	—5,7264	—9,597056	—0,0223

Also $\varphi(0{,}04)$ fällt negativ aus, während $\varphi(0{,}03)$ positiv ist; daher ist 0,03 richtig bestimmt. Wir vermindern jetzt die Wurzeln der Gleichung (3) um 0,03, wofür wir folgende Rechnung haben:

	1	0,8	—5,76	—9,368...	+0,3616
		0,03	0,0249	—0,172053	—0,28620159
0,03	1	0,83	—5,7351	—9,540053	+0,07539841
		0,03	0,0258	—0,171279	
	1	0,86	—5,7093	—9,711332	
		0,03	0,0267		
	1	0,89	—5,6826		
		0,03			
	1	0,92			

(4): $\varphi(x_2) = x_1^4 + 0{,}92x_1^3 - 5{,}6826x_1^2 - 9{,}711332x_1 + 0{,}07539841 = 0$

ist somit eine Gleichung, deren Wurzeln um 0,03 kleiner sind als die der Gleichung (3), ferner um 0,23 kleiner als die von (2) und um 1,23 kleiner als die von (1).

Hieraus folgt: $x_1 = \dfrac{0{,}07539841}{9{,}711332} = 0{,}007$

Wir wollen nun von unserer Wurzel 6 Decimalen berechnen; der vorletzte Coeffizient hat als höchstes Glied Einer; wir

brauchen daher, um die Millionstel genau bestimmen zu können, das letzte Glied nur bis auf 6 Decimalen, wollen aber zur Sicherheit 7 Decimalen nehmen. Indem wir jetzt alle einzelnen Coefficienten nur soweit berechnen, als nöthig ist, haben wir:

	1	0,92	—5,6826	—9,71133	+0,0753984
		0,007	+ 64	— 3973	— 682574
0,007	1	0,927	—5,6762	—9,75106	+0,0071410
		0,007	+ 65	— 3968	
	1	0,934	—5,6697	—9,79074	
		0,007	+ 66		
	1	0,941	—5,6631		
		0,007			
	1	0,948 ; daher			

(5) $x_1^4 + 0,948x_1^3 - 5,6631x_1^2 - 9,79074x_1 + 0,0071410 = 0$

woraus folgt: $x_1 = \dfrac{0,0071410}{9,79074} = 0,0007$

Wir vermindern die Wurzeln dieser Gleichung um 0,0007:

	1	0,948	—5,6631	—0,79074	+0,0071410
			+ 6	— 396	— 68563
0,0007	1	0,948	—5,6625	— 9,7947	+0,0002847
			6	— 39	
	1	0,948	—5,6619	— 9,7986	
			6		
	1	0,948	—5,6613		
	1	0,948 ; somit			

(6) $x_1^4 + 0,948x_1^3 - 5,6613x_1^2 - 9,7986x_1 + 0,0002847 = 0$

die neue Gleichung, deren Wurzeln um 0,0007 kleiner sind als die der Gleichung (5). Hieraus folgt

$$x_1 = \frac{0,0002847}{9,7986} = 0,00002.$$

Wir vermindern endlich die Wurzeln dieser Gleichung um 0,00002:

	1	0,948	—5,6613	—9,7986	+0,0002847
				— 1	— 1959
0,00002	1	0,948	—5,6613	— 9,7987	+0,0000888
	bleiben unverändert			— 1	
				—9,7988	

Daher $x_1 = \frac{0,0000888}{9,7988} = 0,000009$

und somit die gesuchte Wurzel der Gleichung (1):

$$x = 1,237729.$$

Um zu wissen, ob die letzte Stelle genau sei, betrachten wir nur die Gleichung

$$(7) \quad x_1^4 + 0,948x_1^3 - 5,6613x_1^2 - 9,7988x_1 + 0,0000888 = 0$$

und prüfen, ob sie eine zwischen $\frac{9}{10^6}$ und $\frac{10}{10^6}$ oder $\frac{1}{10^5}$ liegende Wurzel habe, indem wir $\varphi(0,000009)$ und $\varphi(0,00001)$ berechnen. Die Prüfung zeigt, dass die Wurzel richtig ist; denn man hat:

	1	0,9	—5,6	—9,786	+0,0000888
					— 880
0,000009	1	0,9	—5,6	—9,786	+0,0000008
	1	0,9	—5,6	—9,786	+0,0000888
					— 978
0,00001	1	0,9	—5,6	—9,786	—0,0000090

Die Substitution von 0,00001 gibt also ein n e g a t i v e s, die von 0,000009 aber ein positives Resultat; somit liegt die Wurzel der Gleichung (7) zwischen 0,00001 und 0,000009 und daher ist $x = 1,237729$ bis auf die 6te Decimale richtig bestimmt.

Regula Falsi.

349. Noch häufigere Verwendung als die vorige Methode findet in der Praxis die sogenannte R e g u l a F a l s i. Substituirt man nämlich in eine Gleichung $f(x) = 0$ an die Stelle von x zwei Zahlen α_1 und α_2, deren jede von einer Wurzel x_1 um weniger als um 1 verschieden ist, nennt dann die Unterschiede zwischen den substituirten Zahlen und der wahren Wurzel, also die Differenzen $\alpha_1 - x_1$ und $\alpha_2 - x_1$ F e h l e r der S u b s t i t u t i o n e n, die diesen Werthen α_1 und α_2 entsprechenden Substitutionswerthe $f(\alpha_1)$ und $f(\alpha_2)$ aber F e h l e r der R e s u l t a t e, so besteht die Regula Falsi in der Proportion: D i e F e h l e r d e r R e s u l t a t e s i n d n ä h e r u n g s w e i s e p r o p o r t i o n a l d e n F e h l e r n d e r S u b s t i t u t i o n e n; also

$$f(\alpha_1) : f(\alpha_2) = \alpha_1 - x_1 : \alpha_2 - x_1 \text{ oder}$$

$$f(\alpha_1) : f(\alpha_2) = \delta_1 : \delta_2, \text{ wenn } \alpha_1 - x_1 = \delta_1 \text{ und } \alpha_2 - x_1 = \delta_2.$$

gesetzt wird.

Man hat nämlich nach No. 304:

$$(1)\begin{cases} f(\alpha_1)=f(x_1+\delta_1)=f(x_1)+f'(x_1).\delta_1+f^2(x_1).\frac{\delta_1^2}{1.2}+\ldots \\ f(\alpha_2)=f(x_1+\delta_2)=f(x_1)+f'(x_1)\delta_2+f^2(x_1).\frac{\delta_2^2}{1.2}+\ldots \end{cases}$$

Wenn nun x_1 eine Wurzel, also $f(x_1)=0$ ist und δ_1 und δ_2 ächte Brüche bedeuten, so bekommt man bei Weglassung der höhern Potenzen von δ_1 und δ_2 die Gleichungen:

$$f(\alpha_1)=f'(x_1).\delta_1$$
$$f(\alpha_2)=f'(x_1).\delta_2$$

woraus durch Division folgt:

$$\frac{f(\alpha_1)}{f(\alpha_2)}=\frac{\delta_1}{\delta_2} \text{ oder}$$
$$\frac{f(\alpha_1)}{f(\alpha_2)}=\frac{\alpha_1-x_1}{\alpha_2-x_1} \quad (2).$$

Das ist nun in Bezug auf die Unbekannte x_1 eine Gleichung ersten Grades, aus der wir x_1 ohne Weiteres berechnen können.

Wäre die Gleichung (2) exakt, so bekämen wir durch deren Auflösung den genauen Werth der Wurzel x_1. Sie ist aber desshalb ungenau, weil die Glieder mit den höhern Potenzen von δ_1 und δ_2 weggelassen wurden. Je kleiner δ_1 und δ_2 wären, desto genauer würde die Gleichung (2) und damit auch der daraus resultirende Werth von x_1 ausfallen. Man kann daher durch Substitution zweier angenäherten Werthe α_1 und α_2 einmal einen neuen angenäherten Werth α_3 für x_1 finden, welcher der wahren Wurzel x_1 näher liegt, als jeder der frühern, dann diesen mit einem der frühern benutzen und so eine neue Gleichung

$$\frac{f(\alpha_1)}{f(\alpha_3)}=\frac{\alpha_1-x_1}{\alpha_3-x_1} \text{ oder } \frac{f(\alpha_3)}{f(\alpha_2)}=\frac{\alpha_3-x_1}{\alpha_2-x_1}$$

bekommen, aus der sich ein noch mehr angenäherter Werth von x_1 ergibt.

Anmerkung 1. Wäre x_1 nicht gerade Wurzel der Gleichung $f(x)=0$, aber die Differenzen α_1-x_1 und α_2-x_1 verhältnissmässig klein, so bekäme man:

$$f(\alpha_1)-f(x_1)=f'(x_1).\delta_1$$
$$f(\alpha_2)-f(x_1)=f'(x_1).\delta_2,$$ woraus durch Division sich ergeben würde

$$\frac{f(\alpha_1)-f(x_1)}{f(\alpha_2)-f(x_1)}=\frac{\delta_1}{\delta_2}=\frac{\alpha_1-x_1}{\alpha_2-x_1} \quad (3)$$

d. h. die Differenzen der Substitutionsresultate sind den Differenzen der substituirten Zahlen näherungsweise proportional, eine Proportion, die noch allgemeiner ist als die vorige (2), indem diese aus (3) hervorgeht, wenn man die Voraussetzung einführt, dass $f(x_1)=0$ sei.

Anmerkung 2. Wenn die Derivirten höherer Ordnung sämmtlich gleich Null wären, so würden, was auch δ_1 und δ_2 sein möchten, die auf $f'(x_1)\delta_1$ und $f'(x_1)\cdot\delta_2$ folgenden Glieder alle verschwinden und man hätte dann die exakten Gleichungen:

$$f(\alpha_1) = f(x_1) + f'(x_1)\cdot\delta_1$$
$$f(\alpha_2) = f(x_1) + f'(x_1)\delta_2,$$

aus welchen man für $f(x_1)=0$ bekäme:

$$\frac{f(\alpha_1)}{f(\alpha_2)} = \frac{\alpha_1 - x_1}{\alpha_2 - x_1}$$

als eine nicht bloss angenäherte, sondern vollkommen genaue Proportion. Das ist nun der Fall, wenn $f(x)$ vom ersten Grade ist d. h. bei Gleichungen des ersten Grades würde die Regula Falsi stets genaue Resultate geben, ohne dass $\alpha_1 - x_1$ und $\alpha_2 - x_1$ an die Bedingung geknüpft wären, kleiner als 1 sein zu müssen. Natürlich würde man sich zur Auflösung einer solchen Gleichung nicht der Regula Falsi bedienen, da die direkte Auflösung rascher zum Ziele führt. Wir wollen uns aber doch an einem speziellen Beispiel überzeugen, dass sie, wenn die Gleichung vom ersten Grade ist, stets genaue Resultate liefert.

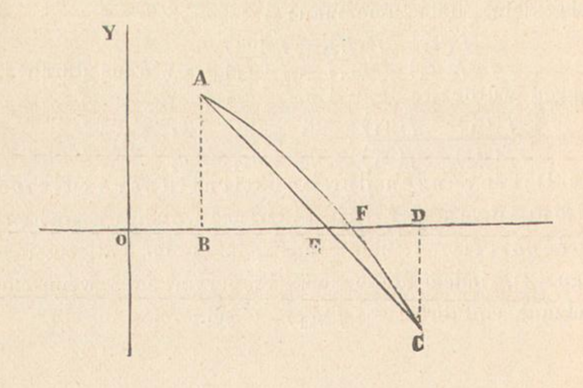
Sei $x - \frac{7}{10} = \frac{3}{4}x + \frac{3}{10}$, so ist

$$f(x) = \frac{1}{4}x - 1.$$

Setzen wir nun für α_1 und α_2 zwei beliebige Zahlen z. B. $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = 2$, so geht die Gleichung (2) über in:

$$\frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{1}{2}} = \frac{1 - x_1}{2 - x_1} \text{ oder}$$
$$\frac{3}{2} = \frac{1 - x_1}{2 - x_1} \text{ oder}$$
$$3(2 - x_1) = 2(1 - x_1) \text{ oder}$$
$$6 - 3x_1 = 2 - 2x_1. \text{ oder}$$
$$4 = x_1.$$

350. Geometrische Darstellung der Regula Falsi.



Wenn $f(x)=0$ die Gleichung ist, so denken wir uns unter Annahme eines rechtwinkligen Achsensystems eine Curve konstruirt, deren Gleichung $y=f(x)$ ist. Wenn dann zwischen α_1 und α_2 nur e i n e reelle Wurzel liegt, $OB=\alpha_1$, $OD=\alpha_2$ gemacht wird, ferner $f(\alpha_1)$ positiv, $f(\alpha_2)$ aber negativ ist, so denken wir uns in den Abständen $OB=\alpha_1$ und $OD=\alpha_2$ die Ordinaten AB und DC errichtet, dann wird $AB=f(\alpha_1)$ und $-CD=f(\alpha_2)$ sein. Die wahre Wurzel x_1 wäre dann die Abscisse OF des Durchgangspunktes F der Curve durch die X Achse; derjenige Werth des x_1, den die Gleichung

$$\frac{f(\alpha_1)}{f(\alpha_2)}=\frac{\alpha_1-x_1}{\alpha_2-x_1}$$

liefert, ist aber die Abscisse OE des Punktes E, in welchem die Sehne AC die X-Achse trifft. In der That hat man wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ABE und EDC die Proportion:

$$AB : DC = BE : ED \text{ oder}$$

$$\frac{AB}{DC}=\frac{BE}{ED} \quad (\alpha)$$

Nun ist aber, wenn wir $OE=x_1$ setzen: $BE=x_1-\alpha_1=-(\alpha_1-x_1)$; $DE=\alpha_2-x_1$; $AB=f(\alpha_1)$ und $-CD=f(\alpha_2)$; daher können wir die Proportion (α) auch so schreiben:

$$\frac{f(\alpha_1)}{-f(\alpha_2)}=\frac{-(\alpha_1-x_1)}{\alpha_2-x_1}$$ oder, beide Seiten mit -1 multiplizirt: $\frac{f(\alpha_1)}{f(\alpha_2)}=\frac{\alpha_1-x_1}{\alpha_2-x_1}$, was gerade die Proportion (2) der Regula Falsi ist.

Man erkennt hieraus unmittelbar, dass der Werth $x_1=OE$ in der That näher an der wahren Wurzel OF liegt, als $\alpha_1=OB$ und in den meisten Fällen auch näher als $\alpha_2=OD$.

351. Statt die Gleichung (2) in der Form

$$\frac{f(\alpha_1)}{f(\alpha_2)}=\frac{\alpha_1-x_1}{\alpha_2-x_1}.$$

zu benutzen, kann man sie auch direkt nach x_1 auflösen. Wir bekommen dadurch

$$(\alpha_2-x_1)f(\alpha_1)=(\alpha_1-x_1)f(\alpha_2) \text{ oder}$$

$$\alpha_2 f(\alpha_1)-x_1 f(\alpha_1)=\alpha_1 f(\alpha_2)-x_1 f(\alpha_2)$$

$$x_1[f(\alpha_2)-f(\alpha_1)]=\alpha_1 f(\alpha_2)-\alpha_2 f(\alpha_1)$$

$$x_1=\frac{\alpha_1 f(\alpha_2)-\alpha_2 f(\alpha_1)}{f(\alpha_2)-f(\alpha_1)} \quad (4)$$

Wollen wir bei den spätern Annäherungen nicht immer die ganze Wurzel x_1 als zu suchende Unbekannte betrachten, sondern den bereits gefundenen Theil benutzen, so heben wir α_1 oder α_2 heraus und addiren, um z. B. α_1 herauszuheben, im Zähler von (3) $-\alpha_1 f(\alpha_1) + \alpha_1 f(\alpha_1)$, so erhalten wir:

$$x_1 = \frac{\alpha_1 f(\alpha_2) - \alpha_1 f(\alpha_1) + \alpha_1 f(\alpha_1) - \alpha_2 f(\alpha_1)}{f(\alpha_2) - f(\alpha_1)} \text{ oder}$$

$$x_1 = \frac{\alpha_1 [f(\alpha_2) - f(\alpha_1)] + (\alpha_1 - \alpha_2) f(\alpha_1)}{f(\alpha_2) - f(\alpha_1)}, \text{ woraus}$$

$$x_1 = \alpha_1 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) f(\alpha_1)}{f(\alpha_2) - f(\alpha_1)} = \alpha_1 - \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) f(\alpha_1)}{f(\alpha_2) - f(\alpha_1)} \quad (4\alpha)$$

Ebenso könnte man x_1 in die Form bringen:

$$x_1 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) f(\alpha_2)}{f(\alpha_2) - f(\alpha_1)} \quad (4\beta)$$

Bei den Formen (4α) und (4β) hat man jedesmal nur den 2ten Theil zu berechnen.

352. Man könnte nun diesen 2ten Theil des Ausdruckes für x_1 in Gleichung (4α) auch durch eine Proportion unmittelbar finden. Bezeichnen wir nämlich mit z das, was man zu dem bereits berechneten Wurzeltheil α_1 noch hinzufügen muss, um die wahre Wurzel zu erhalten, so können wir sagen:

die Substitution von α_1 gibt $f(\alpha_1)$
die „ „ „ von $\alpha_1 + z$ gibt 0
die „ „ „ von α_2 gibt $f(\alpha_2)$.

Nun verhalten sich nach Gleichung (3) die Differenzen der substituirten Zahlen näherungsweise, wie die Differenzen der Substitutionsresultate. Also müsste

$$(\alpha_1 + z) - \alpha_1 : \alpha_2 - \alpha_1 = 0 - f(\alpha_1) : f(\alpha_2) - f(\alpha_1)$$

oder $$z : \alpha_2 - \alpha_1 = -f(\alpha_1) : f(\alpha_2) - f(\alpha_1)$$

eine Proportion, die man auch so ausdrücken könnte: die Differenz zwischen der wahren Wurzel und dem einen angenäherten Werth verhält sich zur Differenz zwischen beiden angenäherten Werthen, wie die Differenz zwischen Null und dem ersten Substitutionsresultat zur Differenz zwischen beiden Substitutionsresultaten. Aus dieser Proportion folgt dann:

$$z = \frac{-(\alpha_2 - \alpha_1) f(\alpha_1)}{f(\alpha_2) - f(\alpha_1)}$$

Beispiel. Sei $f(x) = x^3 - 5x - 3 = 0$ die gegebene Gleichung, so zeigt sich, dass dieselbe eine zwischen 2,4 und 2,5 liegende reelle Wurzel hat; denn es ist $f(2,4) =$

—1,176 und $f(2,5)=0,125$. Wir betrachten daher $\alpha_1 = 2,4$ und $\alpha_2 = 2,5$ als erste angenäherte Werthe, bezeichnen mit z das, was man zu 2,4 noch hinzufügen muss, um die wahre Wurzel zu bekommen, so haben wir:

die Substitution von 2,4 gibt —1,176
" " " " 2,4+z gibt 0
" " " " 2,5 gibt 0,125; daher

$$z : 2,5-2,4 = 0-(-1,176) : 0,125-(-1,176)$$

oder $$z : 0,1 = 1,176 : 1,301, \text{ woraus}$$

$$z = \frac{0,1 \,.\, 1,176}{1,301} = \frac{0,1176}{1,301} = 0,09$$

Bei dieser ersten Annäherung finden wir also $x = 2,49$.

2ter Gang. Wir setzen nun $\alpha_1 = 2,49$ und $\alpha_2 = 2,5$; dann ist $f(2,49) = (2,49)^3 - 5.2,49 - 3 = 15,438249 - 12,45 - 3$ oder $f(2,49) = 15,438249 - 15,45 = -0,011751$; ferner war $f(2,5) = 0,125$.

Bezeichnen wir daher mit k den noch fehlenden Theil unserer Wurzel, so wäre die vollständige Wurzel $= 2,49 + k$. Daher haben wir wieder:

die Substitution von 2,49 gibt —0,011751
" " " " 2,49+k gibt 0
" " " " 2,5 gibt 0,125.

Daher $k : 2,5 - 2,49 = -f(\alpha_1) : f(\alpha_2) - f(\alpha_1)$ oder

$$k : 0,01 = 0,011751 : 0,136751,$$

woraus $$k = \frac{0,01.0,011751}{0,136751} = \frac{0,00011751}{0,136751} = 0,000859;$$

daher $x = 0,49 + z = 0,490859$.

Da der eine angenäherte Werth 0,49 bis auf $\frac{1}{100}$ genau ist, so dürfen wir hier eine Genauigkeit von höchstens einer Einheit der 4ten Decimale erwarten. Wir machen daher noch einen dritten Gang und setzen: $\alpha_1 = 2,490859$, $\alpha_2 = 2,49$; dann ist

$$\begin{aligned} f(\alpha_1) &= (2,490859)^3 - 5.2,490859 - 3 \\ &= 15,45423212 - 12,454295 - 3 \\ &= 15,45423212 - 15,454295 = -0,00006288 \end{aligned}$$

$$f(\alpha_2) = f(2,49) = -0,011751.$$

Bezeichnen wir daher den noch fehlenden Wurzeltheil mit ω, so ist die wahre Wurzel $x = 2,490859 + \omega$ und wir haben daher wieder:

die Substitution von 2,490859 gibt —0,00006288
" " " 2,490859+ω 0
" " " 2,49 .... —0,011751

Daher die Proportion:

$$\omega : 2{,}49 - 2{,}490859 = -f(\alpha_1) : f(\alpha_2) - f(\alpha_1)$$

oder

$$\omega : -0{,}000859 = 0{,}00006288 : -0{,}01168812$$

woraus

$$\omega = \frac{-0{,}000859 \, . \, 0{,}00006288}{-0{,}01168812}$$

$$\omega = \frac{0{,}0000000540139 2}{0{,}01168812} = 0{,}000004624;$$

somit $x = 2{,}490859 + 0{,}000004624$ oder

$x = 2{,}490863624$,

welche bis auf 6 Decimalen genau ist.

353. Man könnte sich der Regula Falsi ebenso gut zur Auflösung transcendenter Gleichungen bedienen. Hätte man z. B. die Gleichung

$$x^x = 1000 \text{ oder } x \log x = 3,$$

so fände man leicht, dass dieselbe nur eine, zwischen 4 und 5 liegende reelle Wurzel hat. Es ist nämlich $4^4 = 256$ und $5^5 = 3125$; daher muss x zwischen 4 und 5 liegen. Man hätte nun $f(x) = x \log x - 3$ und könnte als erste angenäherte Werthe $\alpha_1 = 4$ und $\alpha_2 = 5$ setzen, dann wäre $f(\alpha_1) = f(4) = 4 \, . \log 4 - 3$ und $f(\alpha_2) = f(5) = 5 \, . \log 5 - 3$. Man müsste nun $f(4)$ und $f(5)$ berechnen und dann unter Anwendung der Gleichung (4α) oder der in Nro. 352 entwickelten Proportion ganz wie im vorigen Beispiel einen angenäherten Werth von x bestimmen. Diesen erhaltenen Werth benutzend, würde man durch Wiederholung des gleichen Verfahrens einen genauern Werth finden, dabei jedoch die Annäherung nicht weiter treiben können, als die Genauigkeit der angewandten Logarithmentafeln gestattet. Man könnte also z. B. bei siebenstelligen Logarithmentafeln von der Wurzel nicht mehr als 7 Glieder bestimmen.

Druckfehler.

Seite 12, Zeile 5 von oben lies $(-35)+(+23)=?$ statt $(-35)+(-23)=?$

„ 31 „ 4 von oben lies $a+b-c$ statt $a+b=-c$.

„ 34 „ 3 von unten lies $a^2+2ab+b^2$ statt $a^2-2ab+b^2$.

„ 35 „ 5 von oben lies $(a-b)^2$ statt $(a+b)^2$.

„ 36 „ 9 von oben setze einen Punkt statt des Doppelpunktes.

„ 52 „ 10 von oben: Schalte im Coeffizienten von x das Glied $-a^3b^3$ ein und im nächsten Gliede lies $-3a^4b^3$ statt $3a^4b$.

„ 56 „ 11 von oben lies $\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{A}$ statt $\frac{A}{C} \cdot \frac{B}{A}$.

„ 61 „ 7 von oben lies $a^m \cdot a^n$ statt $a^m \cdot a^m$.

„ 73 „ 13 von unten lies $\sqrt[5]{\sqrt[9]{a^{20}}}$ statt $\sqrt[5]{\sqrt[6]{a^{20}}}$.

„ 75 „ 9 von unten lies $\sqrt[\frac{n}{m} \cdot \frac{r}{s}]{a}$ statt $\sqrt[\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q}]{a}$.

„ 75 „ 8 von unten lies $\sqrt[\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q}]{a^{\frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q}}}$ statt $\sqrt[\frac{n}{m} \cdot \frac{r}{s}]{a^{\frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q}}}$

„ 76 „ 12 von unten lies $\left[\sqrt[np]{\sqrt[sq]{a^{rp}}}\right]^{mp}$ statt $\left[\sqrt[np]{\sqrt[sq]{a^{rp}}}\right]^{m}$

„ 79 „ 4 von oben lies $-30x^5y^3$ statt $-30x^5y^2$.

„ 84 „ 6 von oben lies $\sqrt{A+Bx+Cx^2+\ldots Qx^n}$ statt $\sqrt{Ax^2+Bx^2+\ldots}$

„ 86 „ 5 von unten lies: eine Anzahl Zehntel statt: eine Anzahl Einer

„ 91 „ 11 von unten in der 1sten Klasse lies 16 statt 19.

„ 95 „ 12 von unten lies am Ende c^3 statt c^2.

„ 101 „ 5 von oben lies $+(0,2)^3$ statt $(6,2)^3$!

„ 105 „ 1 von unten Beispiel 2 lies als leztes Glied x^3 statt x^2.

„ 105 „ 5 von unten lies $\sqrt[3]{75}=\sqrt[3]{25.3}$ statt $=\sqrt[3]{22.3}$.

„ 106 „ 5 von unten lies $=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ statt bloss: $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$.

„ 108 „ 2 von unten lies $x=+\sqrt{A}$ statt $x-+\sqrt{A}$.

„ 110 „ 6 von unten lies $(a+b)^2$ statt $(x+b)^2$.

„ 119 „ 18 von oben lies mX statt mY.

„ 119 „ 7 von oben in Gleichung (2) lies c' statt c.

Seite 136 Zeile 16 von oben lies: also $x=8$ statt $x=7$.
„ 155 „ 20 von oben lies: Eliminationen statt Elimination.
„ 158 „ 17 von unten lies $7x^2-4x$ statt $7x^2-ax$.
„ 159 „ 6 von unten lies $x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ statt $-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.
„ 161 „ 7 von unten lies $\frac{157}{9}$ statt $\frac{157}{6}$.
„ 164 „ 1 von unten lies $x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ statt $-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.
„ 173 „ 8 von unten lies $-q$ statt $-p$ und Zeile 10: x^2 statt x^3.
„ 175 „ 10 von unten lies $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ statt $\alpha-\sqrt{-1}$.
„ 176 „ 2 und 3 von unten lies $\frac{p}{2}$ statt $-\frac{p}{2}$ in den Werthen von x' und x''.
„ 177 „ 11 von unten lies $x^2+px-q=0$ statt $x^2+px+q=0$.
„ 186 „ 9 und 11 von unten lies $+\frac{9}{4}a^{\frac{4}{3}}$ statt $\pm\frac{9}{4}a^{\frac{4}{3}}$.
„ 189 „ 9 von unten lies $\frac{26.23a-7.83a}{2.26}$ statt $\frac{26.23a-7.83a}{2}$
„ 190 „ 8 von unten lies $z'=\frac{37a^2+35a^2}{2}$ statt $\frac{27a^2+35a^2}{2}$
„ 194 „ 8 von unten lies $6b^2x$ statt $6bx^2$.
„ 203 „ 4 von unten lies $\frac{Q'}{c}$ statt Q'
„ 210 „ 17 und 18 von oben lies $a'>1$ statt $a'<1$.
„ 213 „ 2 von unten lies $a^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{a}$ statt $=\sqrt{a}$.
„ 213 „ 11 von unten lies $a^{\frac{n}{m}}\left(\sqrt[m]{a}-1\right)$ statt $a^{\frac{1}{m}}\left(\sqrt[m]{a}-1\right)$.
„ 232 „ 4 von unten 90,6 statt 80,6
„ 257 „ 8 von unten lies: letztes Glied statt „erstes Glied“.
„ 258 „ 11 von oben lies $\frac{18-10}{23+1}$ statt $\frac{18-10}{22+1}$.
„ 296 „ 6 von oben lies „für n“ statt: für x.
„ 298 „ 1 von unten lies $\frac{b}{a}$ statt $\frac{a}{b}$.
„ 310 „ 11 von unten lies $t=\frac{5+6y}{11}$ statt: $=\frac{5+6y}{11}$.
„ 315 „ 1 von unten lies: Als statt Aus.
„ 315 „ 13 von unten lies: wenn wir in die Gleichung statt: wenn wir die Gleichung.
„ 347 „ 9 von oben: Setze die Nummer 255 hinzu.

Seiteite 352 Zeile 11 von unten lies $\frac{30.31.106}{6}$ statt $\frac{30.3.106}{6}$.

„ „ 353 „ 14 von unten lies: von dem imaginären statt: imaginäre.

„ „ 360 „ 20 von oben lies $\cos(\Phi_n+\varphi_{n+1})+i\sin(\Phi_n+\varphi_{n+1})$ statt $+\sin(\Phi_n+\varphi_{n+1})$

„ „ 360 „ 13 von unten lies $\cos\varphi+i\sin\varphi$ statt $\varphi+i\sin\varphi$.

„ „ 361 „ 9 von unten lies $\cos\frac{\varphi}{m}+i\sin\frac{\varphi}{m}$ statt $\cos\frac{\varphi}{m}+\sin\frac{\varphi}{m}$.

„ „ 382 „ 15 von oben lies S_n statt S.

„ „ 426 „ 3 von oben lies: daher auch statt daher auf.

„ „ 430 „ 2 von unten lies Anmerkung 2 statt bloss:' Anmerkung.

„ „ 423 „ 13 von unten lies: jedes statt edes.

Druck von H. W. Schmidt in Halle.

